

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кубанский государственный университет»
Факультет компьютерных технологий и прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе,
качеству образования – первый
проректор
Хагуров Т.А.
подпись



«02» июня 2026 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.07 Дополнительные главы уравнений
математической физики

Направление подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) Математическое моделирование в естествознании
и технологиях

Форма обучения очная

Квалификация магистр

Краснодар 2026

Рабочая программа дисциплины «Дополнительные главы уравнений математической физики» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Программу составил:

Павлова А.В., д-р физ.-мат. наук, доцент, проф. кафедры математического моделирования КубГУ



Рабочая программа дисциплины «Дополнительные главы уравнений математической физики» утверждена на заседании кафедры математического моделирования

протокол № 11 от «12» мая 2026 г.

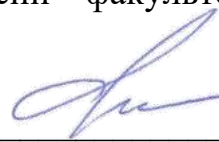
Заведующий кафедрой (разработчика)
д-р физ.-мат. наук, проф. Бабешко В.А.

акад. РАН,



Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета компьютерных технологий и прикладной математики
протокол № 03 от «15» мая 2026 г.

Председатель УМК факультета Добровольская Н.Ю.



ПОДПИСЬ

Рецензенты:

Калинчук В.В., д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, заведующий отделом математики, механики и нанотехнологий Южного научного центра РАН

Уртенев М.Х., д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики КубГУ

1 Цели и задачи изучения дисциплины

1.1 Цель освоения дисциплины

Цели изучения дисциплины определены государственным образовательным стандартом высшего образования и соотнесены с общими целями ООП ВО по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика», в рамках которого преподается дисциплина.

Данная дисциплина ставит своей **целью** изучение методов построения математических моделей на основе уравнений математической физики, овладение аппаратом математической физики и выработку у будущих специалистов теоретических знаний и умений формулировать задачи прикладного исследования в области математической физики и оценивать средства, необходимые для его проведения, получение опыта эффективного применения математических методов в научной деятельности, формирование профессиональных навыков исследователя.

Процесс освоения данной дисциплины направлен на получения необходимого объема теоретических знаний, отвечающих требованиям ФГОС ВО и обеспечивающих успешное проведение магистром профессиональной деятельности, владение методологией формулирования и решения прикладных задач, а также на выработку умений применять на практике методы прикладной математики и информатики. Цели дисциплины соответствуют следующим формируемым компетенциям: ОПК-1, ОПК-2, ПК-1.

1.2 Задачи дисциплины

Основные **задачи** дисциплины:

- усвоение идей и методов математической физики, необходимых для решения теоретических и прикладных задач применения дисциплины;
- формирование навыков построения математических моделей, выбора адекватного математического аппарата их исследования, анализа и практической интерпретации полученных математических результатов исследования реальной задачи;
- формирование творческого подхода к моделированию различных процессов; привитие практических навыков использования методов математической физики при решении прикладных задач, анализе и моделировании реальных процессов физики, техники, экологии и др.

1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дополнительные главы уравнений математической физики» относится к обязательной части Блока 1 "Дисциплины (модули)" учебного плана подготовки магистра, базируется на знаниях, полученных по стандарту высшего образования, и является необходимой для теоретической подготовки магистров по программе «Математическое моделирование в естествознании и технологиях».

Место курса в профессиональной подготовке магистра определяется ролью методов математической физики в формировании высококвалифицированного специалиста в любой области знаний, использующей математические модели. Данная дисциплина является важным звеном в обеспечении магистра знаниями, позволяющими прикладнику успешно вести профессиональную деятельность в сфере разработки математических моделей решаемых задач, а также обеспечивать полный цикл процесса моделирования. Имеется логическая и содержательно-методическая взаимосвязь с другими частями ООП ВО.

Данная дисциплина тесно связана с такими дисциплинами, как «математический анализ», «дифференциальные уравнения», «уравнения математической физики».

Материал курса предназначен для использования в следующих дисциплинах: «Спецсеминар», «Современные методы обработки сигналов», «Модели механики деформируемого твердого тела», «Моделирование экологических процессов и систем».

Результаты изучения курса также могут быть использованы при прохождении производственной практики и выполнении выпускной квалификационной работы.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся общепрофессиональных и профессиональных компетенций:

ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики

Знать ИОПК-1.2 (А/01.6 Зн.1) Методы и приемы формализации задач при решении актуальных задач фундаментальной и прикладной математики

Уметь ИОПК-1.4 (D/01.6 У.2) Вырабатывать варианты реализации требований при решении актуальных задач фундаментальной и прикладной математики
ИОПК-1.5 (D/01.6 У.3) Проводить оценку и обоснование рекомендуемых решений задач фундаментальной и прикладной математики
ИОПК-1.6 (А/01.6 У.1) Использовать методы и приемы формализации задач фундаментальной и прикладной математики

Владеть ИОПК-1.10 (D/01.6 Тд.4) Оценка и согласование сроков выполнения поставленных задач фундаментальной и прикладной математики

ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач

Знать ИОПК-2.2 (D/29.7 Зн.9) Управление качеством при реализации новых математических методов решения прикладных задач: контрольные списки, верификация, валидация (приемо-сдаточные испытания)
ИОПК-2.3 (А/01.6 Зн.1) Методы и приемы алгоритмизации поставленных прикладных задач

Уметь ИОПК-2.8 (D/01.6 У.3) Проводить оценку и обоснование рекомендуемых решений, совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач

Владеть ИОПК-2.9 (D/29.7 Тд.1) Определение стандартов в области качества, которым необходимо следовать при выполнении работ по реализации новых математических методов решения прикладных задач

ПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики

Знать ИПК-1.1 (D/29.7 Зн.8) Современный отечественный и зарубежный опыт в решении актуальных и значимых задач фундаментальной и прикладной математики
ИПК-1.2 (А/01.6 Зн.1) Методы и приемы формализации задач фундаментальной и прикладной математики

Уметь ИПК-1.3 (D/01.6 У.1) Проводить анализ исполнения требований при решении задач фундаментальной и прикладной математики
ИПК-1.4 (А/01.6 У.1) Использовать методы и приемы формализации актуальных и значимых задач фундаментальной и прикладной математики

Владеть ИПК-1.11 (D/04.7 Тд.5) Ответы на вопросы и предложения участников аналитической группы проекта при решении задач фундаментальной и прикладной математики

Результаты обучения по дисциплине достигаются в рамках осуществления всех видов контактной и самостоятельной работы обучающихся в соответствии с утвержденным учебным планом.

Код компетенции	Формулировка компетенции		
ОПК-1	Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики		
ИОПК-1.2 (А/01.6 Зн.1) Методы и приемы формализации задач при решении актуальных задач фундаментальной и прикладной математики ИОПК-1.4 (D/01.6 У.2) Вырабатывать варианты реализации требований при решении актуальных задач фундаментальной и прикладной математики ИОПК-1.5 (D/01.6 У.3) Проводить оценку и обоснование рекомендуемых решений задач фундаментальной и прикладной математики ИОПК-1.6 (А/01.6 У.1) Использовать методы и приемы формализации задач фундаментальной и прикладной математики ИОПК-1.10 (D/01.6 Тд.4) Оценка и согласование сроков выполнения поставленных задач фундаментальной и прикладной математики	Знает	– основные понятия и модели и методы математической физики; – математические формулировки основных понятий и утверждений – специфику задач решаемых с помощью уравнений математической физики	
	Умеет	– перевести задачу на язык дифференциальных уравнений с частными производными. – выбирать и анализировать методы решения поставленной задачи и средства программного обеспечения (в том числе специализированного) для их реализации; – формулировать и содержательно интерпретировать результаты решения задач	
	Владет	– основной терминологией и понятийным аппаратом; основными аналитическими и численными методами решения уравнений в частных производных; – навыками доказательства основных утверждений	
ОПК-2	Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач		
ИОПК-2.2 (D/29.7 Зн.9) Управление качеством при реализации новых математических методов решения прикладных задач: контрольные списки, верификация, валидация (приемосдаточные испытания) ИОПК-2.3 (А/01.6 Зн.1) Методы и приемы алгоритмизации поставленных прикладных задач ИОПК-2.8 (D/01.6 У.3) Проводить оценку и обоснование рекомендуемых решений, совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач ИОПК-2.9 (D/29.7 Тд.1) Определение стандартов в области качества, которым необходимо следовать при выполнении работ по реализации новых математических методов решения прикладных задач	Знает	– математические модели основных приложений теории дифференциальных уравнений – основные методы решения задач математической физики – основные прикладные пакеты, используемые для решения уравнений в частных производных.	
	Умеет	– находить решения: общие для основных типов дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка; – использовать электронные тематические ресурсы для углубления знаний по изучаемой дисциплине	
	Владет	– навыками решения задачи и интерпретации результатов в терминах прикладной области; – научно-методическим аппаратом теории дифференциальных уравнений; – навыками построения простейших моделей процессов – методами исследования моделей процессов	

ПК-1	Способен формулировать и решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики		
ИПК-1.1 (D/29.7 Зн.8) Современный отечественный и зарубежный опыт в решении актуальных и значимых задач фундаментальной и прикладной математики ИПК-1.2 (A/01.6 Зн.1) Методы и приемы формализации задач фундаментальной и прикладной математики ИПК-1.3 (D/01.6 У.1) Проводить анализ исполнения требований при решении задач фундаментальной и прикладной математики ИПК-1.4 (A/01.6 У.1) Использовать методы и приемы формализации актуальных и значимых задач фундаментальной и прикладной математики ИПК-1.11 (D/04.7 Тд.5) Ответы на вопросы и предложения участников аналитической группы проекта при решении задач фундаментальной и прикладной математики	Знает	– математические модели основных приложений теории дифференциальных уравнений – основные методы решения задач математической физики – основные прикладные пакеты, используемые для решения уравнений в частных производных.	
	Умеет	– находить решения: общие для основных типов дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка; – использовать электронные тематические ресурсы для углубления знаний по изучаемой дисциплине	
	Владеет	– навыками решения задачи и интерпретации результатов в терминах прикладной области; – научно-методическим аппаратом теории дифференциальных уравнений; – навыками построения простейших моделей процессов – методами исследования моделей процессов	

Процесс освоения дисциплины «Дополнительные главы уравнений математической физики» направлен на получения необходимого объема теоретических знаний, отвечающих требованиям ФГОС ВО и обеспечивающих успешное ведение магистром научно-исследовательской деятельности, владение методологией формулирования и решения прикладных задач, а также на выработку умений применять на практике методы прикладной математики и информатики.

2. Структура и содержание дисциплины.

2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зач. ед., (108 часов), их распределение по видам работ представлено в таблице

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр (часы)
		1
Контактная работа, в том числе	28,3	28,3
Аудиторные занятия (всего):		
Занятия лекционного типа	14	14
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)	–	–
Лабораторные занятия	14	14
Иная контактная работа:		
Контроль самостоятельной работы (КРП)	–	–
Промежуточная аттестация (ИКР)	0,3	0,3
Самостоятельная работа, в том числе:	53	53
Курсовая работа	–	–

Вид учебной работы		Всего часов	Семестр (часы)
			1
Проработка учебного (теоретического) материала		40	10
Подготовка к текущему контролю		13	40
Контроль: экзамен			
Подготовка к экзамену		26,7	26,7
Общая трудоемкость	час.	108	108
	в том числе контактная работа	28,3	28,3
	зач. ед	3	3

2.2 Структура дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы (темы) дисциплины, изучаемые в 1 семестре

№	Наименование разделов	Количество часов			
		Всего	Аудиторная работа		Внеаудиторная работа
			Л	ЛР	
1	Некоторые модели, описываемые уравнениями в частных производных	3	2	–	1
2	Обобщенные функции. Свертка и преобразование Фурье	10	2	2	6
3	Пространства Соболева. Обобщенные решения задач Дирихле и Неймана	12	2	2	8
4	Специальные функции в математической физике	16	2	4	10
5	Интегральные уравнения. Источники возникновения и приложения интегральных уравнений.	14	2	2	10
6	Вариационные задачи в математической физике	12	2	2	8
7	Нелинейные уравнения. Методы исследования	14	2	2	10
Контроль самостоятельной работы (КРП)		–	–	–	–
Промежуточная аттестация (ИКР)		0,3	–	–	–
Подготовка к текущему контролю		26,7	–	–	–
Общая трудоемкость по дисциплине:		108	14	14	53

Примечание: Л – лекции, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента.

2.3 Содержание разделов (тем) дисциплины

2.3.1 Занятия лекционного типа

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1.	Некоторые	Некоторые модели, описываемые уравнениями в	Р

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
	модели, описываемые уравнениями в частных производных.	частных производных: Уравнение колебаний. Уравнение диффузии. Стационарное уравнение. Уравнение переноса. Уравнения гидродинамики. Уравнения Максвелла. Уравнение Шредингера. Уравнение Клейна – Гордона и уравнение Дирака (2 ч.).	
2.	Обобщенные функции. Свертка и преобразование Фурье.	Обобщенные функции. Свертка и преобразование Фурье: Обобщенные функции. Свойства основных и обобщенных функций. Носитель обобщенной функции. Дифференцирование обобщенной функции. Понятие об обобщенных решениях дифференциальных уравнений. Свертки. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Применение преобразования Фурье для нахождения фундаментальных решений (2 ч.).	Опрос по результатам индивидуального задания
3.	Пространства Соболева. Обобщенные решения задач Дирихле и Неймана.	Пространства Соболева. Обобщенные решения задач Дирихле и Неймана. Пространства Соболева и их свойства. Формула интегрирования по частям. След функции и его свойства. Эквивалентные нормы. Интеграл Дирихле. Неравенство Пуанкаре – Фридрихса. Обобщенные и классические решения задач Дирихле и Неймана (2 ч.).	Опрос по результатам индивидуального задания
4.	Специальные функции в математической физике.	Специальные функции: Функции Бесселя (цилиндрические функции): функция Бесселя первого рода; функции Бесселя второго рода. Задача Штурма – Лиувилля для уравнения Бесселя, свойства собственных значений и собственных функций, разложение функций в ряды по функциям Бесселя, соотношения ортогональности. Полиномы Лежандра, рекуррентные формулы. Ортогональность полиномов Лежандра. Присоединенные функции. Вычисление нормы для полиномов Лежандра. Решение уравнения Лапласа для шаровой области методом разделения переменных. Сферические функции, соотношения ортогональности, разложение по сферическим функциям (2 ч.).	Опрос по результатам индивидуального задания
5.	Интегральные уравнения. Источники возникновения и приложения интегральных уравнений.	Интегральные уравнения, классификация, сопряженные уравнения. Уравнения Фредгольма I и II рода. Теория Фредгольма для конечномерных операторов и вырожденных ядер. Интегральные уравнения с ядрами общего вида. Уравнения Вольтерра I и II рода. Сведение задачи Коши к интегральному уравнению Вольтерра. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям в области (2 ч.).	Опрос по результатам индивидуального задания; Подготовка презентации (защита группового задания)
6.	Вариационные задачи в	Вариационные задачи в математической физике: Дифференцируемые функционалы, вариация	Опрос по результатам индивидуального

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
	математической физике.	функционала, формула для вычисления вариации. Необходимое условие экстремума функционала. Простейшая вариационная задача (задача с закрепленными концами), выражение для вариации, уравнение Эйлера Интегрирование уравнения Эйлера в некоторых частных случаях. Вторая вариация функционала, достаточные условия экстремума. Некоторые обобщения простейшей задачи: задача с закрепленными концами в случае n неизвестных функций, вычисление вариации функционала (2 ч.).	задания
7.	Нелинейные уравнения. Методы исследования	Нелинейные уравнения. Методы исследования (вариационные методы, метод возмущений, метод Ньютона – Канторовича). Решения типа бегущей волны. Уравнение Кортевега – Де Фриза. Автомодельные решения нелинейных уравнений (2 ч.).	Подготовка презентации. Защита группового задания

2.3.2 Занятия семинарского типа

Учебный план не предусматривает занятий семинарского типа по дисциплине «Дополнительные главы уравнений математической физики».

2.3.3 Лабораторные занятия

№ работы	№ раздела дисциплины	Наименование лабораторных работ	Форма текущего контроля
1	2	Обобщенные функции. Свертка и преобразование Фурье	Отчет по ЛР
2	3	Решение задачи Дирихле	Отчет по ЛР
3	4	Специальные функции в математической физике.	Отчет по ЛР
4	4	Приложение специальных функций к решению задач	Отчет по ЛР
5	5	Использование средств Maple при решении интегральных уравнений	Отчет по ЛР
6	5	Решение интегральных уравнений	Отчет по ЛР
7	6	Вариационные задачи	Отчет по ЛР
8	7	Нахождение и визуализация автомодельных решений дифференциальных уравнений в частных производных	Отчет по ЛР

2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Учебный план не предусматривает курсовых работ по дисциплине «Дополнительные главы уравнений математической физики».

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	Подготовка к текущему контролю, подготовка индивидуальных заданий	1. Жибер, А.В. Уравнения математической физики. Нелинейные интегрируемые уравнения / А.В. Жибер, Р.Д. Муртазина, И.Т. Хабибуллин, А.Б. Шабат. М: Юрайт, 2017. 375 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://biblio-online.ru/book/771C984F-6865-4C58-975B-8020A14E00FF. 2. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа / К.Б. Сабитов. М.: Физматлит, 2014. 304 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/59713. 3. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 2004. 4. Юдович, В.И. Математические модели естественных наук / В.И. Юдович. – СПб: Лань, 2011. 335 с. + [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/689. 5. Методические указания по организации и выполнению самостоятельной работы, утвержденные на заседании кафедры математического моделирования факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол № 10 от 30.03.2018

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

3. Образовательные технологии

Программа по дисциплине «Уравнения математической физики» предусматривает использование в учебном процессе следующих образовательных технологий: чтение лекций с использованием мультимедийных технологий; работа над индивидуальными заданиями с использованием пакетов прикладных программ, разбор конкретных ситуаций на практических занятиях.

Компьютерные технологии предоставляют средства разнопланового отображения алгоритмов и демонстрационного материала.

Подход разбора конкретных ситуаций широко используется как преподавателем, так и бакалаврами во время лекций и анализа результатов самостоятельной работы. Это обусловлено тем, что в процессе моделирования часто встречаются задачи, для которых единых подходов не существует. При исследовании и решении каждой конкретной задачи имеется, как правило, несколько методов, а это требует разбора и оценки целой совокупности конкретных ситуаций.

При обучении используются следующие образовательные технологии:

– Технология коммуникативного обучения – направлена на формирование коммуникативной компетентности студентов, которая является базовой, необходимой для адаптации к современным условиям межкультурной коммуникации.

– Технология разноуровневого (дифференцированного) обучения – предполагает осуществление познавательной деятельности студентов с учётом их индивидуальных способностей, возможностей и интересов, поощряя их реализовывать свой творческий потенциал.

– Технология модульного обучения – предусматривает деление содержания дисциплины на достаточно автономные разделы (модули), интегрированные в общий курс.

– Информационно-коммуникационные технологии (ИКТ) – расширяют рамки образовательного процесса, повышая его практическую направленность, способствуют интенсификации самостоятельной работы учащихся и повышению познавательной активности.

– Интернет-технологии – предоставляют широкие возможности для поиска информации, разработки научных проектов, ведения научных исследований.

– Технология индивидуализации обучения – помогает реализовывать личностно-ориентированный подход, учитывая индивидуальные особенности и потребности учащихся.

– Проектная технология – ориентирована на моделирование социального взаимодействия учащихся с целью решения задачи, которая определяется в рамках профессиональной подготовки, выделяя ту или иную предметную область.

– Технология обучения в сотрудничестве – реализует идею взаимного обучения, осуществляя как индивидуальную, так и коллективную ответственность за решение учебных задач.

– Технология развития критического мышления – способствует формированию разносторонней личности, способной критически относиться к информации, умению отбирать информацию для решения поставленной задачи.

Комплексное использование в учебном процессе всех вышеперечисленных технологий стимулируют личностную, интеллектуальную активность, развивают познавательные процессы, способствуют формированию компетенций, которыми должен обладать будущий специалист.

Основные виды интерактивных образовательных технологий включают в себя:

– работа в малых группах (команде) – совместная деятельность студентов в группе под руководством лидера, направленная на решение общей задачи путём творческого сложения результатов индивидуальной работы членов команды с делением полномочий и ответственности;

– анализ конкретных ситуаций – анализ реальных проблемных ситуаций, имевших место в соответствующей области профессиональной деятельности, и поиск вариантов лучших решений;

– развитие критического мышления – образовательная деятельность, направленная на развитие у студентов разумного, рефлексивного мышления, способного выдвинуть новые идеи и увидеть новые возможности.

Подход разбора конкретных задач и ситуаций широко используется как преподавателем, так и студентами во время лекций, лабораторных занятий и анализа результатов самостоятельной работы. Это обусловлено тем, что при исследовании и решении каждой конкретной задачи имеется, как правило, несколько методов, а это требует разбора и оценки целой совокупности конкретных ситуаций.

Семестр	Вид занятия	Используемые интерактивные образовательные технологии		Общее количество часов
1	Л	Слайд-лекции. Обсуждение сложных и дискуссионных вопросов.		4
		№	Тема	количество часов
		1	Некоторые модели, описываемые уравнениями в частных производных	2
		2	Специальные функции в математической физике.	2
	ЛР	Компьютерные занятия в режимах взаимодействия «преподаватель – студент» и «студент – студент»		4
Итого				8

Цель *лекции* – обзор методов построения математических моделей на основе уравнений математической физики, знакомство с проблемами и аппаратом математической физики. На лекциях студенты получают общее представление о подходах и методах исследования и решения задач математической физики.

Цель *лабораторного занятия* – научить применять теоретические знания при решении и исследовании конкретных задач. Лабораторные занятия проводятся в компьютерных классах, при этом практикуется работа в группах.

Темы, задания и вопросы для самостоятельной работы призваны сформировать навыки поиска информации, умения самостоятельно расширять и углублять знания, полученные в ходе лекционных и лабораторных занятий.

Подход разбора конкретных ситуаций широко используется как преподавателем, так и студентами при проведении анализа результатов самостоятельной работы. Это обусловлено тем, что в процессе моделирования часто встречаются задачи, для которых единых подходов не существует. Каждая конкретная задача при своем моделировании (исследовании) имеет множество подходов, а это требует разбора и оценки целой совокупности конкретных ситуаций. Этот подход особенно широко используется при определении адекватности математической модели и результатов моделирования на отдельных этапах.

Применяемая технология коллективного взаимодействия в виде организованного диалога, реализует коллективный способ обучения.

Групповые индивидуальные задания формируют навыки исследовательской работы в коллективе.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

4 Оценочные и методические материалы

4.1 Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины «Дополнительные главы уравнений математической физики».

Оценочные средства включает контрольные материалы для проведения текущего контроля в форме тестовых заданий, доклада-презентации по проблемным вопросам, и промежуточной аттестации в форме вопросов и заданий к экзамену.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

- при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;
- при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;
- при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

Структура оценочных средств для текущей и промежуточной аттестации

№	Контролируемые разделы (темы) дисциплины	компетенции	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	Некоторые модели, описываемые уравнениями в частных производных	ИОПК-1.2 (А/01.6 Зн.1), ИОПК-1.4 (Д/01.6 У.2), ИПК-1.11 (Д/04.7 Тд.5), ИПК-1.4 (А/01.6 У.1), ИПК-1.3 (Д/01.6 У.1), ИПК-1.2 (А/01.6 Зн.1)	УО	ЭВ 1–6
2	Обобщенные функции. Свертка и преобразование Фурье	ИОПК-2.2 (Д/29.7 Зн.9, ИОПК-2.3 (А/01.6 Зн.1), ИОПК-2.9 (Д/29.7 Тд.1)	ПДР, Р	ЭВ 7–9
3	Пространства Соболева. Обобщенные решения задач Дирихле и Неймана.	ИОПК-1.2 (А/01.6 Зн.1), ИОПК-2.3 (А/01.6 Зн.1)	ПДР, Р	ЭВ 9,10
4	Специальные функции в математической физике.	ИОПК-1.6 (А/01.6 У.1), ИПК-1.4 (А/01.6 У.1), ИПК-1.1 (Д/29.7 Зн.8)	ПДР, Р	ЭВ 11–13
5	Интегральные уравнения. Источники возникновения и приложения интегральных уравнений.	ИОПК-1.2 (А/01.6 Зн.1), ИОПК-2.8 (Д/01.6 У.3)	ПДР, Р	ЭВ 14,15
6	Вариационные задачи в математической физике.	ИОПК-1.4 (Д/01.6 У.2), ИПК-1.3 (Д/01.6 У.1), ИПК-1.2 (А/01.6 Зн.1)	ПДР, Р	ЭВ 16–18
7	Нелинейные уравнения. Методы исследования	ИОПК-1.4 (Д/01.6 У.2), ИОПК-1.5 (Д/01.6 У.3), ИОПК-1.10 (Д/01.6 Тд.4),	ПДР	ЭВ 19,20

№	Контролируемые разделы (темы) дисциплины	компетенции	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
		ИОПК-2.8 (D/01.6 У.3), ИОПК-2.9 (D/29.7 Тд.1)		

Показатели, критерии и шкала оценки сформированных компетенций

Код и наименование компетенции	Соответствие уровней освоения компетенции планируемым результатам обучения и критериям их оценивания		
	пороговый	базовый	продвинутый
	оценка		
	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики			
ИОПК-1.2 (А/01.6 Зн.1) Методы и приемы формализации задач при решении актуальных задач фундаментальной и прикладной математики ИОПК-1.4 (D/01.6 У.2) Вырабатывать варианты реализации требований при решении актуальных задач фундаментальной и прикладной математики ИОПК-1.5 (D/01.6 У.3) Проводить оценку и обоснование рекомендуемых решений задач фундаментальной и прикладной математики ИОПК-1.6 (А/01.6 У.1) Использовать методы и приемы формализации задач фундаментальной	<i>Знает:</i> знает основные понятия и модели математической физики: классификацию уравнений; основные подходы к решению задач математической физики; специальные функции; имеет представление об обобщенных функциях. <i>Умеет:</i> ставить задачи; использовать основные методы решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных. <i>Владеет:</i> методами построения моделей физических процессов на основе уравнений математической физики. <i>Студент</i> показывает не достаточный уровень знаний учебного материала, не в полном объеме владеет практическими навыками, чувствует себя неуверенно при анализе модели естест-	<i>Знает:</i> основные понятия и модели математической физики: классификацию уравнений, постановки задач, приводит примеры моделей; основные подходы к решению задач математической физики; свойства специальных функций, используемых при решении задач математической физики; имеет представление об обобщенных функциях и обобщенных решениях задач математической физики. <i>Умеет:</i> ставить задачи и их исследовать корректность; использовать основные методы решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений. <i>Владеет:</i> методами построения моделей физических процессов	<i>Знает:</i> основные понятия и модели математической физики, приводит примеры моделей; основные подходы к решению задач математической физики; свойства специальных функций, используемых при решении задач математической физики; свойства обобщенных функций и обобщенных решениях задач математической физики. <i>Умеет:</i> ставить задачи и их исследовать корректность; использовать основные методы исследования и решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений. <i>Владеет:</i> методами построения и исследования моделей физических процессов на основе уравнений математической

Код и наименование компетенции	Соответствие уровней освоения компетенции планируемым результатам обучения и критериям их оценивания		
	пороговый	базовый	продвинутый
	оценка		
	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
и прикладной математики ИОПК-1.10 (D/01.6 Тд.4) Оценка и согласование сроков выполнения поставленных задач фундаментальной и прикладной математики	веннонаучных процессов. В ответе не всегда присутствует логика, аргументы привлекаются недостаточно веские, показывает недостаточно глубокие знания. Вопросы, задаваемые преподавателем, вызывают затруднения.	на основе уравнений математической физики. <i>Студент</i> показывает достаточный уровень профессиональных знаний, владеет практическими навыками, но допускает некоторые неточности и погрешности. Ответ построен достаточно логично, грамотно используются термины, но в ответе присутствуют незначительные ошибки. Вопросы, задаваемые преподавателем, не вызывают существенных затруднений.	физики. <i>Студент</i> показывает высокий уровень теоретических знаний по дисциплине, свободно владеет практическими навыками, умеет увязывать знания, полученные при изучении различных дисциплин. Ответ, построен логично, материал излагается четко, ясно, аргументировано. На вопросы отвечает уверенно, по существу.
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач			
ИОПК-2.2 (D/29.7 Зн.9) Управление качеством при реализации новых математических методов решения прикладных задач: контрольные списки, верификация, валидация (приемосдаточные испытания)	<i>Знает:</i> имеет представление о современных проблемах математической физики; некоторые электронные и печатные источники, публикующие результаты исследований в области математической физики. <i>Умеет:</i> выбрать методы решения поставленной задачи;	<i>Знает:</i> имеет представление о современных проблемах математической физики; основные электронные и печатные источники, публикующие результаты исследований в области математической физики. <i>Умеет:</i> выбрать методы решения поставленной задачи;	<i>Знает:</i> основные направления развития современной математической физики; имеет представление о современных проблемах математической физики; основные электронные и печатные источники, публикующие результаты исследований в области математической физики;
ИОПК-2.3 (A/01.6 Зн.1) Методы и приемы алгоритмизации поставленных прикладных задач	интерпретировать полученные результаты. <i>Владеет:</i> навыками построения	производить верификацию модели; анализировать и содержательно интерпретировать полученные	приложений. <i>Умеет:</i> выбрать методы исследования и решения поставленной
ИОПК-2.8 (D/01.6			

Код и наименование компетенции	Соответствие уровней освоения компетенции планируемым результатам обучения и критериям их оценивания		
	пороговый	базовый	продвинутый
	оценка		
	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
У.3) Проводить оценку и обоснование рекомендуемых решений, совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач ИОПК-2.9 (D/29.7 Тд.1) Определение стандартов в области качества, которым необходимо следовать при выполнении работ по реализации новых математических методов решения прикладных задач	доказательства; инструментарием математических пакетов (Maple) для решения уравнений в частных производных. <i>Студент</i> показывает не достаточный уровень знаний учебного материала, не в полном объеме владеет практическими навыками, чувствует себя неуверенно при анализе модели естественнонаучных процессов. В ответе не всегда присутствует логика, аргументы привлекаются недостаточно веские, показывает недостаточно глубокие знания. Вопросы, задаваемые преподавателем, вызывают затруднения.	результаты. <i>Владеет:</i> навыками построения доказательства; инструментарием математических пакетов (Maple) для решения уравнений в частных производных, вариационных задач и/или интегральных уравнений. <i>Студент</i> показывает достаточный уровень профессиональных знаний, владеет практическими навыками, но допускает некоторые неточности и погрешности. Ответ построен достаточно логично, грамотно используются термины, но в ответе присутствуют незначительные ошибки. Вопросы, задаваемые преподавателем, не вызывают существенных затруднений.	задачи; производить верификацию модели; анализировать, содержательно интерпретировать и обобщать полученные и известные результаты. <i>Владеет:</i> навыками грамотного логичного построения доказательства; инструментарием математических пакетов (Maple) для решения уравнений в частных производных, вариационных задач и интегральных уравнений. <i>Студент</i> показывает высокий уровень теоретических знаний по дисциплине, свободно владеет практическими навыками, умеет увязывать знания, полученные при изучении различных дисциплин. Ответ, построен логично, материал излагается четко, ясно, аргументировано. На вопросы отвечает уверенно, по существу.
ПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики			
ИПК-1.1 (D/29.7 Зн.8) Современный отечественный и зарубежный опыт в решении актуальных и значимых задач фундаментальной и	<i>Студент</i> показывает не достаточный уровень знаний учебного материала, не в полном объеме владеет практическими	<i>Студент</i> показывает достаточный уровень профессиональных знаний, владеет практическими навыками, но	<i>Студент</i> показывает высокий уровень теоретических знаний по дисциплине, свободно владеет практическими на-

Код и наименование компетенции	Соответствие уровней освоения компетенции планируемым результатам обучения и критериям их оценивания		
	пороговый	базовый	продвинутый
	оценка		
	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
прикладной математики ИПК-1.2 (А/01.6 Зн.1) Методы и приемы формализации задач фундаментальной и прикладной математики ИПК-1.3 (D/01.6 У.1) Проводить анализ исполнения требований при решении задач фундаментальной и прикладной математики ИПК-1.4 (А/01.6 У.1) Использовать методы и приемы формализации актуальных и значимых задач фундаментальной и прикладной математики ИПК-1.11 (D/04.7 Тд.5) Ответы на вопросы и предложения участников аналитической группы проекта при решении задач фундаментальной и прикладной математики	навыками, чувствует себя неуверенно при анализе модели естественнонаучных процессов. В ответе не всегда присутствует логика, аргументы привлекаются недостаточно веские, показывает недостаточно глубокие знания. Вопросы, задаваемые преподавателем, вызывают затруднения.	допускает некоторые неточности и погрешности. Ответ построен достаточно логично, грамотно используются термины, но в ответе присутствуют незначительные ошибки. Вопросы, задаваемые преподавателем, не вызывают существенных затруднений.	выками, умеет увязывать знания, полученные при изучении различных дисциплин. Ответ, построен логично, материал излагается четко, ясно, аргументировано. На вопросы отвечает уверенно, по существу.

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Примерные задания на лабораторные работы

Раздел 2. Обобщенные функции. Свертка и преобразование Фурье

Примеры заданий: (θ – функция Хевисайда)

1) Вычислить производную $\theta(a - |x|)$.

2) Вычислить производную $\text{sign} \sin x$.

3) Вычислить в $D'(\mathbb{R}^2)$ $e^x \delta(t) * \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2 t)}$.

4) Вычислить преобразования Фурье функции $\theta(x - a)$.

5) Вычислить преобразования Фурье функции $\theta(x)x^k$.

Раздел 3. Решение задачи Дирихле

Примеры заданий:

1) Решить задачу Дирихле в круге $r \leq a$: $\Delta u = 0$, $u|_{r=a} = (x^4 - y^4)|_{r=a}$.

2) Найти функцию $u(x, y)$, для которой $\Delta u = x^2 - y^2$ при $r < a$ и $u|_{r=a} = 0$.

3) В полуплоскости $\{(x, y), y \geq 0\}$ решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в классе ограниченных функций, $u|_{y=0} = \sin x$. Для этого, воспользоваться преобразованием Фурье по x .

4) В круге единичного радиуса решить задачу Дирихле $u(x, y)|_{x^2+y^2=1} = 2x^2 - x - y$.

5) В кольце $0 < a \leq r \leq b < +\infty$ найти такую функцию $u(x, y)$, что $\Delta u = 0$, $u|_{r=a} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=b} = \cos^2 b$.

Раздел 4. Специальные функции в математической физике. Решение задач с использованием средств Maple (одно индивидуальное задание и одно групповое).

Примеры заданий:

1) Разложить функцию $f(x)$ на интервале $(-1, 1)$ в ряд Фурье по полиномам Лежандра, если $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq 0; \\ 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$

2) Разложить функцию $f(x) = 1 - \frac{x^2}{b^2}$ на отрезке $[0, b]$ в ряд по функциям задачи $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \lambda r R = 0$, $0 < r < a$, $R(0) = O(1)$, $R(a) = 0$.

3) Разложить функцию $f(x) = 1$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля $\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0$, $y(a) = 0$, $y(0) = O(1)$.

4) Разложить функцию $f(x) = a^2 - x^2$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля $\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0$, $y(a) = 0$, $y(0) = O(1)$.

5) На круглую мембрану, закрепленную по краю, действует внешняя гармоническая сила $q(x, t) = A \rho \sin \omega t$, непрерывно распределенная по всей площади мембраны. Проверить, что вынужденные колебания мембраны выражаются равенством (R – радиус мембраны)

$$u = \frac{A}{\omega^2} \left[\frac{J_0 \left(\frac{\omega}{v} r \right)}{J_0 \left(\frac{\omega}{v} R \right)} - 1 \right] \sin \omega t.$$

6) Цилиндр радиуса a нагрет до температуры T_0 и охлаждается с поверхности таким образом, что ее температура, начиная с момента $t = 0$, поддерживается постоянной и равной нулю. Найти закон распределения температуры, считая, что распределение температуры во всех поперечных сечениях одинаково.

7) Решить уравнение колебаний круглой мембраны, закрепленной по контуру

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad u|_{r=b} = 0, \quad \text{при начальных условиях } u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 1 - \frac{r^2}{b^2}.$$

8) Найти температуру круглого бесконечного цилиндра радиуса a при условии, что на его поверхности поддерживается температура, равная нулю, а начальная температура равна $u|_{t=0} = U_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$.

9) Рассмотреть задачу об обтекании шара радиуса a потоком идеальной жидкости, движущейся относительно шара со скоростью u в направлении отрицательной оси z (Представить потенциал скоростей в виде суммы $U = U_1 + U_2$, где U_1 – потенциал потока в отсутствии шара, $U_1 = -uz$, U_2 – потенциал возмущенного потока).

10) Изучить осесимметричные колебания круглой мембраны радиуса a , вызываемые ударным импульсом P , приложенный в момент $t = 0$ и распределенным по площади круга радиуса ε . Начальные условия имеют вид

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \begin{cases} v_0 = \frac{P}{\pi \varepsilon^2 \rho}, & 0 \leq r < \varepsilon; \\ 0, & \varepsilon < r \leq a. \end{cases}$$

Раздел 5. Интегральные уравнения. Решение интегральных уравнений с использованием средств Maple (одно индивидуальное задание и одно групповое)

Примеры заданий:

1) Решить уравнение $\varphi(x) = x^2 + 2 \int_0^1 (1 + 3xy) \varphi(y) dy$

2) Найти собственные числа и собственные функции однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 + y^2) \varphi(y) dy$

3) Проверить, является ли данная функция $\varphi(x) = xe^x$ решением уравнения с разностным ядром $\varphi(x) = e^x \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-y) \varphi(y) dy$.

4) Решить интегральное уравнение Вольтерры $\varphi(x) = e^{-x} + \int_0^x \sin(x-y) \varphi(y) dy$.

5) Решить уравнение разложением в ряд по степеням параметра λ

$$u(x) - \lambda \int_0^x y u(y) dy = 1, \quad x \in [0, \infty).$$

6) Найти с погрешностью, не превосходящей 10^{-3} , решение интегрального уравнения $u(x) - 0.1 \int_0^1 \sin(xy) u(y) dy = x$.

7) Доказать, что уравнение второго рода $u(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos y u(y) dy = f(x)$ однозначно разрешимо для всех λ и $f(x) \in L_1(0, 2\pi)$. Найти это решение.

8) Решить интегральное уравнение $u(x) - \int_0^x e^{y-x} u(y) dy = x, \quad x \in [0, \infty)$.

9) Решить уравнение $\varphi(x) - 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \varphi(y) dy = 2x - \pi$.

10) Решить уравнение разложением в ряд по степеням параметра λ
 $u(x) - \int_0^1 e^{yx} u(y) dy = 1, 0 \leq x \leq 1$.

Раздел 6. Вариационные задачи. Решение вариационных задач в среде Maple (индивидуальное задание).

Примеры заданий: Найти экстремаль функционала. Исследовать найденную экстремаль на достаточные условия и построить ее график

1) $J[y] = \int_{-1}^1 (x^2 + y^2 + y'^2) dx, \begin{cases} y(-1) = 1; \\ y(1) = 2. \end{cases}$

2) $J[z] = \iint_D (2xyz + z_x^2 + z_y^2) dx dy, D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ 0 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{100}.$

3) $J[z] = \iint_D (2xyz + z^2 + z_x^2 + 4z_y^2) dx dy, D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ -1 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x+y^2}{100}.$

4) $J[z] = \iint_D (2yz + z_x^2 + 3z_y^2) dx dy, D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ 0 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x^2}{100} + \frac{y}{50}$

5) $J[z] = \iint_D (2yz \sin x + z_x^2 + 5z_y^2) dx dy, D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ 0 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x^2}{200} - \frac{y}{100}.$

Раздел 7. Нахождение и визуализация автомодельных решений дифференциальных уравнений в частных производных средствами Maple (Работа в группах)

Примеры заданий:

1) Найти автомодельное решение нелинейного уравнения теплопроводности $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)$ с точечным начальным условием $u(x,0) = \delta(x)$;

2) Найти автомодельное решение уравнения Бюргерса $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$ с сосредоточенным начальным условием $u(x,0) = \delta(x)$;

3) Найти решение уравнения Бюргерса типа бегущей волны $u(x,t) = f(\xi)$, $f(\xi) = x - Vt$;

4) Найти решение уравнения Кортевега – де Фриза, описывающего волны в плазме, на мелкой воде и пр., $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + 6u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = 0$, типа бегущей волны $u(x,t) = f(\xi)$, $f(\xi) = x - Vt$;

5) Найти решение в виде бегущей волны уравнения sin-Гордона $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \sin u(x,y)$, удовлетворяющее условиям $u(x,0) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, $u(x,0) \rightarrow 2\pi$ при $x \rightarrow +\infty$.

Примерные темы рефератов

1. Уравнения газодинамики и теория ударных волн.
2. Уравнение миграции примеси в газообразной среде с учетом диффузии, деградаци и гравитационного осаждения.

3. Уравнения Навье – Стокса как простейшая математическая модель динамики вязкой сплошной среды.
4. Модели механики деформированного твердого тела.
5. Начально-краевые задачи динамики вязкой несжимаемой жидкости.
6. Гиперболические уравнения общего вида. Сопряжённые операторы. Функция Римана.
7. Разрывные решения уравнения газовой динамики. Законы сохранения на разрыве.
8. Уравнения Навье – Стокса.
9. Нелинейные уравнения. Уравнение Кортвега – Де Фриза
10. Автомодельные решения нелинейных уравнений.
11. Уравнения мелкой воды и Буссинеска.
12. Уравнения Максвелла.
13. Волны на мелкой воде. Уравнение Бюргерса.
14. Уравнения движения деформируемого твердого тела в форме Коши и Ламе.
15. Уравнения Клейна – Гордона, Паули, Дирака.

Экзаменационные материалы для промежуточной аттестации (экзамен)

Примерный перечень вопросов, выносимых на экзамен

1. Вывод уравнения диффузии. Уравнение миграции примеси в газообразной среде с учетом диффузии, дегградации и гравитационного осаждения.
2. Уравнения Максвелла.
3. Уравнение Шредингера для осциллятора и атома водорода.
4. Вывод уравнений гидродинамики и акустики.
5. Разрывные решения уравнений аэродинамики. Ударные волны.
6. Уравнения Навье-Стокса как простейшая математическая модель динамики вязкой сплошной среды.
7. Основные и обобщенные функции. Пространство обобщенных функций. Носитель обобщенных функций.
8. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста.
9. Обобщенные производные в смысле Соболева.
10. Обобщенные решения классических задач для уравнений эллиптического типа.
11. Схема применения преобразования Фурье для нахождения фундаментальных решений.
12. Разделение переменных в задаче о круглой мембране. Функции Бесселя. Свойства.
13. Решение уравнения Лапласа для шаровой области методом разделения переменных. Сферические функции, соотношения ортогональности, разложение по сферическим функциям.
14. Уравнения Фредгольма I и II рода. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с ядрами общего вида. Уравнения Вольтерры I и II рода.
15. Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям.
16. Вариационные методы, первая вариационная задача.
17. Вариационные методы, вторая вариационная задача.
18. Вариационные методы. Метод Ритца.
19. Нелинейные уравнения. Методы Ньютона – Канторовича.
20. Понятие автомодельности. Автомодельные подстановки для уравнения теплопроводности.

Перечень компетенций (части компетенции), проверяемых оценочным средством
ОПК-1, ОПК-2, ПК-1.

4.2 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Экзамен является заключительным этапом процесса формирования компетенции студента при изучении дисциплины или ее части и имеет целью проверку и оценку знаний студентов по теории и применению полученных знаний, умений и навыков при решении практических задач. Экзамены проводятся по расписанию, сформированному учебным отделом и утвержденному проректором по учебной работе, в сроки, предусмотренные календарным графиком учебного процесса. Расписание экзаменов доводится до сведения студентов не менее чем за две недели до начала экзаменационной сессии. Экзамены принимаются преподавателями, ведущими лекционные занятия. В отдельных случаях при большом количестве групп у одного лектора или при большой численности группы с разрешения заведующего кафедрой допускается привлечение в помощь основному лектору преподавателя, проводившего практические занятия в группах.

Экзамены проводятся в устной форме. Экзамен проводится только при предъявлении студентом зачетной книжки и при условии выполнения всех контрольных мероприятий, предусмотренных учебным планом и рабочей программой по изучаемой дисциплине. Студентам на экзамене предоставляется право выбрать один из билетов. Время подготовки к ответу составляет 60 минут. По истечении установленного времени студент должен ответить на вопросы экзаменационного билета и предоставить решение задач. Результаты экзамена оцениваются по четырехбалльной системе («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно») и заносятся в экзаменационную ведомость и зачетную книжку. В зачетную книжку заносятся только положительные оценки.

Критерии выставления оценок

Оценка *«отлично»*:

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины, а также по основным вопросам, выходящим за пределы учебной программы;
- точное использование научной терминологии систематически грамотное и логически правильное изложение ответа на вопросы;
- безупречное владение инструментарием учебной дисциплины, умение его эффективно использовать в постановке и решении научных и практических задач;
- выраженная способность самостоятельно и творчески решать сложные проблемы и нестандартные ситуации;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной учебной программой по дисциплине;
- умение ориентироваться в теориях, концепциях и направлениях дисциплины и давать им критическую оценку, используя научные достижения других дисциплин;
- творческая самостоятельная работа на практических занятиях, активное участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий;
- высокий уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.

Оценка *«хорошо»*:

- достаточно полные и систематизированные знания по дисциплине;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях дисциплины и давать им критическую оценку;

- использование научной терминологии, лингвистически и логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- владение инструментарием по дисциплине, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- усвоение основной литературы, рекомендованной учебной программой по дисциплине;
- самостоятельная работа на практических занятиях, участие в групповых обсуждениях, средний уровень культуры исполнения заданий;
- средний уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.

Оценка *«удовлетворительно»*:

- достаточный минимальный объем знаний по дисциплине;
- усвоение основной литературы, рекомендованной учебной программой;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по дисциплине и давать им оценку;
- использование научной терминологии, стилистическое и логическое изложение ответа на вопросы, умение делать выводы без существенных ошибок;
- владение инструментарием учебной дисциплины, умение его использовать в решении типовых задач;
- умение под руководством преподавателя решать стандартные задачи;
- работа под руководством преподавателя на практических занятиях, допустимый уровень культуры исполнения заданий;
- достаточный минимальный уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.

Оценка *«неудовлетворительно»*:

- фрагментарные знания по дисциплине;
- отказ от ответа;
- знание отдельных источников, рекомендованных учебной программой по дисциплине;
- неумение использовать научную терминологию;
- наличие грубых ошибок;
- низкий уровень культуры исполнения заданий;
- низкий уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.

5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

5.1 Основная литература:

1. Жибер, А.В. Уравнения математической физики. Нелинейные интегрируемые уравнения / А.В. Жибер, Р.Д. Муртазина, И.Т. Хабибуллин, А.Б. Шабат. М.: Юрайт, 2017. 375 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://biblio-online.ru/book/771C984F-6865-4C58-975B-8020A14E00FF>.
2. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2013. 352 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59660>.
3. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа / К.Б. Сабитов. М.: Физматлит, 2014. 304 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59713>.
4. Треногин В.А. Уравнения в частных производных / В.А. Треногин, И.С. Недосекина. М.: Физматлит, 2013. 228 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59744>.

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах.

5.2 Дополнительная литература:

1. Алдошин, Г.Т. Теория линейных и нелинейных колебаний / Г.Т. Алдошин. – СПб: Лань, 2013. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/4640>.
2. Голоскоков, Д.П. Курс математической физики с использованием пакета MAPLE / Д.П. Голоскоков. – СПб: Лань, 2015. 575 с. + [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/67461>.
3. Ильин, А.М. Уравнения математической физики. Москва: Физматлит, 2009. 192 с. +. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2181>.
4. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 2004.
5. Хренников А.Ю. Современный р-адический анализ и математическая физика: Теория и приложения / А.Ю. Хренников, В.М. Шелкович. Москва: Физматлит, 2012. 452 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/5299>.
6. Юдович, В.И. Математические модели естественных наук / В.И. Юдович. – СПб: Лань, 2011. 335 с. + [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/689>.

5.3. Периодические издания:

1. Доклады АН РФ. ISSN 0869-5652.
2. Доклады АН высшей школы России. ISSN 1727-2769
3. Математическое моделирование. ISSN 0234-0879.

5.3. Интернет-ресурсы, в том числе современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Электронно-библиотечные системы (ЭБС):

1. ЭБС «ЮРАЙТ» <https://urait.ru/>
2. ЭБС «УНИВЕРСИТЕТСКАЯ БИБЛИОТЕКА ОНЛАЙН» www.biblioclub.ru
3. ЭБС «BOOK.ru» <https://www.book.ru>
4. ЭБС «ZNANIUM.COM» www.znanium.com
5. ЭБС «ЛАНЬ» <https://e.lanbook.com>

Профессиональные базы данных:

1. Scopus <http://www.scopus.com/>
2. Научная электронная библиотека (НЭБ) <http://www.elibrary.ru/>
3. Springer Materials <http://materials.springer.com/>
4. zbMath <https://zbmath.org/>

Ресурсы свободного доступа:

1. Мир математических уравнений EqWorld. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>
2. Физика, химия, математика. <http://www.ph4s.ru/index.html>
3. Journal of Mathematical Physics. Online ISSN 1089-7658. <http://jmp.aip.org>
4. Словари и энциклопедии <http://dic.academic.ru/>;

Собственные электронные образовательные и информационные ресурсы КубГУ:

1. Среда модульного динамического обучения <http://moodle.kubsu.ru>
2. База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций <http://mschool.kubsu.ru/>

5.4 Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Перечень информационных технологий

1. Проверка индивидуальных заданий и консультирование посредством электронной почты.
2. Использование электронных презентаций при проведении лекционных и лабораторных занятий.
3. Использование математических пакетов при выполнении индивидуальных заданий.

Перечень необходимого программного обеспечения

1. Операционная система MS Windows.
2. Интегрированное офисное приложение MS Office.
3. Программное обеспечение для организации управляемого коллективного и безопасного доступа в Интернет.
4. Математический пакет Matlab.

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной систематизированный материал и лабораторных занятий, на которых студенты применяют полученные теоретические знания к решению конкретных задач. Уровень усвоения теоретического материала проверяется посредством опроса по основным вопросам темы и результатам выполнения индивидуальных и групповых лабораторных заданий.

Важнейшим этапом курса является самостоятельная работа по дисциплине. Перечень разделов для самостоятельного изучения приведен в разделе 2.5.

Перечень вопросов для самоподготовки

1. Приведите основные постановки задач для волнового уравнения.
2. Приведите основные постановки задач для уравнения диффузии.
3. Что называется сверткой функций?
4. Дайте определение носителя обобщенной функции.
5. Что называется прямым произведением обобщенных функций?
6. Какие функции называются специальными функциями? Приведите примеры специальных функций.
7. Запишите уравнение Бесселя индекса n .
8. Какие специальные функции называются сферическими?
9. Напишите уравнение, решениями которого являются сферические функции Лежандра?
10. Как определяются функции Лежандра второго рода?
11. Как связаны между собой любые два решения уравнения Лежандра?
12. Какая функция является производящей для системы полиномов Лежандра?
13. Приведите примеры применения производящей функции для полиномов Лежандра.
14. Получите рекуррентные формулы для полиномов Лежандра.
15. Сформулируйте задачу Штурма – Лиувилля, связанную с полиномами Лежандра.
16. Дайте определение интегральному уравнению Фредгольма второго рода.
17. Приведите общий вид уравнения Фредгольма первого рода.
18. Какое интегральное уравнение называется регулярным? Сингулярным?

19. Приведите решение интегрального уравнения Вольтерры второго рода с разностным ядром.
20. Какое ядро называется вырожденным? Приведите примеры.
21. Дайте определение собственных значений и собственных функций интегрального уравнения?
22. Что называется резольвентой интегрального уравнения?
23. Укажите связь между разрешимостью однородного и неоднородного интегральных уравнений Фредгольма.
24. Какие задачи решает вариационное исчисление? Приведите примеры вариационных задач.
25. Что называется функционалом? Приведите примеры функционалов.
26. Что называется вариацией аргумента функционала? Что называется вариацией функционала?
27. Сформулируйте простейшую вариационную задачу.
28. Дайте определение экстремума функционала.
29. Что такое сильный (слабый) экстремум?
30. Какие функции называют линейно независимыми?
31. Дайте определение полноты системы функций.
32. Какое условие называют условием стационарности функционала?
33. Приведите формулу для вариации функционала в случае простейшей вариационной задачи.
34. Перечислите известные подходы к решению нелинейных уравнений.
35. Запишите уравнение Бюргерса и найдите его решение в виде бегущей волны.

Примерные задачи для самостоятельной работы

1. Принадлежит ли функция $u(x) \equiv 1, x \in (-1, 1)$ пространству $H^0_1(-1, 1)$?
2. Выяснить, при каких n, s, α ($\alpha > -n$) функция $u(x) \equiv |x|^\alpha$ принадлежит пространству $H^s(B_1)$, где B_1 – шар радиуса 1 с центром в точке $0 \in \mathbb{R}^n$.
3. Разделение переменных уравнения Шредингера в ортогональных системах координат.
4. Разделить переменные стационарного уравнения Шредингера в сферических координатах.
5. Найти функцию Грина двумерного волнового уравнения (Выполнить преобразование Лапласа по времени).
6. Вычислить производную $\text{sign} \cos x$.
7. Найти все производные функции $y(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$
8. Показать, что $\delta^{(m)}(x-a) * f(x) = f^{(m)}(x-a)$.
9. Какому пункту удовлетворяет дельта-функция в обобщенном смысле (θ – функция Хевисайда)?
10. а) $\theta'(x) = \delta(x)$; б) $\theta(0) = \delta(x)$; в) $\theta''(x) = \delta(x)$; г) $\int_0^x \theta(x) dx = \delta(x)$.
11. Вычислить в $D'(\mathbb{R}^2)$ $\theta(t)\delta(t) * \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$.
12. Вычислить преобразования Фурье следующих функций: а) $\delta^{(k)}(x), k = 1, 2$; б) $\text{sign} x$;

13. На границе бесконечного цилиндра радиуса R температура осциллирует как $T(t) = T_0 \sin \omega t$. Найти распределение температуры в цилиндре как функцию времени.

Исследовать решение при $\omega \ll \frac{\chi}{R^2}$, где χ – температуропроводность.

14. В круге единичного радиуса решить задачу Дирихле $u(x, y)|_{x^2+y^2=1} = 2(x^2 + y)$.

15. Найти собственные частоты ω колебаний шара радиуса R :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad \text{при условии } \frac{\omega R}{c} \ll 1.$$

16. Показать, что уравнение Шредингера для двумерного «атома водорода» в электрическом поле $F - \frac{1}{2} \Delta \psi - \frac{\psi}{\sqrt{x^2 + y^2}} + Fy\psi = E\psi$ допускает разделение переменных в

координатах $x = \xi\eta$, $y = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}$. Найти уровни энергии E .

17. Доказать, что если $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, то $\frac{1}{x}(f(x) - f(0)) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

18. Построить функцию Грина двумерного уравнения Шредингера $i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi$, где $\psi(r, 0) = g(r)$.

19. Решить уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} - C \frac{\partial u}{\partial x} + i\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ с точечным граничным условием $u(0, t) = \delta(t)$ и нулевыми начальными (Выполнить преобразование Лапласа по времени).

20. Найти преобразование Фурье следующих обобщенных функций:

21. а) $\delta(r - r_0)$, $r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^3$; б) $\frac{\sin(r_0 |x|)}{|x|}$, $r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^3$.

22. Найти обратные преобразование Фурье следующих обобщенных функций:

23. а) $\frac{1}{|\alpha|^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$; б) $\frac{1}{|\alpha|^2 + k^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}^3$.

24. Пользуясь результатом 13 б) найти фундаментальное решение уравнения $\Delta u - k^2 u = 0$.

25. Проверить, что функция $-\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$, где $r = |x|$, является фундаментальным решением уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в $\mathbb{R}^3$.

26. Написать разложение по сферическим функциям плотности поверхностных зарядов, индуцированных на проводящей сфере точечным зарядом.

27. Найти автомодельное решение уравнения теплопроводности, если $u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

28. Найти автомодельное решение модифицированного уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^p \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{где } p \in \mathbb{N}, \quad u(x, 0) = \delta(x).$$

Поиск информации для ответов на вопросы для самостоятельной работы и выполнения заданий в некоторых случаях предполагает не только изучение основной учебной литературы, но и привлечение дополнительной литературы, а также использование ресурсов сети Интернет.

В рамках самостоятельной работы студент готовит реферативную работу, объемом не менее 10 страниц. Каждый студент выполняет работу по одной теме.

Для написания реферата необходимо подобрать литературу. Общее количество литературных источников, включая тексты из Интернета, (публикации в журналах), должно составлять не менее 10 наименований. Учебники, как правило, в литературные источники не входят.

Рефераты выполняют на листах формата А4. Страницы текста, рисунки, формулы нумеруют, рисунки снабжают подрисуночными надписями. Текст следует печатать шрифтом № 14 с интервалом между строками в 1,5 интервала, без недопустимых сокращений. В конце реферата должны быть сделаны выводы.

В конце работы приводят список использованных источников.

Реферат должен быть подписан магистрантом с указанием даты ее оформления.

Работы, выполненные без соблюдения перечисленных требований, возвращаются на доработку.

Выполненная магистрантом работа определяется на проверку преподавателю в установленные сроки. Если у преподавателя есть замечания, работа возвращается и после исправлений либо вновь отправляется на проверку, если исправления существенные, либо предъявляется на экзамене, где происходит ее защита.

Примерные темы рефератов представлены в п. 4.1.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

7. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины и оснащенность
1.	Лекционные занятия	Лекционная аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук), соответствующим программным обеспечением, а также необходимой мебелью (доска, столы, стулья). (аудитории: 129, 131, 133, А305, А307).
2.	Лабораторные занятия	Компьютерный класс, укомплектованный компьютерами с лицензионным программным обеспечением, необходимой мебелью (доска, столы, стулья). (аудитории: 101, 102, 106, 106а, 105/1, 107(2), 107(3), 107(5), А301).
3.	Групповые (индивидуальные) консультации	Аудитория для семинарских занятий, групповых и индивидуальных консультаций, укомплектованные необходимой мебелью (доска, столы, стулья). (аудитории: 129, 131).
4.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Аудитория для семинарских занятий, текущего контроля и промежуточной аттестации, укомплектованная необходимой мебелью (доска, столы, стулья) (аудитории: 129, 131, 133, А305, А307, 147, 148, 149, 150, 100С, А301б, А512), компьютерами с лицензионным программным обеспечением и выходом в интернет (106, 106а, А301)
5.	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины и оснащенность
		сети «Интернет», программой экранного увеличения, обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета, необходимой мебелью (доска, столы, стулья). (Аудитория 102а, читальный зал).

Осуществление учебного процесса предполагает наличие необходимого для реализации данной программы перечня материально-технического обеспечения: аудитории, оборудованные видеопроекционным оборудованием для презентаций (цифровой проектор, экран, ноутбук) и необходимой мебелью (доска, столы, стулья); компьютерные классы с компьютерной техникой с лицензионным программным обеспечением и необходимой мебелью (доска, столы, стулья) для проведения занятий.

Магистранты и преподаватели вуза имеют постоянный доступ к электронному каталогу учебной, методической, научной литературе, периодическим изданиям и архиву статей.