

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Кубанский государственный университет»  
Факультет компьютерных технологий и прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по учебной работе,  
качеству образования – первый  
проректор

\_\_\_\_\_ Хагуров Т.А.  
подпись  
« 27 » \_\_\_\_\_ 2018г.



## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### Б1.В.05 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Направление подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) \_\_\_\_\_ Математическое моделирование \_\_\_\_\_

Программа подготовки \_\_\_\_\_ академическая \_\_\_\_\_

Форма обучения \_\_\_\_\_ очная \_\_\_\_\_

Квалификация (степень) выпускника \_\_\_\_\_ магистр \_\_\_\_\_

Краснодар 2018

Рабочая программа дисциплины «ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ» составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки **01.04.02 Прикладная математика и информатика** (уровень магистратуры), утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации № 911 от 28 августа 2015 г.


Программу составил:

Павлова А.В., д-р физ.-мат. наук, доцент, проф. кафедры математического моделирования КубГУ




Рабочая программа дисциплины «Дополнительные главы уравнений математической физики» утверждена на заседании кафедры математического моделирования  
протокол № 11 «16» апреля 2018 г.

Заведующий кафедрой математического моделирования акад. РАН,  
д-р физ.-мат. наук, проф. Бабешко В.А.



Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета  
компьютерных технологий и прикладной математики  
протокол № 1 «20» апреля 2018 г.

Председатель УМК факультета  
канд. физ.-мат. наук, доцент Малыхин К.В.



Рецензенты:

Калинчук В.В., д-р физ.-мат. наук, заведующий отделом математики, механики и нанотехнологий Южного научного центра РАН

Уртенев М.Х., д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой прикладной математики КубГУ

## **1 Цели и задачи изучения дисциплины**

### **1.1 Цель освоения дисциплины**

Цели изучения дисциплины определены государственным образовательным стандартом высшего образования и соотнесены с общими целями ООП ВО по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика», в рамках которого преподается дисциплина.

Данная дисциплина ставит своей **целью** изучение методов построения математических моделей на основе уравнений математической физики, овладение аппаратом математической физики и выработку у будущих специалистов теоретических знаний и умений формулировать задачи прикладного исследования в области математической физики и оценивать средства, необходимые для его проведения, получение опыта эффективного применения математических методов в научной деятельности, формирование профессиональных навыков исследователя.

Процесс освоения данной дисциплины направлен на получения необходимого объема теоретических знаний, отвечающих требованиям ФГОС ВО и обеспечивающих успешное проведение магистром профессиональной деятельности, владение методологией формулирования и решения прикладных задач, а также на выработку умений применять на практике методы прикладной математики и информатики. Цели дисциплины соответствуют следующим формируемым компетенциям: ОК-1, ОПК-4, ПК-3.

### **1.2 Задачи дисциплины**

Основные **задачи** дисциплины:

- усвоение идей и методов математической физики, необходимых для решения теоретических и прикладных задач применения дисциплины;
- формирование навыков построения математических моделей, выбора адекватного математического аппарата их исследования, анализа и практической интерпретации полученных математических результатов исследования реальной задачи;
- формирование творческого подхода к моделированию различных процессов; привитие практических навыков использования методов математической физики при решении прикладных задач, анализе и моделировании реальных процессов физики, техники, экологии и др.

### **1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина «Дополнительные главы уравнений математической физики» относится к вариативной части Блока 1 "Дисциплины (модули)" учебного плана подготовки магистра, базируется на знаниях, полученных по стандарту высшего образования, и является необходимой для теоретической подготовки магистров по программе «Математическое моделирование».

Место курса в профессиональной подготовке магистра определяется ролью методов математической физики в формировании высококвалифицированного специалиста в любой области знаний, использующей математические модели. Данная дисциплина является важным звеном в обеспечении магистра знаниями, позволяющими прикладнику успешно вести профессиональную деятельность в сфере разработки

математических моделей решаемых задач, а также обеспечивать полный цикл процесса моделирования. Имеется логическая и содержательно-методическая взаимосвязь с другими частями ООП ВО. Дисциплина «Дополнительные главы уравнений математической физики» связана с дисциплинами: непрерывные математические модели, математические методы представления и анализа моделей, модели механики деформируемого твердого тела, математические модели механики разрушения, модели тепломассопереноса, электрохимическая гидродинамика, интегральные уравнения, моделирование экологических процессов и систем.

Необходимым требованием к «входным» знаниям, умениям и опыту деятельности обучающегося при освоении данной дисциплины, приобретенным в результате освоения предшествующих дисциплин является уверенное владения материалом следующих курсов: уравнения математической физики, дифференциальные уравнения, математический анализ, теория функций комплексного переменного.

#### 1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения курса «Дополнительные главы уравнений математической физики» обучающийся должен обладать:

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
1.	<b>ОК-1</b>	способностью к абстрактному мышлению, анализу, синтезу	<ul style="list-style-type: none"> <li>– понятия и концепции математической физики;</li> <li>– подходы к исследованию уравнений математической физики, лежащие в основе построения эффективных аналитико-численных методов решения задач</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– перевести конкретную прикладную задачу на язык дифференциальных уравнений с частными производными или интегральных уравнений и определить пути ее решения;</li> <li>– использовать современные теории для решения научно-исследовательских и прикладных задач.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– методологией формулирования и решения прикладных задач математической физики;</li> <li>– навыками анализа, сопоставления и обобщения результатов теоретических и практических исследований в предметной области;</li> <li>– навыками построения математических моделей физических процессов.</li> </ul>
2.	<b>ОПК-4</b>	способностью использовать и применять углубленные знания в области прикладной математики и информатики	<ul style="list-style-type: none"> <li>– современные тенденции развития фундаментальных и прикладных исследований в области математической физики;</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– применять методы математической физики к исследованию математической модели и оценки ее адекватности;</li> <li>– содержательно о интер-</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– математической культурой;</li> <li>– основными методами исследования и решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в</li> </ul>

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
			– способы использования современных методов для решения научных и практических задач; – способы использования современных методов для решения научных и практических задач	претировать результаты	частных производных и интегральных уравнений
3	ПК-3	способностью разрабатывать и применять математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения задач научной и проектно-технологической деятельности	– принципы выбора методов и средств изучения математической модели	– использовать тематические информационные ресурсы о результатах современных исследований в области математической физики	– навыками использования пакетов прикладных программ для обеспечения процесса моделирования на основе математической физики

Процесс освоения дисциплины «Дополнительные главы уравнений математической физики» направлен на получения необходимого объема теоретических знаний, отвечающих требованиям ФГОС ВО и обеспечивающих успешное ведение магистром научно-исследовательской деятельности, владение методологией формулирования и решения прикладных задач, а также на выработку умений применять на практике методы прикладной математики и информатики.

## 2. Структура и содержание дисциплины.

### 2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единицы, 72 академических часа (из них 32 аудиторных). Курс «Дополнительные главы уравнений математической физики» состоит из лекционных и лабораторных занятий, сопровождаемых регулярной индивидуальной работой преподавателя со студентами в процессе самостоятельной работы. В конце семестра проводится экзамен. Программой дисциплины предусмотрены 16 часов лекционных и 16 часов лабораторных занятий.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр (часы)		
		1		
<b>Контактная работа (всего)</b>	<b>32,3</b>	<b>32,3</b>		
В том числе:				
Занятия лекционного типа	16	16		
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)	–	–		
Лабораторные занятия	16	16		
<b>Иная контактная работа:</b>				
Контроль самостоятельной работы (КСР)	–	–		
Промежуточная аттестация (ИКР)	0,3	0,3		
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>	<b>13</b>	<b>13</b>		
В том числе:				
Курсовая работа	–	–		
Проработка учебного (теоретического) материала	7	7		
Подготовка к текущему контролю	6	6		
<b>Контроль: экзамен</b>				
Подготовка к экзамену	26,7	26,7		
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>час.</b>	<b>72</b>	<b>72</b>	
	<b>в том числе контактная работа</b>	<b>32,3</b>	<b>32,3</b>	
	<b>зач. ед</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	

## 2.2 Структура дисциплины:

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.  
Разделы дисциплины, изучаемые в 9 семестре

№	Наименование разделов	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа		Внеаудиторная работа	
			Л	ЛР	контроль	СР
1	Некоторые модели, описываемые уравнениями в частных производных	4	2	–	2	–
2	Обобщенные функции. Свертка и преобразование Фурье	10	2	2	4	2
3	Пространства Соболева. Обобщенные решения задач Дирихле и Неймана	10	2	2	4	2
4	Специальные функции в математической физике	12	2	4	4	2
5	Интегральные уравнения. Источники возникновения и приложения интегральных уравнений.	14	4	4	4	2
6	Вариационные задачи в математической физике	10	2	2	4	2

№	Наименование разделов	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа		Внеаудиторная работа	
			Л	ЛР	контроль	СР
7	Нелинейные уравнения. Методы исследования	11,4	2	2	4,7	3
Промежуточная аттестация (ИКР)		0,3	–	–	–	–
<b>Итого:</b>		<b>72</b>	<b>16</b>	<b>16</b>	<b>26,7</b>	<b>13</b>

Примечание: Л – лекции, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента.

### 2.3 Содержание разделов дисциплины:

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Некоторые модели, описываемые уравнениями в частных производных.	Некоторые модели, описываемые уравнениями в частных производных: Уравнение колебаний. Уравнение диффузии. Стационарное уравнение. Уравнение переноса. Уравнения гидродинамики. Уравнения Максвелла. Уравнение Шредингера. Уравнение Клейна – Гордона и уравнение Дирака (2 ч.).	Р
2.	Обобщенные функции. Свертка и преобразование Фурье.	Обобщенные функции. Свертка и преобразование Фурье: Обобщенные функции. Свойства основных и обобщенных функций. Носитель обобщенной функции. Дифференцирование обобщенной функции. Понятие об обобщенных решениях дифференциальных уравнений. Свертки. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Применение преобразования Фурье для нахождения фундаментальных решений (2 ч.).	Опрос по результатам индивидуального задания
3.	Пространства Соболева. Обобщенные решения задач Дирихле и Неймана.	Пространства Соболева. Обобщенные решения задач Дирихле и Неймана. Пространства Соболева и их свойства. Формула интегрирования по частям. След функции и его свойства. Эквивалентные нормы. Интеграл Дирихле. Неравенство Пуанкаре – Фридрихса. Обобщенные и классические решения задач Дирихле и Неймана (2.ч.)	Опрос по результатам индивидуального задания
4.	Специальные функции в математической физике.	Специальные функции: Функции Бесселя (цилиндрические функции): функция Бесселя первого рода; функции Бесселя второго рода. Задача Штурма – Лиувилля для уравнения Бесселя, свойства собственных значений и собственных функций, разложение функций в ряды по функциям Бесселя, соотношения ортогональности. Полиномы Лежандра, рекуррентные формулы. Ортогональность	Опрос по результатам индивидуального задания

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
		полиномов Лежандра. Присоединенные функция. Вычисление нормы для полиномов Лежандра. Решение уравнения Лапласа для шаровой области методом разделения переменных. Сферические функции, соотношения ортогональности, разложение по сферическим функциям (2 ч.).	
5.	Интегральные уравнения. Источники возникновения и приложения интегральных уравнений.	Интегральные уравнения, классификация, сопряженные уравнения. Уравнения Фредгольма I и II рода. Теория Фредгольма для конечномерных операторов и вырожденных ядер. Интегральные уравнения с ядрами общего вида. Уравнения Вольтерра I и II рода. Сведение задачи Коши к интегральному уравнению Вольтерра. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям в области (2 ч.).	Опрос по результатам индивидуального задания; Подготовка презентации (защита группового задания)
6.	Вариационные задачи в математической физике.	Вариационные задачи в математической физике: Дифференцируемые функционалы, вариация функционала, формула для вычисления вариации. Необходимое условие экстремума функционала. Простейшая вариационная задача (задача с закрепленными концами), выражение для вариации, уравнение Эйлера (2 ч.). Интегрирование уравнения Эйлера в некоторых частных случаях. Вторая вариация функционала, достаточные условия экстремума. Некоторые обобщения простейшей задачи: задача с закрепленными концами в случае $n$ неизвестных функций, вычисление вариации функционала (2 ч.).	Опрос по результатам индивидуального задания
7.	Нелинейные уравнения. Методы исследования	Нелинейные уравнения. Методы исследования (вариационные методы, метод возмущений, метод Ньютона – Канторовича). Решения типа бегущей волны. Уравнение Кортевега – Де Фриза. Автомодельные решения нелинейных уравнений (2 ч.).	Подготовка презентации. Защита группового задания



### 2.3.1 Занятия лекционного типа

**Раздел 1.** Некоторые модели, описываемые уравнениями в частных производных: Уравнение колебаний. Уравнение диффузии. Стационарное уравнение. Уравнение переноса. Уравнения гидродинамики. Уравнения Максвелла. Уравнение Шредингера. Уравнение Клейна – Гордона и уравнение Дирака (2 ч.).

**Раздел 2.** Обобщенные функции. Свертка и преобразование Фурье: Обобщенные функции. Свойства основных и обобщенных функций. Носитель обобщенной функции. Дифференцирование обобщенной функции. Понятие об обобщенных решениях дифференциальных уравнений. Свертки. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Применение преобразования Фурье для нахождения фундаментальных решений (2 ч.).

**Раздел 3.** Пространства Соболева. Обобщенные решения задач Дирихле и Неймана. Пространства Соболева и их свойства. Формула интегрирования по частям. След функции и его свойства. Эквивалентные нормы. Интеграл Дирихле. Неравенство Пуанкаре – Фридрихса. Обобщенные и классические решения задач Дирихле и Неймана (2 ч.).

**Раздел 4.** Специальные функции: Функции Бесселя (цилиндрические функции): функция Бесселя первого рода; функции Бесселя второго рода. Задача Штурма – Лиувилля для уравнения Бесселя, свойства собственных значений и собственных функций, разложение функций в ряды по функциям Бесселя, соотношения ортогональности. Полиномы Лежандра, рекуррентные формулы. Ортогональность полиномов Лежандра. Присоединенные функции. Вычисление нормы для полиномов Лежандра. Решение уравнения Лапласа для шаровой области методом разделения переменных. Сферические функции, соотношения ортогональности, разложение по сферическим функциям (2 ч.).

**Раздел 5.** Интегральные уравнения, классификация, сопряженные уравнения. Уравнения Фредгольма I и II рода. Теория Фредгольма для конечномерных операторов и вырожденных ядер. Интегральные уравнения с ядрами общего вида. Уравнения Вольтерра I и II рода. Сведение задачи Коши к интегральному уравнению Вольтерра. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям в области. (2 ч.).

**Раздел 6.** Вариационные задачи в математической физике: Дифференцируемые функционалы, вариация функционала, формула для вычисления вариации. Необходимое условие экстремума функционала. Простейшая вариационная задача (задача с закрепленными концами), выражение для вариации, уравнение Эйлера (2 ч.). Интегрирование уравнения Эйлера в некоторых частных случаях. Вторая вариация функционала, достаточные условия экстремума. Некоторые обобщения простейшей задачи: задача с закрепленными концами в случае  $n$  неизвестных функций, вычисление вариации функционала (2 ч.).

**Раздел 7.** Нелинейные уравнения. Методы исследования (вариационные методы, метод возмущений, метод Ньютона – Канторовича). Решения типа бегущей волны. Уравнение Кортевега – Де Фриза. Автомодельные решения нелинейных уравнений. (2 ч.).

### 2.3.2 Занятия семинарского типа

Учебный план не предусматривает занятий семинарского типа по дисциплине «Дополнительные главы уравнений математической физики».

### 2.3.3 Лабораторные занятия

№ работы	№ раздела дисциплины	Наименование лабораторных работ	Форма текущего контроля
1	2	Обобщенные функции. Свертка и преобразование Фурье	Отчет по ЛР
2	3	Решение задачи Дирихле	Отчет по ЛР
3	4	Специальные функции в математической физике.	Отчет по ЛР
4	4	Приложение специальных функций к решению задач	Отчет по ЛР
5	5	Использование средств Maple при решении интегральных уравнений	Отчет по ЛР
6	5	Решение интегральных уравнений	Отчет по ЛР
7	6	Вариационные задачи	Отчет по ЛР
8	7	Нахождение и визуализация автомодельных решений дифференциальных уравнений в частных производных	Отчет по ЛР

### 2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Учебный план не предусматривает курсовых работ по дисциплине «Дополнительные главы уравнений математической физики».

### 2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
1	Подготовка к текущему контролю, подготовка индивидуальных заданий	<p>1. Жибер, А.В. Уравнения математической физики. Нелинейные интегрируемые уравнения / А.В. Жибер, Р.Д. Муртазина, И.Т. Хабибуллин, А.Б. Шабат. М: Юрайт, 2017. 375 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <a href="https://biblio-online.ru/book/771C984F-6865-4C58-975B-8020A14E00FF">https://biblio-online.ru/book/771C984F-6865-4C58-975B-8020A14E00FF</a>.</p> <p>2. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа / К.Б. Сабитов. М.: Физматлит, 2014. 304 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <a href="https://e.lanbook.com/book/59713">https://e.lanbook.com/book/59713</a>.</p> <p>3. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 2004.</p> <p>4. Юдович, В.И. Математические модели естественных наук / В.И. Юдович. – СПб: Лань, 2011. 335 с. + [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <a href="https://e.lanbook.com/book/689">https://e.lanbook.com/book/689</a>.</p> <p>5. Методические указания по организации и выполнению самостоятельной работы, утвержденные на заседании кафедры математического моделирования факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол № 10 от 30.03.2018</p>

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

## **2.5 Самостоятельное изучение разделов дисциплины**

Целью самостоятельной работы является углубление знаний, полученных в результате аудиторных занятий, выработка навыков индивидуальной работы, закрепление навыков, сформированных во время лабораторных занятий.

Содержание приведенной основной и дополнительной литературы позволяет охватить широкий круг задач и методов математической физики.

**Раздел 1.** Дифференциальные уравнения свободных электрических колебаний. Телеграфное уравнение. Интегрирование телеграфного уравнения по методу Римана. Уравнения газодинамики и теория ударных волн. Метод годографа для уравнений газовой динамики. Уравнение миграции примеси в газообразной среде с учетом диффузии, деградации и гравитационного осаждения. Уравнения Навье – Стокса как простейшая математическая модель динамики вязкой сплошной среды. Постановка основных начально-краевых задач динамики вязкой несжимаемой жидкости.

**Раздел 2.** Пространства обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функций. Пространства обобщенных функций медленного роста. Структура обобщенных функций с точечным носителем. Разложение  $\delta$ -функции в ряд Фурье. Применение  $\delta$ -функции для построения функции источника. Обобщенные постановки первой, второй и третьей краевых задач для уравнения Пуассона с неоднородными краевыми условиями в классе решений с первыми производными из  $L$ .

**Раздел 3.** Пространства Соболева. Формула интегрирования по частям. Теоремы вложения. Интегральное представление функции из пространства Соболева. Преобразование Фурье и преобразование Лапласа обобщенных функций. Операционное исчисление. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов. Обобщенное решение задачи Коши для уравнения акустики.

**Раздел 4.** Цилиндрические функции. Свойства функций Бесселя: поведение в нуле, на бесконечности, рекуррентные соотношения для функций Бесселя. Модифицированные функции Бесселя, основные свойства. Ортогональные многочлены, многочлены Лежандра. Гармонические полиномы и сферические функции. Примеры применения сферических функций. Многочлены Чебышева, Эрмита, Лагерра, присоединенные полиномы Лежандра.

**Раздел 5.** Метод возмущений решения уравнения Фредгольма II рода. Решение уравнения Фредгольма II рода методом резольвент. Решение уравнения Фредгольма II рода с вырожденным ядром. Решение уравнения Вольтерра II рода с разностным ядром, сведение уравнения Вольтерра II рода с разностным ядром к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Метод возмущений решения уравнения

Вольтерра II рода. Решение уравнения Вольтерра II рода с помощью резольвент. Применение преобразования Лапласа к решению интегральных уравнений. Уравнения Больцмана, Ландау и Власова. Интегральное уравнение Абеля.

**Раздел 6.** Вариационные задачи в математической физике. Вариационная задача для интеграла энергии и задача Дирихле, необходимые условия экстремума; функционалы, зависящие от производных высших порядков, вычисление вариации, необходимые условия экстремума; вариационные задачи со свободными концами, вычисление вариации функционала, необходимые условия экстремума.

**Раздел 7.** Вариационная формулировка нелинейного уравнения. Метод наискорейшего спуска. Метод Галеркина – Петрова для нелинейных уравнений. Метод Рунге. Нелинейное уравнение Шредингера. Вывод уравнения Кортевега – Де Фриза. Уравнение  $\sin$ -Гордона. Уравнение Буссинеска. Уравнение Уизема.

### 3. Образовательные технологии

С точки зрения применяемых методов используются как традиционные информационно-объяснительные лекции, так и интерактивная подача материала в виде слайд-лекций. Компьютерные технологии в данном случае обеспечивают возможность разнопланового отображения алгоритмов и демонстрационного материала. Такое сочетание позволяет оптимально использовать отведенное время и раскрывать логику и содержание дисциплины.

Семестр	Вид занятия	Используемые интерактивные образовательные технологии		Общее количество часов
1	Л	Слайд-лекции. Обсуждение сложных и дискуссионных вопросов.		4
		№	Тема	количество часов
		1	Некоторые модели, описываемые уравнениями в частных производных	2
	2	Специальные функции в математической физике.	2	
	ЛР	Компьютерные занятия в режимах взаимодействия «преподаватель – студент» и «студент – студент»		4
<b>Итого</b>				8

Цель *лекции* – обзор методов построения математических моделей на основе уравнений математической физики, знакомство с проблемами и аппаратом математической физики. На лекциях студенты получают общее представление о подходах и методах исследования и решения задач математической физики.

Цель *лабораторного занятия* – научить применять теоретические знания при решении и исследовании конкретных задач. Лабораторные занятия проводятся в компьютерных классах, при этом практикуется работа в группах.

Темы, задания и вопросы для самостоятельной работы призваны сформировать навыки поиска информации, умения самостоятельно расширять и углублять знания, полученные в ходе лекционных и лабораторных занятий.

Подход разбора конкретных ситуаций широко используется как преподавателем, так и студентами при проведении анализа результатов самостоятельной работы. Это обусловлено тем, что в процессе моделирования часто встречаются задачи, для которых

единых подходов не существует. Каждая конкретная задача при своем моделировании (исследовании) имеет множество подходов, а это требует разбора и оценки целой совокупности конкретных ситуаций. Этот подход особенно широко используется при определении адекватности математической модели и результатов моделирования на отдельных этапах.

Применяемая технология коллективного взаимодействия в виде организованного диалога, реализует коллективный способ обучения.

Групповые индивидуальные задания формируют навыки исследовательской работы в коллективе.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

#### **4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

Учебная деятельность проходит в соответствии с графиком учебного процесса. Процесс самостоятельной работы контролируется во время аудиторных занятий и индивидуальных консультаций. Самостоятельная работа студентов проводится в форме изучения отдельных теоретических вопросов по предлагаемой литературе.

Фонд оценочных средств дисциплины состоит из средств текущего контроля (см. список лабораторных работ, задач и вопросов) и промежуточной аттестации (экзамена).

В качестве оценочных средств, используемых для текущего контроля успеваемости, предлагается перечень вопросов, которые прорабатываются в процессе освоения курса. Данный перечень охватывает все основные разделы курса, включая знания, получаемые во время самостоятельной работы. Кроме того, важным элементом технологии является самостоятельное решение студентами и сдача заданий. Это полностью индивидуальная форма обучения. Студент рассказывает свое решение преподавателю, отвечает на дополнительные вопросы.

Оценка успеваемости осуществляется по результатам: самостоятельного выполнения лабораторных работ, устного опроса при сдаче выполненных самостоятельных заданий, индивидуальных лабораторных заданий и защиты групповых заданий, ответа на экзамене (для выявления знания и понимания теоретического материала дисциплины, контроля ОК-1). Проверка индивидуальных заданий и устный опрос по их результатам позволяет проверить компетенции ОК-1, ОПК-4, ПК-3. Существенным элементом образовательных технологий является не только умение студента найти решение поставленной задачи, но и донести его до всей аудитории. Защита групповых заданий проводится в виде представления результатов (средствами MS Office) и их обсуждения и служит контролем для проверки ОПК-4, ПК-3.

#### **Соответствие компетенций, формируемых при изучении дисциплины, и видов занятий**

Перечень компетенций	Виды занятий				Формы контроля
	Л.	Лаб.	КР	СРС	
<b>ОК-1</b>	+			+	– Защита реферата; – Защита группового задания
<b>ОПК-4</b>	+	+		+	– Защита реферата – Опрос по результатам выполнения индивидуальных

Перечень компетенций	Виды занятий				Формы контроля
	Л.	Лаб.	КР	СРС	
					заданий; – Опрос по результатам самостоятельной работы; – Защита группового задания
<b>ПК-3</b>	+	+		+	– Защита реферата – Опрос по результатам выполнения индивидуальных заданий; – Опрос по результатам самостоятельной работы; – Защита группового задания

#### 4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля

**Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы**

##### Примерные задания на лабораторные работы

**Раздел 2. Обобщенные функции. Свертка и преобразование Фурье**

**Примеры заданий:** ( $\theta$  – функция Хевисайда)

- 1) Вычислить производную  $\theta(a - |x|)$ .
- 2) Вычислить производную  $\text{sign} \sin x$ .
- 3) Вычислить в  $D'(\mathbb{R}^2)$   $e^x \delta(t) * \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2t)}$ .
- 4) Вычислить преобразования Фурье функции  $\theta(x - a)$ .
- 5) Вычислить преобразования Фурье функции  $\theta(x)x^k$ .

**Раздел 3. Решение задачи Дирихле**

**Примеры заданий:**

- 1) Решить задачу Дирихле в круге  $r \leq a$ :  $\Delta u = 0$ ,  $u|_{r=a} = (x^4 - y^4)|_{r=a}$ .
- 2) Найти функцию  $u(x, y)$ , для которой  $\Delta u = x^2 - y^2$  при  $r < a$  и  $u|_{r=a} = 0$ .
- 3) В полуплоскости  $\{(x, y), y \geq 0\}$  решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в классе ограниченных функций,  $u|_{y=0} = \sin x$ . Для этого, воспользоваться преобразованием Фурье по  $x$ .
- 4) В круге единичного радиуса решить задачу Дирихле  $u(x, y)|_{x^2+y^2=1} = 2x^2 - x - y$ .

5) В кольце  $0 < a \leq r \leq b < +\infty$  найти такую функцию  $u(x, y)$ , что  $\Delta u = 0, u|_{r=a} = 1, \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=b} = \cos^2 b$ .

**Раздел 4.** Специальные функции в математической физике. Решение задач с использованием средств Maple (одно индивидуальное задание и одно групповое).

**Примеры заданий:**

1) Разложить функцию  $f(x)$  на интервале  $(-1, 1)$  в ряд Фурье по полиномам Лежандра, если  $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq 0; \\ 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$

2) Разложить функцию  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{b^2}$  на отрезке  $[0, b]$  в ряд по функциям задачи  $\frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \lambda r R = 0, 0 < r < a, R(0) = O(1), R(a) = 0$ .

3) Разложить функцию  $f(x) = 1$  в ряд по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля  $\frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0, y(a) = 0, y(0) = O(1)$ .

4) Разложить функцию  $f(x) = a^2 - x^2$  в ряд по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля  $\frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0, y(a) = 0, y(0) = O(1)$ .

5) На круглую мембрану, закрепленную по краю, действует внешняя гармоническая сила  $q(x, t) = A \rho \sin \omega t$ , непрерывно распределенная по всей площади мембраны. Проверить, что вынужденные колебания мембраны выражаются равенством ( $R$  – радиус мембраны)

$$u = \frac{A}{\omega^2} \left[ \frac{J_0 \left( \frac{\omega}{v} r \right)}{J_0 \left( \frac{\omega}{v} R \right)} - 1 \right] \sin \omega t .$$

6) Цилиндр радиуса  $a$  нагрет до температуры  $T_0$  и охлаждается с поверхности таким образом, что ее температура, начиная с момента  $t=0$ , поддерживается постоянной и равной нулю. Найти закон распределения температуры, считая, что распределение температуры во всех поперечных сечениях одинаково.

7) Решить уравнение колебаний круглой мембраны, закрепленной по контуру  $\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, u|_{r=b} = 0$ , при начальных условиях  $u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 1 - \frac{r^2}{b^2}$ .

8) Найти температуру круглого бесконечного цилиндра радиуса  $a$  при условии, что на его поверхности поддерживается температуру, равная нулю, а начальная температура равна  $u|_{t=0} = U_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$ .

9) Рассмотреть задачу об обтекании шара радиуса  $a$  потоком идеальной жидкости, движущейся относительно шара со скоростью  $u$  в направлении отрицательной оси  $z$  (Представить потенциал скоростей в виде суммы  $U = U_1 + U_2$ , где  $U_1$  – потенциал потока в отсутствии шара,  $U_1 = -uz$ ,  $U_2$  – потенциал возмущенного потока).

10) Изучить осесимметричные колебания круглой мембраны радиуса  $a$ , вызываемые ударным импульсом  $P$ , приложенный в момент  $t=0$  и распределенным по площади круга радиуса  $\varepsilon$ . Начальные условия имеют вид

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} v_0 = \frac{P}{\pi\varepsilon^2\rho}, & 0 \leq r < \varepsilon; \\ 0, & \varepsilon < r \leq a. \end{cases}$$

**Раздел 5.** Интегральные уравнения. Решение интегральных уравнений с использованием средств Maple (одно индивидуальное задание и одно групповое)

**Примеры заданий:**

1) Решить уравнение  $\varphi(x) = x^2 + 2 \int_0^1 (1+3xy)\varphi(y) dy$

2) Найти собственные числа и собственные функции однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 + y^2)\varphi(y) dy$

3) Проверить, является ли данная функция  $\varphi(x) = xe^x$  решением уравнения с разностным ядром  $\varphi(x) = e^x \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-y)\varphi(y) dy$ .

4) Решить интегральное уравнение Вольтерры  $\varphi(x) = e^{-x} + \int_0^x \sin(x-y)\varphi(y) dy$ .

5) Решить уравнение разложением в ряд по степеням параметра  $\lambda$   $u(x) - \lambda \int_0^x u(y) dy = 1, x \in [0, \infty)$ .

6) Найти с погрешностью, не превосходящей  $10^{-3}$ , решение интегрального уравнения  $u(x) - 0.1 \int_0^1 \sin(xy)u(y) dy = x$ .

7) Доказать, что уравнение второго рода  $u(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos y u(y) dy = f(x)$  однозначно разрешимо для всех  $\lambda$  и  $f(x) \in L_1(0, 2\pi)$ . Найти это решение.

8) Решить интегральное уравнение  $u(x) - \int_0^x e^{y-x} u(y) dy = x, x \in [0, \infty)$ .

9) Решить уравнение  $\varphi(x) - 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\varphi(y) dy = 2x - \pi$ .

10) Решить уравнение разложением в ряд по степеням параметра  $\lambda$   $u(x) - \int_0^1 e^{yx} u(y) dy = 1, 0 \leq x \leq 1$ .

**Раздел 6.** Вариационные задачи. Решение вариационных задач в среде Maple (индивидуальное задание).

**Примеры заданий:** Найти экстремаль функционала. Исследовать найденную экстремаль на достаточные условия и построить ее график



- 1)  $J[y] = \int_{-1}^1 (x^2 + y^2 + y'^2) dx, \begin{cases} y(-1) = 1; \\ y(1) = 2. \end{cases}$
- 2)  $J[z] = \iint_D (2xyz + z_x^2 + z_y^2) dx dy, D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ 0 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{100}.$
- 3)  $J[z] = \iint_D (2xyz + z^2 + z_x^2 + 4z_y^2) dx dy, D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ -1 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x+y^2}{100}.$
- 4)  $J[z] = \iint_D (2yz + z_x^2 + 3z_y^2) dx dy, D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ 0 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x^2}{100} + \frac{y}{50}$
- 5)  $J[z] = \iint_D (2yz \sin x + z_x^2 + 5z_y^2) dx dy, D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ 0 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x^2}{200} - \frac{y}{100}.$

**Раздел 7. Нахождение и визуализация автомодельных решений дифференциальных уравнений в частных производных средствами Maple (Работа в группах)**

**Примеры заданий:**

- 1) Найти автомодельное решение нелинейного уравнения теплопроводности  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)$  с точечным начальным условием  $u(x,0) = \delta(x)$ ;
- 2) Найти автомодельное решение уравнения Бюргера  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$  с сосредоточенным начальным условием  $u(x,0) = \delta(x)$ ;
- 3) Найти решение уравнения Бюргера типа бегущей волны  $u(x,t) = f(\xi), f(\xi) = x - Vt$ ;
- 4) Найти решение уравнения Кортевега – де Фриза, описывающего волны в плазме, на мелкой воде и пр.,  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + 6u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = 0$ , типа бегущей волны  $u(x,t) = f(\xi), f(\xi) = x - Vt$ ;
- 5) Найти решение в виде бегущей волны уравнения sin-Гордона  $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \sin u(x,y)$ , удовлетворяющее условиям  $u(x,0) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty, u(x,0) \rightarrow 2\pi$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

**Примерные темы рефератов**

1. Уравнения газодинамики и теория ударных волн.
2. Уравнение миграции примеси в газообразной среде с учетом диффузии, деградации и гравитационного осаждения.
3. Уравнения Навье – Стокса как простейшая математическая модель динамики вязкой сплошной среды.
4. Модели механики деформированного твердого тела.
5. Начально-краевые задачи динамики вязкой несжимаемой жидкости.
6. Гиперболические уравнения общего вида. Сопряжённые операторы. Функция Римана.
7. Разрывные решения уравнения газовой динамики. Законы сохранения на разрыве.
8. Уравнения Навье – Стокса.
9. Нелинейные уравнения. Уравнение Кортевега – Де Фриза

10. Автомодельные решения нелинейных уравнений.
11. Уравнения мелкой воды и Буссинеска.
12. Уравнения Максвелла.
13. Волны на мелкой воде. Уравнение Бюргерса.
14. Уравнения движения деформируемого твердого тела в форме Коши и Ламе.
15. Уравнения Клейна – Гордона, Паули, Дирака.

#### 4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Основные требования к результатам освоения дисциплины представлены в таблице в виде признаков сформированности компетенций. Требования формулируются по двум уровням: пороговый и повышенный и в соответствии со структурой, принятой в ФГОС ВО: знать, уметь, владеть.

Название компетенции (или ее части)	Структура компетенции	Основные признаки сформированности компетенции
<b>ОК-1</b> способностью к абстрактному мышлению, анализу, синтезу	Знать: понятия и концепции математической физики; подходы к исследованию уравнений математической физики, лежащие в основе построения аналитико-численных методов решения задач	Знает основные понятия и модели математической физики: классификацию уравнений, постановки задач, приводит примеры моделей.
		Знает основные подходы к решению задач математической физики.
		Знает свойства специальных функций, используемых при решении задач математической физики.
		Имеет представление об обобщенных функциях и обобщенных решениях задач математической физики
	Уметь: перевести конкретную прикладную задачу на язык дифференциальных уравнений с частными производными или интегральных уравнений и определить пути ее решения	Умеет ставить задачи и их исследовать корректность.
		Умеет использовать основные методы исследования и решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений.
Владеть: методологией формулирования и решения прикладных задач математической физики, навыками построения математических моделей физических процессов	Владеет методами построения моделей физических процессов на основе уравнений математической физики.	

Название компетенции (или ее части)	Структура компетенции	Основные признаки сформированности компетенции
<p><b>ОПК-4</b> способностью использовать и применять углубленные знания в области прикладной математики и информатики</p>	<p><b>Знать:</b> современные тенденции развития фундаментальных и прикладных исследований в области матфизики; Знает современные проблемы анализа и принципы выбора методов и средств изучения математической модели</p>	<p>Знает основные направления развития современной математической физики; Имеет представление о современных проблемах математической физики; Знает основные электронные и печатные источники, публикующие результаты исследований в области математической физики и ее приложений;</p>
	<p><b>Уметь:</b> использовать тематические информационные ресурсы о результатах современных исследований в области математической физики; применять знание современных методов к построению и анализу моделей на основе математической физики</p>	<p>Может выбрать методы исследования и решения поставленной задачи; Умеет производить верификацию модели; Может анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты; Умеет анализировать и обобщать известные результаты.</p>
	<p><b>Владеть:</b> математической культурой; навыками использования результатов теоретических исследований и компьютерных технологий анализа моделей математической физики; основными методами исследования и решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений</p>	<p>Владеет навыками грамотного логичного построения доказательства; Владеет основными методами исследования и решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений.</p>
<p><b>ПК-3</b> способностью разрабатывать и применять математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения задач</p>	<p><b>Знать:</b> принципы выбора методов и средств изучения математической модели</p>	<p>Знает принципы выбора методов и средств изучения математической модели</p>
	<p><b>Уметь:</b> использовать тематические информационные ресурсы о результатах современных исследований в области математической физики</p>	<p>Умеет использовать тематические ресурсы по математической физики</p>

Название компетенции (или ее части)	Структура компетенции	Основные признаки сформированности компетенции
научной и проектно-технологической деятельности	Владеть: навыками использования пакетов прикладных программ для обеспечения процесса моделирования на основе математической физик	Владеет инструментарием математического пакета Maple для решения уравнений в частных производных, вариационных задач и интегральных уравнений

### Примерный перечень вопросов, выносимых на экзамен

1. Вывод уравнения диффузии. Уравнение миграции примеси в газообразной среде с учетом диффузии, деградации и гравитационного осаждения.
2. Уравнения Максвелла.
3. Уравнение Шредингера для осциллятора и атома водорода.
4. Вывод уравнений гидродинамики и акустики.
5. Разрывные решения уравнений аэродинамики. Ударные волны.
6. Уравнения Навье-Стокса как простейшая математическая модель динамики вязкой сплошной среды.
7. Основные и обобщенные функции. Пространство обобщенных функций. Носитель обобщенных функций.
8. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста.
9. Обобщенные производные в смысле Соболева.
10. Обобщенные решения классических задач для уравнений эллиптического типа.
11. Схема применения преобразования Фурье для нахождения фундаментальных решений.
12. Разделение переменных в задаче о круглой мембране. Функции Бесселя. Свойства.
13. Решение уравнения Лапласа для шаровой области методом разделения переменных. Сферические функции, соотношения ортогональности, разложение по сферическим функциям.
14. Уравнения Фредгольма I и II рода. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с ядрами общего вида. Уравнения Вольтерры I и II рода.
15. Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям.
16. Вариационные методы, первая вариационная задача.
17. Вариационные методы, вторая вариационная задача.
18. Вариационные методы. Метод Ритца.
19. Нелинейные уравнения. Методы Ньютона – Канторовича.
20. Понятие автомодельности. Автомодельные подстановки для уравнения теплопроводности.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

### **Методические рекомендации к сдаче экзамена**

Экзамен является заключительным этапом процесса формирования компетенции студента при изучении дисциплины или ее части и имеет целью проверку и оценку знаний студентов по теории и применению полученных знаний, умений и навыков при решении практических задач. Экзамены проводятся по расписанию, сформированному учебным отделом и утвержденному проректором по учебной работе, в сроки, предусмотренные календарным графиком учебного процесса. Расписание экзаменов доводится до сведения студентов не менее чем за две недели до начала экзаменационной сессии. Экзамены принимаются преподавателями, ведущими лекционные занятия. В отдельных случаях при большом количестве групп у одного лектора или при большой численности группы с разрешения заведующего кафедрой допускается привлечение в помощь основному лектору преподавателя, проводившего практические занятия в группах.

Экзамены проводятся в устной форме. Экзамен проводится только при предъявлении студентом зачетной книжки и при условии выполнения всех контрольных мероприятий, предусмотренных учебным планом и рабочей программой по изучаемой дисциплине. Студентам на экзамене предоставляется право выбрать один из билетов. Время подготовки к ответу составляет 60 минут. По истечении установленного времени студент должен ответить на вопросы экзаменационного билета и предоставить решение задач. Результаты экзамена оцениваются по четырехбалльной системе («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно») и заносятся в экзаменационную ведомость и зачетную книжку. В зачетную книжку заносятся только положительные оценки.

### **Критерии выставления оценок**

Оценка *«отлично»*:

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины, а также по основным вопросам, выходящим за пределы учебной программы;
- точное использование научной терминологии систематически грамотное и логически правильное изложение ответа на вопросы;
- безупречное владение инструментарием учебной дисциплины, умение его эффективно использовать в постановке и решении научных и практических задач;
- выраженная способность самостоятельно и творчески решать сложные проблемы и нестандартные ситуации;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной учебной программой по дисциплине;

- умение ориентироваться в теориях, концепциях и направлениях дисциплины и давать им критическую оценку, используя научные достижения других дисциплин;
- творческая самостоятельная работа на практических занятиях, активное участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий;
- высокий уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.

Оценка *«хорошо»*:

- достаточно полные и систематизированные знания по дисциплине;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях дисциплины и давать им критическую оценку;
- использование научной терминологии, лингвистически и логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- владение инструментарием по дисциплине, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- усвоение основной литературы, рекомендованной учебной программой по дисциплине;
- самостоятельная работа на практических занятиях, участие в групповых обсуждениях, средний уровень культуры исполнения заданий;
- средний уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.

Оценка *«удовлетворительно»*:

- достаточный минимальный объем знаний по дисциплине;
- усвоение основной литературы, рекомендованной учебной программой;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по дисциплине и давать им оценку;
- использование научной терминологии, стилистическое и логическое изложение ответа на вопросы, умение делать выводы без существенных ошибок;
- владение инструментарием учебной дисциплины, умение его использовать в решении типовых задач;
- умение под руководством преподавателя решать стандартные задачи;
- работа под руководством преподавателя на практических занятиях, допустимый уровень культуры исполнения заданий;
- достаточный минимальный уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.

Оценка *«неудовлетворительно»*:

- фрагментарные знания по дисциплине;
- отказ от ответа;
- знание отдельных источников, рекомендованных учебной программой по дисциплине;
- неумение использовать научную терминологию;
- наличие грубых ошибок;
- низкий уровень культуры исполнения заданий;
- низкий уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.

## **5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

### **5.1 Основная литература:**

6. Жибер, А.В. Уравнения математической физики. Нелинейные интегрируемые уравнения / А.В. Жибер, Р.Д. Муртазина, И.Т. Хабибуллин, А.Б. Шабат. М: Юрайт, 2017. 375 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://biblio-online.ru/book/771C984F-6865-4C58-975B-8020A14E00FF>.

7. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2013. 352 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59660>.

8. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа / К.Б. Сабитов. М.: Физматлит, 2014. 304 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59713>.

9. Треногин В.А. Уравнения в частных производных / В.А. Треногин, И.С. Недосекина. М.: Физматлит, 2013. 228 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59744>.

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах.

### **5.2 Дополнительная литература:**

1. Алдошин, Г.Т. Теория линейных и нелинейных колебаний / Г.Т. Алдошин. – СПб: Лань, 2013. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/4640>.

2. Голоскоков, Д.П. Курс математической физики с использованием пакета MAPLE / Д.П. Голоскоков. – СПб: Лань, 2015. 575 с. + [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/67461>.

3. Ильин, А.М. Уравнения математической физики. Москва: Физматлит, 2009. 192 с. + [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2181>.

4. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 2004.

5. Хренников А.Ю. Современный р-адический анализ и математическая физика: Теория и приложения / А.Ю. Хренников, В.М. Шелкович. Москва: Физматлит, 2012. 452 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/5299>.

6. Юдович, В.И. Математические модели естественных наук / В.И. Юдович. – СПб: Лань, 2011. 335 с. + [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/689>.

### **5.3. Периодические издания:**

1. Доклады АН РФ. ISSN 0869-5652.
2. Доклады АН высшей школы России. ISSN 1727-2769
3. Математическое моделирование. ISSN 0234-0879.

## **6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. Russian Journal of Mathematical Physics // МАИК «Наука / Interperiodika». <http://pleiades.online.ru/journal/mathphys>
2. Letters in Mathematical Physics // Kluwer. <https://link.springer.com/journal/11005>
3. Мир математических уравнений EqWorld. <http://eqworld.ipmnet.ru/library.htm>
4. Физика, химия, математика. <http://www.ph4s.ru/index.html>

5. Journal of Mathematical Physics. Online ISSN 1089-7658. <http://jmp.aip.org>
6. Russian Journal of Mathematical Physics. Online ISSN 1555-6638. <http://www.maik.ru/cgi-perl/journal.pl?lang=rus&name=mathphys>.

## 7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной систематизированный материал и лабораторных занятий, на которых студенты применяют полученные теоретические знания к решению конкретных задач. Уровень усвоения теоретического материала проверяется посредством опроса по основным вопросам темы и результатам выполнения индивидуальных и групповых лабораторных заданий.

Важнейшим этапом курса является самостоятельная работа по дисциплине. Перечень разделов для самостоятельного изучения приведен в разделе 2.5.

### Перечень вопросов для самоподготовки

1. Приведите основные постановки задач для волнового уравнения.
2. Приведите основные постановки задач для уравнения диффузии.
3. Что называется сверткой функций?
4. Дайте определение носителя обобщенной функции.
5. Что называется прямым произведением обобщенных функций?
6. Какие функции называются специальными функциями? Приведите примеры специальных функций.
7. Запишите уравнение Бесселя индекса  $n$ .
8. Какие специальные функции называются сферическими?
9. Напишите уравнение, решениями которого являются сферические функции Лежандра?
10. Как определяются функции Лежандра второго рода?
11. Как связаны между собой любые два решения уравнения Лежандра?
12. Какая функция является производящей для системы полиномов Лежандра?
13. Приведите примеры применения производящей функции для полиномов Лежандра.
14. Получите рекуррентные формулы для полиномов Лежандра.
15. Сформулируйте задачу Штурма – Лиувилля, связанную с полиномами Лежандра.
16. Дайте определение интегральному уравнению Фредгольма второго рода.
17. Приведите общий вид уравнения Фредгольма первого рода.
18. Какое интегральное уравнение называется регулярным? Сингулярным?
19. Приведите решение интегрального уравнения Вольтерры второго рода с разностным ядром.
20. Какое ядро называется вырожденным? Приведите примеры.
21. Дайте определение собственных значений и собственных функций интегрального уравнения?
22. Что называется резольвентой интегрального уравнения?
23. Укажите связь между разрешимостью однородного и неоднородного интегральных уравнений Фредгольма.
24. Какие задачи решает вариационное исчисление? Приведите примеры вариационных задач.
25. Что называется функционалом? Приведите примеры функционалов.
26. Что называется вариацией аргумента функционала? Что называется вариацией функционала?
27. Сформулируйте простейшую вариационную задачу.
28. Дайте определение экстремума функционала.
29. Что такое сильный (слабый) экстремум?
30. Какие функции называют линейно независимыми?



31. Дайте определение полноты системы функций.
32. Какое условие называют условием стационарности функционала?
33. Приведите формулу для вариации функционала в случае простейшей вариационной задачи.
34. Перечислите известные подходы к решению нелинейных уравнений.
35. Запишите уравнение Бюргерса и найдите его решение в виде бегущей волны.

### Примерные задачи для самостоятельной работы

1. Принадлежит ли функция  $u(x) \equiv 1, x \in (-1, 1)$  пространству  $H^1(-1, 1)$ ?
2. Выяснить, при каких  $n, s, \alpha$  ( $\alpha > -n$ ) функция  $u(x) \equiv |x|^\alpha$  принадлежит пространству  $H^s(B_1)$ , где  $B_1$  – шар радиуса 1 с центром в точке  $0 \in \mathbb{R}^n$ .
3. Разделение переменных уравнения Шредингера в ортогональных системах координат.
4. Разделить переменные стационарного уравнения Шредингера в сферических координатах.
5. Найти функцию Грина двумерного волнового уравнения (Выполнить преобразование Лапласа по времени).
6. Вычислить производную  $\text{sign} \cos x$ .
7. Найти все производные функции  $y(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$
8. Показать, что  $\delta^{(m)}(x-a) * f(x) = f^{(m)}(x-a)$ .
9. Какому пункту удовлетворяет дельта-функция в обобщенном смысле ( $\theta$  – функция Хевисайда)?
10. а)  $\theta'(x) = \delta(x)$ ;      б)  $\theta(0) = \delta(x)$ ;      в)  $\theta''(x) = \delta(x)$ ;      г)  $\int_0^x \theta(x) dx = \delta(x)$ .
11. Вычислить в  $D'(\mathbb{R}^2)$   $\theta(t)\delta(t) * \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2t)}$ .
12. Вычислить преобразования Фурье следующих функций: а)  $\delta^{(k)}(x), k = 1, 2$ ;      б)  $\text{sign} x$ ;
13. На границе бесконечного цилиндра радиуса  $R$  температура осциллирует как  $T(t) = T_0 \sin \omega t$ . Найти распределение температуры в цилиндре как функцию времени. Исследовать решение при  $\omega \ll \frac{\chi}{R^2}$ , где  $\chi$  – теплопроводность.
14. В круге единичного радиуса решить задачу Дирихле  $u(x, y)|_{x^2+y^2=1} = 2(x^2 + y)$ .
15. Найти собственные частоты  $\omega$  колебаний шара радиуса  $R$ :  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0$ , при условии  $\frac{\omega R}{c} \ll 1$ .
16. Показать, что уравнение Шредингера для двумерного «атома водорода» в электрическом поле  $F - \frac{1}{2} \Delta \psi - \frac{\psi}{\sqrt{x^2 + y^2}} + Fy\psi = E\psi$  допускает разделение переменных в координатах  $x = \xi\eta, y = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}$ . Найти уровни энергии  $E$ .
17. Доказать, что если  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , то  $\frac{1}{x}(f(x) - f(0)) \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

18. Построить функцию Грина двумерного уравнения Шредингера  $i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi$ , где  $\psi(r, 0) = g(r)$ .
19. Решить уравнение  $\frac{\partial u}{\partial t} - C \frac{\partial u}{\partial x} + i\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$  с точечным граничным условием  $u(0, t) = \delta(t)$  и нулевыми начальными (Выполнить преобразование Лапласа по времени).
20. Найти преобразование Фурье следующих обобщенных функций:
21. а)  $\delta(r - r_0)$ ,  $r = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ ;      б)  $\frac{\sin(r_0 |x|)}{|x|}$ ,  $r = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ .
22. Найти обратные преобразование Фурье следующих обобщенных функций:
23. а)  $\frac{1}{|\alpha|^2}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ ;      б)  $\frac{1}{|\alpha|^2 + k^2}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^3$ .
24. Пользуясь результатом 13 б) найти фундаментальное решение уравнения  $\Delta u - k^2 u = 0$ .
25. Проверить, что функция  $-\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$ , где  $r = |x|$ , является фундаментальным решением уравнения Гельмгольца  $\Delta u + k^2 u = 0$  в  $\mathbb{R}^3$ .
26. Написать разложение по сферическим функциям плотности поверхностных зарядов, индуцированных на проводящей сфере точечным зарядом.
27. Найти автомодельное решение уравнения теплопроводности, если  $u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$
28. Найти автомодельное решение модифицированного уравнения Бюргерса  $\frac{\partial u}{\partial t} + u^p \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , где  $p \in \mathbb{N}$ ,  $u(x, 0) = \delta(x)$ .

Поиск информации для ответов на вопросы для самостоятельной работы и выполнения заданий в некоторых случаях предполагает не только изучение основной учебной литературы, но и привлечение дополнительной литературы, а также использование ресурсов сети Интернет.

В рамках самостоятельной работы студент готовит реферативную работу, объемом не менее 10 страниц. Каждый студент выполняет работу по одной теме.

Для написания реферата необходимо подобрать литературу. Общее количество литературных источников, включая тексты из Интернета, (публикации в журналах), должно составлять не менее 10 наименований. Учебники, как правило, в литературные источники не входят.

Рефераты выполняют на листах формата А4. Страницы текста, рисунки, формулы нумеруют, рисунки снабжают подрисовочными надписями. Текст следует печатать шрифтом № 14 с интервалом между строками в 1,5 интервала, без недопустимых сокращений. В конце реферата должны быть сделаны выводы.

В конце работы приводят список использованных источников.

Реферат должен быть подписан магистрантом с указанием даты ее оформления.

Работы, выполненные без соблюдения перечисленных требований, возвращаются на доработку.

Выполненная магистрантом работа определяется на проверку преподавателю в установленные сроки. Если у преподавателя есть замечания, работа возвращается и после исправлений либо вновь отправляется на проверку, если исправления существенные, либо предъявляется на экзамене, где происходит ее защита.

Примерные темы рефератов представлены в п. 4.1.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

### **8.1 Перечень информационных технологий**

- Проверка индивидуальных заданий и консультирование посредством электронной почты.
- Использование электронных презентаций при проведении лекционных и лабораторных занятий.
- Использование математических пакетов при проведении лабораторных занятий.

### **8.2 Перечень необходимого программного обеспечения**

1. Операционная система MS Windows.
2. Интегрированное офисное приложение MS Office.
3. Программное обеспечение для организации управляемого коллективного и безопасного доступа в Интернет.
4. Математические пакеты Matlab (Comsol)

### **8.3 Перечень информационных справочных систем:**

- Электронная библиотечная система "Юрайт" (<http://www.biblio-online.ru>).
- Электронная библиотечная система "Университетская библиотека ONLINE" (<http://www.biblioclub.ru>).
- Электронная библиотечная система издательства "Лань" (<http://e.lanbook.com>).
- База данных Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU <https://elibrary.ru/>
- База данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) РАН <http://www2.viniti.ru/>
- Базы данных и аналитические публикации «Университетская информационная система РОССИЯ» <https://uisrussia.msu.ru/>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины и оснащённость
1.	Лекционные занятия	Лекционная аудитория, оснащённая презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук), соответствующим программным обеспечением, а также необходимой мебелью (доска, столы, стулья). (аудитории: 129, 131, 133, А305, А307).
2.	Лабораторные занятия	Компьютерный класс, укомплектованный компьютерами с лицензионным программным обеспечением, необходимой мебелью (доска, столы, стулья). (аудитории: 101, 102, 106, 106а, 105/1, 107(2), 107(3),

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины и оснащенность
		107(5), А301).
3.	Групповые (индивидуальные) консультации	Аудитория для семинарских занятий, групповых и индивидуальных консультаций, укомплектованные необходимой мебелью (доска, столы, стулья). (аудитория: 129, 131).
4.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Аудитория для семинарских занятий, текущего контроля и промежуточной аттестации, укомплектованная необходимой мебелью (доска, столы, стулья) (аудитории: 129, 131, 133, А305, А307, 147, 148, 149, 150, 100С, А301б, А512), компьютерами с лицензионным программным обеспечением и выходом в интернет (10б, 10ба, А301)
5.	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения, обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета, необходимой мебелью (доска, столы, стулья). (Аудитория 102а, читальный зал).

Осуществление учебного процесса предполагает наличие необходимого для реализации данной программы перечня материально-технического обеспечения: аудитории, оборудованные видеопроекторным оборудованием для презентаций (цифровой проектор, экран, ноутбук) и необходимой мебелью (доска, столы, стулья); компьютерные классы с компьютерной техникой с лицензионным программным обеспечением и необходимой мебелью (доска, столы, стулья) для проведения занятий.

Магистранты и преподаватели вуза имеют постоянный доступ к электронному каталогу учебной, методической, научной литературе, периодическим изданиям и архиву статей.