

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по учебной работе,
качеству образования – первый
проректор

Хагуров Т.А.
подпись

« 29 » августа 2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)
Б1. О.05. Алгебра и аналитическая геометрия

Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Профиль Современные методы машинного обучения и компьютерного зрения

Форма обучения очная

Квалификация бакалавр

Краснодар 2025

Рабочая программа дисциплины «Алгебра и аналитическая геометрия» составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика профиль Современные методы машинного обучения и компьютерного зрения

Программу составили:

О. В Дорошенко, канд. физ.-мат. наук

Рабочая программа дисциплины «Алгебра и аналитическая геометрия» утверждена на заседании кафедры теории функций протокол №12 от 27.08.2025 г.

Заведующий кафедрой Голуб М.В.

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук протокол № 5 от 28.08.2025 г.

Председатель УМК факультета Шмалько С.П.

Рецензенты:

Фоменко Сергей Иванович, канд. физ. - мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории волновых процессов

Анопко Михаил Викторович, генеральный директор ООО «УК АЙСТРИМ»

1 Цели и задачи изучения дисциплины.

1.1. Цель освоения дисциплины.

Дисциплина направлена на формирование у студентов глубокого понимания фундаментальных концепций линейной алгебры и аналитической геометрии. Основной целью является создание прочной математической базы, позволяющей анализировать и разрабатывать алгоритмы обработки данных, а также развить навыки эффективной программной реализации математических методов с использованием современных инструментов и библиотек. Курс обеспечивает необходимую подготовку для дальнейшего изучения сложных тем в области искусственного интеллекта, способствуя развитию аналитического мышления и способности решать прикладные задачи.

1.2. Задачи дисциплины.

В задачи курса «Алгебра и аналитическая геометрия» входят:

- ✓ подготовка специалистов, способных применять полученные знания для решения прикладных задач, владеющих достаточными знаниями основных теоретических положений курса «Алгебра и аналитическая геометрия»;
- ✓ формирование культуры мышления, способности к анализу, обобщению и восприятию информации, к постановке цели и выбору путей ее достижения;
- ✓ обеспечение математическим аппаратом естественнонаучных, общепрофессиональных и специальных дисциплин;
- ✓ формирование привычки к строгости в формулировки изложения материала, к логически непротиворечивой цепочке выводов и заключений;
- ✓ развитие навыков использования логических символов для сжатой записи рассуждений и теорем;
- ✓ развитие у студентов навыков самообразования.

1.3. Место дисциплины в структуре образовательной программы.

Дисциплина «Алгебра и аналитическая геометрия» относится к базовой части Блока 1 "Дисциплины (модули)" учебного плана.

Данная дисциплина (Алгебра и геометрия) относится к базовой части (Б1) математического и естественнонаучного цикла дисциплин и имеет логическую и содержательно – методическую взаимосвязь с дисциплинами основной образовательной программы. Дисциплина базируется на компетенциях, сформированных на предыдущем уровне образования. Для изучения алгебры и геометрии требуется качественное знание школьного курса алгебры, геометрии, тригонометрии, начал анализа.

Освоение данной дисциплины необходимо обучающемуся для успешного освоения следующих дисциплин: «Алгебра и введение в тензорный анализ», «Численные методы» и др., а также в учебно-исследовательской работе.

Курс «Алгебра и аналитическая геометрия» читается студентам 1-го курса (1-й семестр). Программа рассчитана на студентов, в полной мере освоивших школьный курс математики.

1.4. Профессиональные роли в структуре образовательной программы

Роль 1: Data Engineer (Инженер по данным)

Задачи:

1. Разработка процессов извлечения, преобразования и загрузки (ETL) данных
2. Создание и оптимизация хранилищ данных

3. Обеспечение качества и доступности данных
4. Настройка инфраструктуры для обработки больших данных
5. Интеграция разрозненных источников данных.

Роль 2: ML Engineer (Инженер МО)

Задачи:

1. Реализация ML-моделей в информационных системах
2. Оптимизация производительности и масштабирование моделей
3. Разработка ML-пайплайнов и автоматизация процессов
4. Мониторинг качества моделей в продакшене
5. Интеграция ML-решений с бизнес-приложениями

Роль 3: MLOps (Специалист по эксплуатации ИИ)

Задачи:

1. Разработка процессов извлечения, преобразования и загрузки (ETL) данных
2. Создание и оптимизация хранилищ данных
3. Обеспечение качества и доступности данных
4. Настройка инфраструктуры для обработки больших данных
5. Интеграция разрозненных источников данных

1.5. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций:

Код и наименование индикатора*	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	
ОПК-1.1 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук при построении моделей в заданной предметной области	<p>Знать основные принципы и методы решения задач алгебры матриц и определителей, систем линейных уравнений, алгебраических структур, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, алгебраических многообразий, нормированных пространств</p> <p>Уметь решать задачи в области алгебры матриц и определителей, систем линейных уравнений, алгебраических структур, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, алгебраических многообразий, нормированных пространств</p> <p>Владеть методами доказательств и вывода формулы в области алгебры матриц и определителей, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, основных геометрических образов; методы решений систем линейных уравнений</p>
ОПК-1.2 Применяет фундаментальные зна-	Знать теоретические основы алгебры матриц и определи-

<p>ния, полученные в области математических и (или) естественных наук при выборе методов решения задач профессиональной деятельности</p>	<p>телей, систем линейных уравнений, алгебраических структур, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, алгебраических многообразий, нормированных пространств</p> <p>Уметь</p> <p>выбирать адекватный метод решения задач в области алгебры матриц и определителей, систем линейных уравнений, алгебраических структур, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, алгебраических многообразий, нормированных пространств</p> <p>Владеть</p> <p>инструментарием математического моделирования в области алгебры матриц и определителей, систем линейных уравнений, алгебраических структур, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, алгебраических многообразий, нормированных пространств</p>
--	---

Результаты обучения по дисциплине «Алгебра и аналитическая геометрия» достигаются в рамках осуществления всех видов контактной и самостоятельной работы обучающихся в соответствии с утвержденным учебным планом.

Индикаторы достижения компетенций считаются сформированными при достижении соответствующих им результатов обучения.

2. Структура и содержание дисциплины.

2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ.

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 5 зач.ед. (180 часов), их распределение по видам работ представлено в таблице
(для студентов ОФО).

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры (часы)					
		1					
Контактная работа, в том числе:	108,5	108,5					
Аудиторные занятия (всего):	118	118					
Занятия лекционного типа	52	52					
Лабораторные занятия	50	50					
Иная контактная работа:	6,5	6,5					
Контроль самостоятельной работы (КСР)	6	6					
Промежуточная аттестация (ИКР)	0,5	0,5					
Самостоятельная работа, в том числе:	35,8	35,8					
Проработка учебного (теоретического) материала	35,8	35,8					
Контроль:	35,7	35,7					
Подготовка к экзамену	35,7	35,4					
Общая трудоемкость	час.	180	180				
	в том числе контактная работа	108,5	108,5				
	зач. ед	5	5				

2.2 Структура дисциплины:

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.
Разделы дисциплины, изучаемые в 1 семестре (*очная форма*)

№	Наименование разделов (тем)	Всего	Количество часов			
			Аудиторная работа			Вн-аудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	
1	2	3	4	5	6	7
Раздел 1	Векторы, матрицы и системы линейных уравнений		22		22	14,6
1.	Векторы в R^n . Прямые линии и плоскости.	6		6		
2.	Основы матричной алгебры.	6		6		
3.	Ранг матрицы. Общая теория СЛАУ.	4		4		
4.	Векторная алгебра. Общие уравнения прямой и плоскости	6		6		
Раздел 2	Алгебраические структуры и методы		16		14	12
5.	Комплексные числа	4		4		
6.	Линейные пространства и подпространства	4		4		
7.	Основы абстрактной алгебры: группы, кольца, поля	4		2		

№	Наименование разделов (тем)	Всего	Количество часов			Вне-аудиторная работа
			Аудиторная работа			
			Л	ПЗ	ЛР	
1	2	3	4	5	6	7
8.	Общая теория алгебры полиномов		4		4	
<i>Раздел 3</i>	<i>Геометрия линейных пространств</i>		<i>14</i>		<i>14</i>	<i>9,2</i>
9.	Линейные многообразия и аффинные пространства		4		4	
10.	Алгебраические многообразия		6		6	
11.	Нормированные конечномерные линейные пространства. Ортогональность		4		4	
ИТОГО по разделам дисциплины		137,8	52		50	35,8
Контроль самостоятельной работы (КСР)		6				
Промежуточная аттестация (ИКР)		0,5				
Подготовка к текущему контролю		35,7				
Общая трудоемкость по дисциплине		180				

Примечание: Л – лекции, ПЗ – практические занятия / семинары, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента

Форма проведения аттестации по дисциплине: зачет и экзамен в первом семестре, зачет и экзамен во втором семестре

2.3 Содержание разделов дисциплины:

2.3.1 Занятия лекционного типа.

№	Наименование раздела/темы	Содержание раздела/темы	Форма текущего контроля	
			1	2
<i>Раздел 1. Векторы, матрицы и системы линейных уравнений</i>				
1.	Векторы в R^n . Прямые линии и плоскости.	Понятие вектора как одномерного представления информации, сложение и умножение на скаляр, линейная комбинация, линейная зависимость/независимость, свойства линейной зависимости, теорема о линейной зависимости линейных комбинаций, понятие базиса и размерности линейной оболочки, координаты вектора, связь с СЛАУ, системы координат (декартовая, полярная, цилиндрическая, сферическая), деление отрезка в данном отношении, параметрические уравнения прямой в R^2/R^3 , параметрическое уравнение плоскости, взаимное расположение прямой и плоскости.	K	
2.	Основы матричной	Матрицы как двумерное представление		K

№	Наименование раздела/темы	Содержание раздела/темы	Форма текущего контроля
	алгебры	информации, матрицы признаков, виды матриц, сложение матриц и умножение на скаляр, свойства линейных операций, умножение матриц и возведение матриц в степень, транспонирование матриц, элементарные перобразования матриц, матричное представление СЛАУ, общие понятия СЛАУ, метод Гаусса, Понятие определителя через решение СЛАУ 2 и третьего порядка, определитель n-го порядка, базовые свойства определителей, алгебраические дополнения и миноры, вычисление определителя разложением по строке (столбцу), теорема Лапласа, определитель произведения матриц, теорема Крамера, теорема о линейной зависимости строк квадратной матрицы, понятие обратной матрицы, обращение невырожденной матрицы, свойства обратной матрицы, нахождение обратной матрицы по схеме метода Гаусса, простейшие матричные уравнения, обращение блочно-ступенчатой матрицы,	
3.	Ранг матрицы. Общая теория СЛАУ.	Скелетное разложение матрицы, теорема о размерности линейной оболочки, ранг матрицы, теорема о базисном миноре, свойства рангов, неустойчивость ранга, условие существования нетривиальных решений СЛАУ, фундаментальная совокупность решений СЛОУ, теорема о решениях СЛОУ, теорема Кронекера-Капелли, общее решение СЛАУ, строение множества решений СЛАУ.	K
4.	Векторная алгебра. Общие уравнения прямой и плоскости	Векторная алгебра в R^2/R^3 , скалярное произведение векторов, свойства скалярного произведения, ориентация системы координат, векторное произведение векторов, свойства векторного произведения векторов, смешанное произведение векторов, свойства смешанного произведения векторов, нормали к прямой и плоскости, общее уравнение прямой на плоскости, полуплоскости, расстояние от прямой до точки, общее уравнение плоскости, полупространства, расстояние от точки до плоскости, общее уравнение прямой в пространстве, связь параметрических уравнений	K

№	Наименование раздела/темы	Содержание раздела/темы	Форма текущего контроля
		прямой и плоскости с общими уравнениями, взаимное расположение прямой и плоскости.	
<i>Раздел 2 Алгебраические структуры и методы</i>			
5.	Комплексные числа	Алгебраическая форма комплексного числа, комплексная плоскость, комплексное сопряжение, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа, действия сложения и умножения комплексных чисел в алгебраической форме и тригонометрической форме, вывод формулы возведения в степень комплексного числа, формула Муавра, извлечение корня из комплексного числа, алгебраические уравнения с комплексными коэффициентами.	ЛР
6.	Линейные пространства и подпространства	Линейные пространства. Бесконечномерные и конечномерные линейные пространства. Базис и размерность. Подпространства линейного пространства. Пересечение и сумма линейных подпространств. Прямая сумма подпространств. Дополнительные пространства и проекции	К
7.	Основы абстрактной алгебры: группы, кольца, поля	Множества и алгебраические операции, понятие группы, примеры абелевых групп, группа невырожденных диагональных матриц, группа невырожденных треугольных матриц, циклические группы, свойство подгрупп циклической группы, группа обратимых матриц, группа корней степени n из единицы, первообразные корни, кольца и поля, кольцо вычетов, поля вещественных и комплексных чисел.	ЛР
8.	Общая теория алгебры полиномов	Определение полинома (многочлена), алгебра полиномов, линейные пространства полиномов, кольцо полиномов, определитель Вандермонда, деление с остатком, значение полинома, корень полинома, схема Горнера и теорема Безу, НОД двух полиномов, неприводимые полиномы, комплексные полиномы, основная теорема алгебры, разложение полиномов.	ЛР
<i>Раздел 3 Геометрия линейных пространств</i>			
9.	Линейные многообразия и аффинные пространства	Афинные многообразия. Гиперплоскости. Полупространства. Выпуклые множества.	ЛР

№	Наименование раздела/темы	Содержание раздела/темы	Форма текущего контроля
10.	Алгебраические многообразия	Квадратичные многочлены от двух переменных. Поворот и сдвиг декартовой системы координат. Эллипс, гипербола, парабола. Квадратичные многочлены от трех переменных. Ортогональные матрицы. Диагонализация вещественных симметричных матриц. Приведенные уравнения поверхности второго порядка. Эллипсоид. Однополостный гиперболоид. Линейчатая поверхность. Двуполостный гиперболоид. Эллиптический конус. Эллиптический параболоид. Гиперболический параболоид. Цилиндрические поверхности.	ЛР
11.	Скалярное произведение. Нормированные пространства. Ортогональность	Нормированное пространство. Выпуклые функции и неравенства. Неравенства Гельдера и Минковского. Нормы Гельдера. Нормы в бесконечномерном пространстве. Метрическое пространство. Множества в метрическом пространстве Евклидово пространство. Унитарное пространство. Скалярное произведение, длина вектора, угол между векторами. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта.	ЛР

Примечание: ЛР – отчет/защита лабораторной работы, КР - контрольная работа, РГЗ - расчетно-графического задания, К - коллоквиум, РЗ – решение задач.

2.3.2 Занятия семинарского типа.

Занятия семинарского типа не предусмотрены.

2.3.3 Лабораторные занятия.

№	Наименование раздела/темы	Наименование лабораторных работ	Форма текущего контроля
1	2	3	4
<i>Раздел 1. Векторы, матрицы и системы линейных уравнений</i>			
1.	Векторы в R^n . Прямые линии и плоскости.	Базовые задачи на векторы в R^2 и R^3 , действия над векторами в R^n , нахождение линейных комбинаций векторов, определение линейной зависимости / линейной независимости совокупности векторов, базис и размерность линейной оболочки, дополнение базиса линейной оболочки до базиса R^n , системы координат (декартовая, полярная, цилиндрическая, сферическая), параметрическое уравнение прямой на плоскости, алгоритм определение взаимного расположения	РЗ, КР

№	Наименование раз- деля/темы	Наименование лабораторных работ	Форма те- кущего контроля
		жения прямых на плоскости, параметрическое уравнение прямой в пространстве, алгоритм определения взаимного расположения прямых в пространстве, условие пересечения прямых, параметрическое уравнение плоскости, алгоритмы взаимного расположения прямых и плоскостей.	
2.	Основы матричной алгебры	Опреации сложения, умножения на скаляр, произведения и транспонирования матриц, значение многочлена от матрицы, перестановочные матрицы, решение СЛАУ методом Гаусса, вычисление определителей второго и третьего порядка, определитель n-го порядка, использование свойств для вычисления определителя, миноры и алгебраические дополнения, разложение определителя по строке (столбцу), вычисление определителей при помощи ЭПС, вычисление определителей с использованием теоремы Лапласа, решение Крамеровских систем по формулам Крамера, нахождение обратных матриц 3-го порядка через присоединенные матрицы, нахождение обратных матриц порядка выше 3-го по схеме Гаусса с применением ЭПС, решение простейших матричных уравнений, решение Крамеровских систем с использованием обратных матриц.	P3
3.	Ранг матрицы. Общая теория СЛАУ.	Нахождение ранга матрицы методом окаймления миноров, нахождение ранга матрицы приведением к верхне-ступенчатому виду, вычисление ранга совокупности векторов, нахождение общего и частного решений СЛАУ, векторная запись решения СЛАУ, нахождение фундаментальной совокупности векторов СЛОУ, связь решения СЛНУ и соответствующей СЛОУ	P3
4.	Векторная алгебра. Общие уравнения прямой и плоскости	Вычисление скалярного произведения, использование свойств скалярного произведения, координатная форма скалярного произведения, определение углов между векторами, вычисление проекции вектора на ось, вычисление векторного произведения векторов, свойства векторного произведения, координатная	P3, КР

№	Наименование раздела/темы	Наименование лабораторных работ	Форма текущего контроля
		форма векторного произведения, применение векторного произведения для вычисления площадей, координатная форма смешанного произведения векторов, определение компланарности векторов, применение смешанного произведения для вычисления объемов, переход от параметрического уравнения прямой на плоскости к общему, планиметрические задачи с использованием общего уравнения прямой на плоскости, нахождение углов между прямыми и расстояния от точки до прямой на плоскости, переход от параметрического уравнения плоскости к общему, вычисление углов между плоскостями, задачи стереометрии с использованием общего уравнения плоскости (определение граней n-угольников, высот), переход от общего уравнения прямой в пространстве к параметрическому, нахождения угла между прямыми и между прямой и плоскостью.	

Раздел 2 Алгебраические структуры и методы

5.	Комплексные числа	Действия умножения/деления над комплексными числами в алгебраической форме, решение СЛАУ с комплексными коэффициентами, решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами, переход от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической, работа с комплексной плоскостью, нахождение геометрического места точек, изображающих комплексные числа по их модулю и аргументу, действия умножения/деления и возведения в степень в тригонометрической форме, извлечение корня n-ой степени из комплексного числа.	РЗ, КР
6.	Линейные пространства и подпространства	Линейные пространства (определение, проверка выполнения свойств сложения и умножения на скаляр), нахождение координат вектора в базисе, матрица перехода из базиса в базис, связь линейных подпространств с СЛОУ, определение базиса и размерности линейного подпространства, сумма и пересечение подпространств, определение базисов и размерностей суммы и пересече-	РЗ, ЛР

№	Наименование раздела/темы	Наименование лабораторных работ	Форма текущего контроля
		ния подпространств.	
7.	Основы абстрактной алгебры: группы, кольца, поля	Определение, образует ли группу некоторое множество с указанными операциями, группа подстановок, нахождение подгрупп циклических групп, определение, образует ли кольцо / поле некоторое множество с указанными операциями, кольцо вычетов, изоморфизм полей.	РЗ, ЛР
8.	Общая теория алгебры полиномов	Деление полиномов с остатком, применение схемы Горнера для нахождения значения полинома и его производных в точке, определения корней полиномов их кратности, разложение дробно-рациональных функций на простейшие дроби, нахождение НОД двух полиномов, разложение полинома на неприводимые множители.	РЗ, КР
<i>Раздел 3 Геометрия линейных пространств</i>			
9.	Линейные многообразия и аффинные пространства	Равенство линейных многообразий, принадлежность вектора линейному многообразию, связь линейных многообразий и СЛНУ, условие пересечения линейных многообразий, условие параллельности линейных многообразий, определение взаимного расположения прямых, прямой и плоскости, плоскостей, заданных как линейные многообразия в R^n .	РЗ, ЛР
10.	Алгебраические многообразия	Приведение квадратичных многообразий от двух переменных к каноническому виду посредством поворота и сдвига декартовой системы координат, нахождение центра кривой второго порядка, определение типа кривых второго порядка на основе ранга матрицы коэффициентов, построение кривых второго порядка в каноническом виде, определение типа поверхностей второго порядка на основе ранга матрицы коэффициентов, построение поверхностей второго порядка в каноническом виде.	РЗ, ЛР
11.	Скалярное произведение. Нормированные пространства. Ортогональность	Функции скалярного произведения в R^n и C^n , реализация скалярного произведения через матрицу Грама, дополнение ортогонального (ортонормированного) базиса подпространства до базиса всего унитарного (евклидовского) пространства, ортогонализация совокупности векторов.	РЗ, ЛР

№	Наименование раз- деля/темы	Наименование лабораторных работ	Форма те- кущего контроля
		ров алгоритмом Грама-Шмидта, базис ортогонального дополнения, нахождение ортогональной проекции и ортогональной составляющей, угол между вектором и линейным подпространством, расстояние от точки до линейного многообразия.	

2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Курсовые работы не предусмотрены.

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Целью самостоятельной работы студента является углубление знаний, полученных в результате аудиторных занятий. Вырабатываются навыки самостоятельной работы. Закрепляются опыт и знания, полученные во время лабораторных занятий.

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
		3
1	2	
1	Самостоятельное изучение разделов, самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к лабораторным и практическим занятиям, коллоквиумам и т.д.)	Методические указания для подготовки к занятиям лекционного и семинарского типа. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 11 от 13 мая 2025 г. Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 11 от 13 мая 2025 г.
2	Подготовка к текущему контролю	Методические указания по выполнению лабораторных работ. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 11 от 13 мая 2025 г.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла,
- в печатной форме на языке Брайля.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

3. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины (модуля)

В соответствии с требованиями ФГОС в программа дисциплины предусматривает использование в учебном процессе следующих образовательные технологии: чтение лекций с использованием мультимедийных технологий; метод малых групп, разбор практических задач и кейсов.

При обучении используются следующие образовательные технологии:

– Технология коммуникативного обучения – направлена на формирование коммуникативной компетентности студентов, которая является базовой, необходимой для адаптации к современным условиям межкультурной коммуникации.

– Технология разноуровневого (дифференцированного) обучения – предполагает осуществление познавательной деятельности студентов с учётом их индивидуальных способностей, возможностей и интересов, поощряя их реализовывать свой творческий потенциал. Создание и использование диагностических тестов является неотъемлемой частью данной технологии.

– Технология модульного обучения – предусматривает деление содержания дисциплины на достаточно автономные разделы (модули), интегрированные в общий курс.

– Информационно-коммуникационные технологии (ИКТ) - расширяют рамки образовательного процесса, повышая его практическую направленность, способствуют интенсификации самостоятельной работы учащихся и повышению познавательной активности. В рамках ИКТ выделяются 2 вида технологий:

– Технология использования компьютерных программ – позволяет эффективно дополнить процесс обучения языку на всех уровнях.

– Интернет-технологии – предоставляют широкие возможности для поиска информации, разработки научных проектов, ведения научных исследований.

– Технология индивидуализации обучения – помогает реализовывать личностно-ориентированный подход, учитывая индивидуальные особенности и потребности учащихся.

– Проектная технология – ориентирована на моделирование социального взаимодействия учащихся с целью решения задачи, которая определяется в рамках профессиональной подготовки, выделяя ту или иную предметную область.

– Технология обучения в сотрудничестве – реализует идею взаимного обучения, осуществляя как индивидуальную, так и коллективную ответственность за решение учебных задач.

– Игровая технология – позволяет развивать навыки рассмотрения ряда возможных способов решения проблем, активизируя мышление студентов и раскрывая личностный потенциал каждого учащегося.

– Технология развития критического мышления – способствует формированию разносторонней личности, способной критически относиться к информации, умению отбирать информацию для решения поставленной задачи.

Комплексное использование в учебном процессе всех вышеназванных технологий стимулируют личностную, интеллектуальную активность, развиваются познавательные процессы, способствуют формированию компетенций, которыми должен обладать будущий специалист.

Основные виды интерактивных образовательных технологий включают в себя:

– работа в малых группах (команде) - совместная деятельность студентов в группе под руководством лидера, направленная на решение общей задачи путём творческого сложения результатов индивидуальной работы членов команды с делением полномочий и ответственности;

- проектная технология - индивидуальная или коллективная деятельность по отбору, распределению и систематизации материала по определенной теме, в результате которой составляется проект;
- анализ конкретных ситуаций - анализ реальных проблемных ситуаций, имевших место в соответствующей области профессиональной деятельности, и поиск вариантов лучших решений;
- развитие критического мышления – образовательная деятельность, направленная на развитие у студентов разумного, рефлексивного мышления, способного выдвинуть новые идеи и увидеть новые возможности.

Подход разбора конкретных задач и ситуаций широко используется как преподавателем, так и студентами во время лекций, лабораторных занятий и анализа результатов самостоятельной работы. Это обусловлено тем, что при исследовании и решении каждой конкретной задачи имеется, как правило, несколько методов, а это требует разбора и оценки целой совокупности конкретных ситуаций.

Семестр	Вид занятия	Используемые интерактивные образовательные технологии	количество интерактивных часов
1	Л, ЛР, СРС	Практические занятия в режимах взаимодействия «преподаватель – студент» и «студент – студент»	16
Итого			16

Примечание: Л – лекции, ПЗ – практические занятия/семинары, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента

Темы, задания и вопросы для самостоятельной работы призваны сформировать навыки поиска информации, умения самостоятельно расширять и углублять знания, полученные в ходе лекционных и практических занятий.

Подход разбора конкретных ситуаций широко используется как преподавателем, так и студентами при проведении анализа результатов самостоятельной работы.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

4. Оценочные и методические материалы

4.1 Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины «Алгебра и аналитическая геометрия»

Оценочные средства включает контрольные материалы для проведения **текущего контроля** в форме тестовых заданий, разноуровневых заданий и **промежуточной аттестации** в форме вопросов и заданий к экзамену.

Текущий контроль успеваемости представляет собой проверку усвоения учебного материала, регулярно осуществляющую на протяжении семестра. К достоинствам данного типа относится его систематичность, непосредственно коррелирующая с требованием постоянного и непрерывного мониторинга качества обучения.

Текущий контроль успеваемости студентов представляет собой:

- устный опрос (групповой или индивидуальный);
- проверку выполнения письменных домашних заданий;
- проведение контрольных работ;
- проведение коллоквиумов (в письменной форме);
- контроль самостоятельной работы студентов (в письменной или устной форме).

Для самостоятельной работы используется учебно-методическое обеспечение на бумажных и электронных носителях. Тематика самостоятельной работы соответствует содержанию разделов дисциплины и теме домашнего задания. Освоение материала контролируется в процессе проведения практических занятий.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля выбираются из содержания разделов дисциплины. Выполнение домашнего задания обеспечивает непрерывный контроль за процессом освоения учебного материала каждого обучающегося, своевременное выявление и устранение отставаний и ошибок.

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины: 1 семестр – зачет и экзамен; 2 семестр – зачет и экзамен. Промежуточная аттестация представлена типовыми задачами по всем пройденным темам, а также экзаменационными вопросами по лекционному материалу.

К формам письменного контроля относится контрольная работа, которая является одной из сложных форм проверки; она может применяться для оценки знаний по базовым и вариативным дисциплинам всех циклов. Контрольная работа, как правило, состоит из небольшого количества средних по трудности вопросов, задач или заданий, требующих поиска обоснованного ответа. Во время проверки и оценки контрольных письменных работ проводится анализ результатов выполнения, выявляются типичные ошибки, а также причины их появления. Контрольная работа может занимать часть или полное учебное занятие с разбором правильных решений на следующем занятии. Перечень контрольных работ приведен ниже.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

- при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;
- при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;
- при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла,

– в печатной форме на языке Брайля.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

Структура оценочных средств для текущей и промежуточной аттестации

№ п/п	Результаты обучения	Код и наименование индикатора	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	Векторы в R^n . Прямые линии и плоскости.	ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1	Устный опрос, проверка самостоятельной неаудиторной работы	Вопросы на экзамене 1-20
2	Основы матричной алгебры.	ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1	Устный опрос, проверка самостоятельной неаудиторной работы, контрольная работа №1	Вопросы на экзамене 21-44
3	Ранг матрицы. Общая теория СЛАУ.	ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1	Устный опрос, проверка самостоятельной неаудиторной работы	Вопросы на экзамене 45-53
4	Векторная алгебра. Общие уравнения прямой и плоскости	ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-12	Устный опрос, проверка самостоятельной неаудиторной работы, контрольная работа №2	Вопросы на экзамене 64-77
5	Комплексные числа	ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1	Устный опрос, проверка самостоятельной неаудиторной работы	Вопросы на экзамене 78-84
6	Линейные пространства и подпространства	ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1	Устный опрос, проверка самостоятельной неаудиторной работы	Вопросы на экзамене 54-63
7	Основы абстрактной алгебры: группы, кольца, поля	ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1	Устный опрос, проверка самостоятельной неаудиторной работы	Вопросы на экзамене 85-92
8	Общая теория алгебры полиномов	ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1	Устный опрос, проверка самостоятельной неаудиторной работы	Вопросы на экзамене 93-101
9	Линейные многообразия и аффинные пространства	ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1	Устный опрос, проверка самостоятельной неаудиторной работы, контрольная работа №3	Вопросы на экзамене 102-107
10	Алгебраические многообразия	ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1	Устный опрос, проверка самостоятельной неаудиторной работы	Вопросы на экзамене 108-117

			ной работы	
11	Нормированные конечно-мерные линейные пространства. Ортогональность	ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1	Устный опрос, проверка самостоятельной неаудиторной работы	Вопросы на экзамене 118-129

Показатели, критерии и шкала оценки сформированных компетенций

Соответствие **пороговому уровню** освоения компетенций планируемым результатам обучения и критериям их оценивания (оценка: **удовлетворительно /зачтено**):

ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.
ОПК-1.1	Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук при построении моделей в заданной предметной области
Знать	основные принципы и методы решения задач в области алгебры матриц и определителей, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, основных геометрических образов; методы решений систем линейных уравнений.
Уметь	решать задачи в области алгебры матриц и определителей, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, основных геометрических образов; методы решений систем линейных уравнений.
Владеть	методами доказательств и вывода формулы в области алгебры матриц и определителей, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, основных геометрических образов; методы решений систем линейных уравнений.
ОПК-1.2	Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук при выборе методов решения задач профессиональной деятельности
Знать	теоретические основы алгебры матриц и определителей, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, основных геометрических образов; методы решений систем линейных уравнений.
Уметь	выбирать адекватный метод решения задач в области алгебры матриц и определителей, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, основных геометрических образов; методы решений систем линейных уравнений.
Владеть	инструментарием математического моделирования в области алгебры матриц и определителей, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, основных геометрических образов; методы решений систем линейных уравнений.

Соответствие **базовому уровню** освоения компетенций планируемым результатам обучения и критериям их оценивания (оценка: **хорошо /зачтено**):

ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.
ОПК-1.1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

Знать	основные принципы и методы решения задач алгебры матриц и определителей, систем линейных уравнений, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, нормированные пространства.
Уметь	решать задачи в области алгебры матриц и определителей, систем линейных уравнений, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, нормированные пространства.
Владеть	методами доказательств и вывода формулы в области алгебры матриц и определителей, систем линейных уравнений, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, нормированные пространства.
ОПК-1.2	Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук при выборе методов решения задач профессиональной деятельности
Знать	теоретические основы алгебры матриц и определителей, систем линейных уравнений, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, нормированные пространства.
Уметь	выбирать адекватный метод решения задач в области алгебры матриц и определителей, систем линейных уравнений, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, нормированные пространства.
Владеть	инструментарием математического моделирования в области алгебры матриц и определителей, систем линейных уравнений, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, нормированные пространства.

Соответствие **продвинутому уровню** освоения компетенций планируемым результатам обучения и критериям их оценивания (оценка: **отлично /зачтено**):

ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.
ОПК-1.1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности
Знать	основные принципы и методы решения задач алгебры матриц и определителей, систем линейных уравнений, алгебраических структур, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, алгебраических многообразий, нормированных пространств.
Уметь	решать задачи в области алгебры матриц и определителей, систем линейных уравнений, алгебраических структур, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, алгебраических многообразий, нормированных пространств.
Владеть	методами доказательств и вывода формулы в области алгебры матриц и определителей, систем линейных уравнений, алгебраических структур, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, алгебраических многообразий, нормированных пространств.
ОПК-1.2	Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических

и (или) естественных наук при выборе методов решения задач профессиональной деятельности

Знать теоретические основы алгебры матриц и определителей, систем линейных уравнений, алгебраических структур, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, алгебраических многообразий, нормированных пространств.

Уметь выбирать адекватный метод решения задач в области алгебры матриц и определителей, систем линейных уравнений, алгебраических структур, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, алгебраических многообразий, нормированных пространств.

Владеть инструментарием математического моделирования в области алгебры матриц и определителей, систем линейных уравнений, алгебраических структур, линейных пространств и линейных многообразий, комплексных чисел, полиномов, основных геометрических образов, алгебраических многообразий, нормированных пространств.

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Практические задачи по тематике лабораторных работ

Тема 1. Векторы в R^n . Прямые линии и плоскости.

1) Какой особенность должны обладать векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , чтобы имело место соотношение:

- a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ b) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ c) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$
- d) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ e) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ f) $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$

2) Пусть векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} не коллинеарны и $\overline{AB} = \frac{\alpha}{2}\mathbf{a}$, $\overline{BC} = 4(\beta\mathbf{a} - \mathbf{b})$, $\overline{CD} = -4\beta\mathbf{b}$ и $\overline{DA} = \mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$. Найти α и β и доказать коллинеарность \overline{BC} и \overline{DA} .

3) Три вектора $\overline{AB} = \mathbf{c}$, $\overline{BC} = \mathbf{a}$ и $\overline{CA} = \mathbf{b}$ служат сторонами треугольника ABC . Выразить векторы, совпадающие с медианами.

3. Определить, является ли совокупность векторов линейно зависимой или линейно независимой:

- 1) $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3)^T$, $\mathbf{a}_2 = (2, 5, 4)^T$, $\mathbf{a}_3 = (-1, -4, 1)^T$.
- 2) $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 1, -1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1, 0)^T$, $\mathbf{a}_3 = (1, -3, 1, -3)^T$.
- 3) $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 1, -1)^T$, $\mathbf{a}_3 = (2, 3, 1, 4)^T$, $\mathbf{a}_4 = (2, 1, 1, 3)^T$.

4. Проверить, что векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ образуют базис линейной оболочки $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ и найти координаты вектора \mathbf{b} в этом базисе:

- 1) $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 5)$.
- 2) $\mathbf{a}_1 = (0, -3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (-7, 6, 1)$.
- 3) $\mathbf{a}_1 = (2, -1, 7)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (4, -2, 0)$.

5) Даны вершины четырехугольника $A(-3; 12)$, $B(3; -4)$, $C(5; -4)$ и $D(5; 8)$.
Определить, в каком отношении его диагональ AC делит диагональ BD .

Ответ: $1 : 3$, считая от точки B .

6) Даны вершины четырехугольника $A(-2; 14)$, $B(4; -2)$, $C(6; -2)$ и $D(6; 10)$.
Определить точку пересечения диагоналей AC и BD .

Ответ: $(4, 5; 1)$

7) В полярной системе координат даны две вершины $A(3; -\frac{4\pi}{9})$ и $B(5; \frac{3\pi}{14})$ параллелограмма $ABCD$, точка пересечения диагоналей которого совпадает с полюсом. Определить две другие вершины этого параллелограмма.

Ответ: $C(3; \frac{5\pi}{9})$, $D(5; -\frac{11\pi}{14})$.

16) Даны вершины треугольника $A(4; 4)$, $B(-6; -1)$ и $C(-2; -4)$. Написать уравнение биссектрисы внутреннего угла C .

18) Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(3; 5; 1)$ параллельно прямой $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -3t \\ z = -3 \end{cases}$

19) Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(2; 3; 1)$, $M_2(3; 1; 4)$, и $M_3(2; 1; 5)$

Тема 2. Основы матричной алгебры

3) Найти все матрицы, перестановочные с данной матрицей:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Найти значение многочлена $f(x)$ от матрицы \mathbf{A} :

$$\text{а)} f(x) = x^2 - 5x + 3, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

5) Выбрать значения i и k так, чтобы произведение

а) $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ входило в определитель 6-го порядка со знаком минус;

б) $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс;

6) Найти члены определителя

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{pmatrix}, \quad \text{б)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3x \\ 2 & 1 & x & x \\ 3 & -4x & 5 & -1 \\ x & 2 & 1 & x \end{pmatrix},$$

содержащие x^4 и x^3 .

7) Пользуясь свойствами определителя, вычислить следующие определители

$$\text{а)} \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & 1 & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & 1 & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & 1 & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}, \quad \text{б)} \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos 2\alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos 2\beta & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & \cos 2\gamma & \cos^2 \gamma \end{vmatrix},$$

12) Применяя теорему Лапласа, вычислить определители:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad 6) \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

1) Решить СЛАУ методом Гаусса, найти общее и частное решения.

$$a) \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

13) По формулам Крамера решить системы:

$$a) \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 7 \\ 5x_1 + 6x_2 = -8 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 8 \\ 5x_1 + 7x_2 = -9 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 3 \\ 5x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 5 \end{cases} \quad g) \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

2) Решить систему $Ax = b$ по формуле $x = A^{-1}b$, если

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

3) Решите матричные уравнения:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad 6) X \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

Тема 3. Ранг матрицы. Общая теория СЛАУ

1) Найдите ранг матрицы (методом окаймления миноров и при приведении к верхнеступенчатому виду):

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix}, \quad 6) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 9 & 8 & -2 \\ 1 & 12 & -7 & -2 \end{pmatrix}, \quad g) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 0 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix},$$

2) Вычислить ранги совокупности векторов:

- a) $\mathbf{a}_1 = (1, 3, 1, -3)^T$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 1, 1)^T$, $\mathbf{a}_3 = (3, -11, -1, 19)^T$, $\mathbf{a}_4 = (1, 12, -2, -16)^T$.
 б) $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 3, -1, -1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 1, 0, -2)^T$, $\mathbf{a}_3 = (1, -1, -1, -1, 1)^T$,
 $\mathbf{a}_4 = (1, 3, -10, 1, 3)^T$.

Ответы: а) 3; б) 3.

3) Найти общее решение и фундаментальную совокупность векторов СЛОУ; представить решение в векторном виде.

$$\text{а)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 9x_3 - 14x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

4) Зная частное решение x_0 неоднородной системы (проверить), найти ее общее решение, решая соответствующую однородную систему:

$$\text{а)} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases} \quad x_0 = (1, 1, 1, -1)^T;$$

Тема 4. Векторная алгебра. Общие уравнения прямой и плоскости

1) Векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60° . Зная, что $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 2$ и $|\mathbf{c}| = 6$, определить модуль вектора $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

2) Дано, что $|\mathbf{a}| = 3$ и $|\mathbf{b}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны.

3) Даны векторы $\mathbf{a} = (4, -2, -4)$ и $\mathbf{b} = (6, -3, 2)$. Вычислить: а) (\mathbf{a}, \mathbf{b}) ; б) $\sqrt{\mathbf{a}^2}$; в) $\sqrt{\mathbf{b}^2}$; г) $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b})$; д) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$; е) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$.

4) Даны вершины треугольника $A(3, 2, -3)$, $B(5, 1, -1)$, $C(1, -2, 1)$. Определить его внешний угол при вершине A .

8) Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , образуют угол $\frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\mathbf{a}| = 6$ и $|\mathbf{b}| = 5$, вычислить $|\mathbf{[a, b]}|$.

9) Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , образуют угол $\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\mathbf{a}| = 6$ и $|\mathbf{b}| = 5$, вычислить:
 а) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]^2$; б) $[2\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b}]^2$.

10) Даны точки $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, 2, 1)$. Найти координаты векторных произведений а) $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}]$; б) $[(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}), \overrightarrow{CB}]$.

11) Даны точки $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$, $C(5, 2, 6)$. Вычислить площадь треугольника ABC .

13) Установить, компланарны ли векторы $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 3)$ и $\mathbf{c} = (1, 9, -11)$.

14) Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$ и $D(4, 1, 3)$.

15) Даны вершины тетраэдра: $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$ и $D(-5, -4, 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D .

20) Данна прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2, 1)$:

- 1) параллельно данной прямой;
 2) перпендикулярно к данной прямой.

22) Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон: $2x - 5y - 1 = 0$, $2x - 5y - 34 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $x + 3y - 6 = 0$.

23) Даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма: $x - y - 1 = 0$, $x - 2y = 0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3, -1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

35) Составить уравнение плоскости:

- 1) проходящей через точку $A(-2, 7, 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$;
- 2) проходящей через начало координат и перпендикулярно двум плоскостям: $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$;
- 3) проходящей через точки $L(0, 0, 1)$ и $N(3, 0, 0)$ и образующей угол $\frac{\pi}{3}$ с плоскостью (xy) .

42) Определить угол между прямыми

$$\text{а)} \begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

Тема 5. Комплексные числа

5. Вычислить в алгебраической форме:

$$\text{а)} (1+2i)^6; \quad \text{б)} (1+i)^{20}; \quad \text{в)} (1-i)^{21}; \quad \text{г)} \frac{7-4i}{3+2i}; \quad \text{д)} \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2};$$

$$\text{е)} \frac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}; \quad \text{ж)} \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}; \quad \text{з)} \sqrt{5+12i}.$$

6. Решить системы линейных уравнений:

$$\text{а)} \begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6, \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8. \end{cases}$$

7. Решить уравнения:

$$\text{а)} x^2 + 2x + 4 = 0; \quad \text{б)} x^2 - (2+i)x + (-1+7i) = 0;$$

$$\text{в)} (2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0.$$

8. Представить в тригонометрической форме:

$$\text{а)} -1+i; \quad \text{б)} 1-i; \quad \text{в)} 1+i\sqrt{3}; \quad \text{г)} -1-i\sqrt{3}; \quad \text{д)} \sqrt{3}-i.$$

12. Вычислить:

$$\text{а)} (1+i)^{25}; \quad \text{б)} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}; \quad \text{в)} \frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}.$$

13. Извлечь корни:

$$\text{а)} \sqrt[3]{i}; \quad \text{б)} \sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}; \quad \text{в)} \sqrt[4]{-4}; \quad \text{г)} \sqrt[6]{1}; \quad \text{д)} \sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}; \quad \text{е)} \sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}.$$

Тема 6. Линейные пространства и подпространства

5) Найти размерности и базисы линейных подпространств, натянутых на системы векторов:

$$\text{а)} \begin{array}{ll} \mathbf{a}_1 = (1, 2, 0, 1)^T, & \mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \\ \mathbf{a}_2 = (1, 1, 1, 0)^T, & \mathbf{a}_2 = (1, -1, 1, -1)^T, \\ \mathbf{a}_3 = (1, 0, 1, 0)^T, & \mathbf{a}_3 = (1, 3, 1, 3)^T, \\ \mathbf{a}_4 = (1, 3, 0, 1)^T, & \mathbf{a}_4 = (1, 2, 0, 2)^T, \end{array}$$

8) Найти размерности и базисы сумм и пересечений подпространств $L(a_1, a_2, a_3)$ и $L(b_1, b_2, b_3)$.

a) $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1)^T, \mathbf{a}_2 = (1, 1, -1)^T, \mathbf{a}_3 = (1, 3, 3)^T,$

$\mathbf{b}_1 = (2, 3, -1)^T, \mathbf{b}_2 = (1, 2, 2)^T, \mathbf{b}_3 = (1, 1, -3)^T.$

б) $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1)^T, \mathbf{a}_2 = (1, 2, 0)^T, \mathbf{a}_3 = (2, 3, 1)^T,$

9) Найти размерности и базисы сумм и пересечений подпространств, заданных системами уравнений:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Тема 7. Основы абстрактной алгебры: группы, кольца, поля

1) Выяснить, образуют ли группу каждое из следующих множеств при указанной операции над элементами:

А) целые числа относительно сложения;

Б) четные числа относительно сложения;

В) нечетные целые числа относительно вычитания;

Г) корни n -ой степени из единицы;

Д) матрицы порядка n с целыми элементами относительно умножения.

2) Постройте циклическую группу, порождаемую перестановками вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Найти все подгруппы:

А) циклической группы порядка 6;

Б) циклической группы порядка 24.

4) Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами и какие полями относительно указанных операций:

А) целые числа относительно сложения и умножения чисел;

Б) комплексные числа относительно сложения и умножения комплексных чисел;

В) Матрицы порядка n с целыми элементами относительно сложения и умножения матриц;

Г) полиномы от одного неизвестного с действительными коэффициентами относительно сложения и умножения полиномов.

Тема 8. Общая теория алгебры полиномов

1) . Выполнить деление с остатком

$2x^5 - 3x^3 + x^2 - 5x + 7$ на $3x^4 + 4x^3 - x + 2$

2) Не осуществляя деления и не используя схему Горнера найти остаток от деления полинома $2x^5 - 3x^3 + x^2 - 5x + 7$ на $5x - 3$

3) Определить кратность корня $x_0 = 2$ полинома

$2x^4 - 11x^3 + 18x^2 - 4x - 8$.

Разложить полином на множители.

4) Разложить полином $2x^5 - 3x^3 + x^2 - 5x + 7$ по степеням $x_0 = -2$, используя схему Горнера.

5) Построить полином наименьшей степени с действительными коэффициентами, если его корни:

$x_0 = 2i - 1$ кратности 1, $x_1 = 2 - i$ кратности 1 и $x_2 = 3$ кратности 2.

6) Найти НОД двух полиномов

$$f(x) = x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7 \text{ и } g(x) = 3x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 7$$

7) Пользуясь алгоритмом Евклида, подобрать полиномы $M_1(x)$ и $M_2(x)$ так, чтобы $f(x)M_1(x) + g(x)M_2(x) = \delta(x)$, где $\delta(x)$ – НОД полиномов $f(x)$ и $g(x)$,

$$f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1 \text{ и } g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2.$$

8) Пользуясь алгоритмом Евклида, подобрать полиномы $M_1(x)$ и $M_2(x)$ так, чтобы $f(x)M_1(x) + g(x)M_2(x) = 1$, где $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ и $g(x) = x^2 - x - 1$.

Тема 9. Линейные многообразия и аффинные пространства

1) Пусть даны два линейных многообразия $P_1 = \mathbf{x}_1 + L_1$ и $P_2 = \mathbf{x}_2 + L_2$, где L_1, L_2 – линейные подпространства и $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ – векторы пространства R_n . Доказать, что $P_1 = P_2$ тогда и только тогда, когда $L_1 = L_2$ и $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in L_1$. Таким образом, линейное пространство, параллельным сдвигом которого получается данное многообразие, определено однозначно.

2) Доказать, что если $P = \mathbf{x}_0 + L$, где L – линейные подпространство и \mathbf{x}_0 – вектор пространства R_n , то вектор \mathbf{x}_0 принадлежит многообразию P и после замены этого вектора любым вектором $\mathbf{x} \in P$ получается то же самое многообразие.

3) Дано линейное многообразие $P = \mathbf{x}_0 + L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, где $\mathbf{x}_0 = (2, 3, -1, 1, 1)^T$ и $\mathbf{a}_1 = (3, -1, 1, -1, 1)^T, \mathbf{a}_2 = (-1, 1, 1, 1, -1)^T$. Установить, принадлежат ли ему следующие векторы:

1) $\mathbf{b}_1 = (1, 6, 4, 4, -2)^T$; (да)

2) $\mathbf{b}_2 = (1, 6, 5, 4, -2)^T$; (нет)

2) $\mathbf{b}_3 = (2, 3, 4, 1, 5)^T$. (нет)

4) Задать следующие линейные многообразия $\mathbf{x}_0 + L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ системами линейных уравнений:

1) $\mathbf{x}_0 = (2, 3, 1, 4)^T$ и $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 1, -1)^T, \mathbf{a}_2 = (1, 0, 1, 0)^T$;

2) $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1, 2, 2)^T$ и $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 2, 1)^T, \mathbf{a}_2 = (2, 1, 3, 1, 2)^T$;

3) $\mathbf{x}_0 = (5, 2, 3, 4)^T$ и $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 2, 2)^T, \mathbf{a}_2 = (1, 2, 1, 2)^T, \mathbf{a}_3 = (2, 1, 2, 1)^T$;

4) $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 2, 2, 3)^T$ и $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 1, 0, 2)^T, \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, 1, 0)^T, \mathbf{a}_3 = (1, 2, -1, -3, 0)^T$;

6) Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы две прямые $\mathbf{x} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{x} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t$ пространства $R^n (n > 1)$ проходили через одну точку, но не совпадали. Указать метод отыскания точки пересечения этих прямых.

7) Найти точку пересечения двух прямых $\mathbf{x} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{x} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t$

1) $\mathbf{a}_0 = (2, 1, 1, 3, -3)^T, \mathbf{a}_1 = (2, 3, 1, 1, -1)^T, \mathbf{b}_0 = (1, 1, 2, 1, 2), \mathbf{b}_1 = (1, 2, 1, 0, 1)^T$;

2) $\mathbf{a}_0 = (3, 1, 2, 1, 2)^T, \mathbf{a}_1 = (1, 0, 1, 1, 2)^T, \mathbf{b}_0 = (2, 2, -1, -1, -2), \mathbf{b}_1 = (2, 1, 0, 1, 1)^T$

Ответы: 1) $(-2, -5, -1, -2, -3)^T, (0, 1, -1, -2, -3)^T$.

11) Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы через точку, заданную вектором \mathbf{c} , можно было провести единственную прямую, пересекающую две данные прямые $\mathbf{x} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{x} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t$. Указать метод построения такой прямой и точек пересечения ее с данными прямыми.

Тема 10. Алгебраические многообразия

13) Посредством сдвига и поворота декартовой системы координат привести уравнение алгебраического многообразия второго порядка от двух переменных к каноническому виду. Определить тип кривой второго порядка, сделать чертеж.

- 1) $-x^2 + 4xy - y^2 + 2x - 4y + 1 = 0;$
- 2) $4xy + 4x - 4y = 0;$
- 3) $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0;$
- 4) $-2x^2 + 4xy - 2y^2 - 6x + 2y + 3 = 0;$
- 5) $-3x^2 + 4xy - 3y^2 - 6x + 4y + 2 = 0;$
- 6) $x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y + 1 = 0;$
- 7) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 8y + 1 = 0;$
- 8) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$

15) Определить тип поверхности второго порядка по рангу матрицы коэффициентов, найти центр, если поверхность центральная.

1. $4x^2 + 2y^2 - z^2 - 8x - 4y - 2z - 5 = 0;$
2. $4x^2 + 69y^2 + 16z^2 + 8xy + 64yz - 4y - 12 = 0$

Тема 11. Нормированные конечномерные линейные пространства. Ортогональность

3. Дано линейное пространство V с базисом e_1, e_2, e_3 и матрица Грама

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Выписать формулу скалярного произведения векторов в V и, пользуясь им, вычислить скалярное произведение (e_i, e_j) , $i, j = 1, 2, 3$ и (x, y) , если

- 1) $x = (1, 2, 3)^T$, $y = (0, 1, 2)^T$;
- 2) $x = (1, 1, 2)^T$, $y = (1, 0, 1)^T$.

4. Найти нормированный вектор, ортогональный к векторам $a_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $a_2 = (1, -1, -1, 1)^T$, $a_3 = (2, 1, 1, 3)^T$.

Проверить, что векторы следующих систем попарно ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов:

$$5.(1357) \quad a_1 = (1, -2, 2, -3)^T, \quad a_2 = (2, -3, 2, 4)^T.$$

Применяя процесс ортогональности, построить ортогональный базис подпространства, заданного данной системой векторов:

$$9.(1361) \quad a_1 = (1, 2, 2, -1)^T, \quad a_2 = (1, 1, -5, 3)^T, \quad a_3 = (3, 2, 8, -7)^T.$$

$$10.(1362) \quad a_1 = (1, 1, -1, -2)^T, \quad a_2 = (5, 8, -2, -3)^T, \quad a_3 = (3, 9, 3, 8)^T.$$

$$11.(1363) \quad a_1 = (2, 1, 3, -1)^T, \quad a_2 = (7, 4, 3, -3)^T, \quad a_3 = (1, 1, -6, 0)^T,$$

$$a_4 = (5, 7, 7, 8)^T.$$

Вопросы к коллоквиуму.

1. Понятие вектора. Действия над векторами.
2. Определения линейной комбинации и линейной оболочки.
3. Понятие линейной зависимости и линейной независимости векторов.
4. Свойства линейной зависимости векторов.
5. Теорема о линейной зависимости линейных комбинаций. Следствия.
6. Понятие базиса и его отличие от порождающей совокупности. Теорема о числе векторов в базисе.
7. Определение базы векторов. Утверждение о соответствии базы и базиса.
8. Утверждение о дополнении до базиса.
9. Координаты вектора. Утверждение о координатах вектора
10. Связь задач о векторах с системами линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
11. Понятие матрицы, равенство матриц.
12. Виды матриц.
13. Сложение матриц и умножение на скаляр. Свойства линейных операций над матрицами.
14. Произведение матриц и свойства.
15. Возвведение матрицы в степень, многочлен от матрицы.
16. Транспонирование матрицы, свойства
17. Элементарные преобразования над матрицами.
18. Элементарные матрицы и матрицы перестановок.
19. Общие понятия СЛАУ.
20. Алгоритм метода Гаусса. Приведение СЛАУ к ступенчатому виду.
21. Наводящие соображения понятия определителя (на примере СЛАУ 2-го порядка).
22. Определение определителя, перестановки, подстановки.
23. Свойства определителя (все). Доказательство двух свойств.
24. Алгебраические дополнения и миноры.
25. Доказательство утверждения о вычислении определителя разложением по строке (столбцу).
26. Теорема Лапласа. Определитель произведения матриц.
27. Теорема Крамера (доказательство). Следствия.
28. Теорема о линейной зависимости множества строк квадратной матрицы.
29. Понятие обратной матрицы. Утверждение о единственности.
30. Теорема обратимости квадратной матрицы.
31. Свойства обратной матрицы.
32. Нахождение обратной матрицы методом Гаусса.
33. Простейшие матричные уравнения.
34. Обращение блочно-ступенчатой матрицы.
35. Скелетное разложение матрицы, вывод формул.
36. Теорема о размерности линейной оболочки.
37. Ранг матрицы.
38. Теорема о базисном миноре.
39. Свойства рангов. Неустойчивость ранга.
40. Условие существования нетривиальных решений СЛОУ.
41. Фундаментальная совокупность решений. Теорема о строении множества решений СЛОУ.
42. Линейные неоднородные системы. Теорема Кронекера-Капелли.
43. Строение множества решений СЛАУ.
44. Определение линейного пространства. Расширение понятия вектор.
45. Бесконечномерные линейные пространства. Примеры.
46. Конечномерные линейные пространства. Примеры.
47. Базис и размерность линейного пространства.

48. Определение подпространства линейного пространства. Критерий подпространства.
 49. Сумма и пересечение подпространств (определение и утверждение, что они являются подпространствами).
 50. Теорема о размерностях (теорема Грассмана).
 51. Прямая сумма. Необходимое и достаточное условия прямой суммы.
 52. Замена базиса и преобразование координат.
 53. Изоморфизм линейных пространств.

Контрольные работы

Контрольная работа № 1 *Основы матричной алгебры*

Вариант 10.

1. Теорема о линейной зависимости линейных комбинаций. Следствия. (4 балла)
 / Альтернатива: 3. Понятие линейной зависимости и линейной независимости векторов. (2 балла)
2. Сложение матриц и умножение на скаляр. Свойства линейных операций над матрицами. (2 балла)
3. Найдите общее решение системы линейных уравнений (2 балла):

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 + 4x_5 = 5 \\ 5x_1 - 7x_2 + 11x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 7 \end{cases}$$

4. Решите матричное уравнение (2 балла):

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Найти определитель n -го порядка

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{array} \right|.$$

Контрольная работа № 2 *Векторная алгебра. Общие уравнения прямой и плоскости*

Вариант 1.

1. Найти длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} , если $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$, $(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{b}) = 60^\circ$.
2. Доказать, что прямые AB и CD взаимно перпендикулярны, если $A(6, -1, 2)$, $B(-2, 1, 3)$, $C(2, 4, -2)$ и $D(3, 7, 0)$.
3. Даны векторы $\mathbf{a} = 3i - j + 4k$ и $\mathbf{b} = -2i + 3j - 3k$. Найти вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a}]$ и вычислить его длину.
4. Даны вершины треугольной пирамиды $A(2, 3, 5)$, $B(6, 2, 3)$, $C(3, 7, 2)$ и $D(0, 0, 1)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC .
5. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $5x + 2y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$ и уравнение его диагонали $3x + 7y - 10 = 0$. Составить уравнения остальных сторон и второй диагонали прямоугольника.
6. Составить параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, 3, -5)$ параллельно прямой
$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$
7. Найти проекцию точки $P(5, 2, -1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 33 = 0$.

**Зачетно-экзаменационные материалы для промежуточной аттестации
(экзамен/зачет)**

**ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ
I семестр**

1. Понятие вектора. Действия над векторами.
2. Определения линейной комбинации и линейной оболочки.
3. Понятие линейной зависимости и линейной независимости векторов.
4. Свойства линейной зависимости векторов.
5. Теорема о линейной зависимости линейных комбинаций. Следствия.
6. Понятие базиса и его отличие от порождающей совокупности. Теорема о числе векторов в базисе.
7. Определение базы векторов. Утверждение о соответствии базы и базиса.
8. Утверждение о дополнении до базиса.
9. Координаты вектора. Утверждение о координатах вектора
10. Связь задач о векторах с системами линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
11. Понятие декартовой системы координат.
12. Определение ортонормированного базиса. Радиус-вектор точки.
13. Деление отрезка в данном отношении, вывод формулы.
14. Полярная система координат. Связь полярных и декартовых координат.
15. Цилиндрическая система координат. Связь цилиндрических и декартовых координат.
16. Сферическая система координат. Связь сферических и декартовых координат.
17. Параметрическое уравнение прямой в R^2 и R^3 .
18. Параметрическое уравнение плоскости.
19. Взаимное расположение прямых на плоскости.
20. Взаимное расположение прямых в пространстве.
21. Понятие матрицы, равенство матриц.
22. Виды матриц.

23. Сложение матриц и умножение на скаляр. Свойства линейных операций над матрицами.
24. Произведение матриц и свойства.
25. Возвведение матрицы в степень, многочлен от матрицы.
26. Транспонирование матрицы, свойства
27. Элементарные преобразования над матрицами.
28. Элементарные матрицы и матрицы перестановок.
29. Общие понятия СЛАУ.
30. Алгоритм метода Гаусса. Приведение СЛАУ к ступенчатому виду.
31. Наводящие соображения понятия определителя (на примере СЛАУ 2-го порядка).
32. Определение определителя, перестановки, подстановки.
33. Свойства определителя (все). Доказательство двух свойств.
34. Алгебраические дополнения и миноры.
35. Доказательство утверждения о вычислении определителя разложением по строке (столбцу).
36. Теорема Лапласа. Определитель произведения матриц.
37. Теорема Крамера (доказательство). Следствия.
38. Теорема о линейной зависимости множества строк квадратной матрицы.
39. Понятие обратной матрицы. Утверждение о единственности.
40. Теорема обратимости квадратной матрицы.
41. Свойства обратной матрицы.
42. Нахождение обратной матрицы методом Гаусса.
43. Простейшие матричные уравнения.
44. Обращение блочно-ступенчатой матрицы.
45. Скелетное разложение матрицы, вывод формул.
46. Теорема о размерности линейной оболочки.
47. Ранг матрицы.
48. Теорема о базисном миноре.
49. Свойства рангов. Неустойчивость ранга.
50. Условие существования нетривиальных решений СЛОУ.
51. Фундаментальная совокупность решений. Теорема о строении множества решений СЛОУ.
52. Линейные неоднородные системы. Теорема Кронекера-Капелли.
53. Строение множества решений СЛАУ.
54. Определение и свойства скалярного произведения геометрических векторов.
55. Координатная форма скалярного произведения.
56. Ориентация системы векторов.
57. Определение и свойства векторного произведения векторов.
58. Координатная форма векторного произведения векторов.
59. Определение и свойства смешанного произведения векторов.
60. Координатная форма смешанного произведения векторов.
61. Общее уравнение прямой на плоскости.
62. Полуплоскости. Расстояние от точки до прямой.
63. Общее уравнение плоскости.
64. Полупространства. Расстояние от точки до плоскости.
65. Общее уравнение прямой в пространстве.
66. Взаимосвязь параметрических и общих уравнений прямых и плоскостей.
67. Взаимное расположение прямых и плоскостей.
68. Алгебраическая форма комплексного числа. Комплексная плоскость.
69. Тригонометрическая и показательные формы комплексного числа.
70. Сложение комплексных чисел (в алгебраической и тригонометрических формах).
71. Умножение комплексных чисел (в алгебраической и тригонометрических формах).

72. Возвведение в степень комплексного числа.
73. Извлечение корня их комплексного числа.
74. Решение алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами.
75. Определение линейного пространства. Расширение понятия вектор.
76. Бесконечномерные линейные пространства. Примеры.
77. Конечномерные линейные пространства. Примеры.
78. Базис и размерность линейного пространства.
79. Определение подпространства линейного пространства. Критерий подпространства.
80. Сумма и пересечение подпространств (определение и утверждение, что они являются подпространствами).
81. Теорема о размерностях (теорема Грассмана).
82. Прямая сумма. Необходимое и достаточное условия прямой суммы.
83. Замена базиса и преобразование координат.
84. Изоморфизм линейных пространств.
85. Множества и алгебраические операции.
86. Группа. Абелева группа. Подгруппы.
87. Группа невырожденных диагональных матриц и невырожденных треугольных матриц.
88. Циклические группы. Подгруппы циклической группы.
89. Группа корней степени n из единицы.
90. Первообразные корни.
91. Кольца и поля. Делители нуля.
92. Кольцо вычетов.
93. Алгебра полиномов.
94. Линейное пространство полиномов.
95. Кольцо полиномов.
96. Определитель Вандермонда.
97. Деление полиномов с остатком.
98. НОД полиномов.
99. Значение полинома. Схема Горнера.
100. Корень полинома. Теорема Безу.
101. Основная теорема алгебры. Разложение полиномов.
102. Линейное многообразие. Примеры.
103. Аффинные множества.
104. Гиперплоскости. Выпуклые комбинации векторов.
105. Аффинные пространства, аксиоматика.
106. Системы координат в аффинном пространстве.
107. Плоскости в аффинном пространстве.
108. Алгебраические многообразия. Квадратичные многообразия от двух переменных.
109. Преобразование квадратичного многообразия от двух переменных при помощи поворота декартовой системы координат.
110. Преобразование квадратичного многообразия от двух переменных при помощи сдвига декартовой системы координат.
111. Классификация кривых второго порядка.
112. Канонический вид кривых второго порядка с рангом 2 матрицы коэффициентов.
113. Канонический вид кривых второго порядка с рангом 1 матрицы коэффициентов.
114. Квадратичные многообразия от трех переменных. Классификация относительно рангов матрицы коэффициентов.
115. Канонический вид поверхностей второго порядка с рангом 3 матрицы коэффициентов.
116. Канонический вид поверхностей второго порядка с рангом 2 матрицы коэффициентов.

117. Канонический вид поверхностей второго порядка с рангом 1 матрицы коэффициентов.
118. Билинейные функции. Скалярное произведение как билинейная функция.
119. Билинейные функции. Скалярное произведение как билинейная функция.
120. Определение скалярного произведения в R^n . Линейность по второму аргументу.
121. Неравенство Коши для скалярного произведения.
122. Евклидово пространство. Примеры скалярных произведений.
123. Определение скалярного произведения в C^n . Унитарное пространство.
124. Ортогональность совокупности векторов.
125. Теорема Грама-Шмидта об ортогонализации.
126. Матричная запись скалярного произведения. Матрица Грама.
127. Ортонормированный базис. Формула скалярных произведений в ортонормированном базисе.
128. Линейные подпространства унитарного (евклидового) пространства.
129. Ортогональное дополнение. Свойства.

4.2 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания на зачете и экзамене:

Процедура промежуточной аттестации проходит в соответствии с Положением о текущем контроле и промежуточной аттестации обучающихся ФГБОУ ВО «КубГУ».

Итоговой формой контроля сформированности компетенций у обучающихся по дисциплине является экзамен. Студенты обязаны сдать экзамен в соответствии с расписанием и учебным планом.

ФОС промежуточной аттестации состоит из вопросов к экзамену и результатов текущего контроля.

Экзамен по дисциплине преследует цель оценить работу студента за курс, получение теоретических знаний, их прочность, развитие творческого мышления, приобретение навыков самостоятельной работы, умение применять полученные знания для решения практических задач.

Форма проведения экзамена: устно.

Экзаменатору предоставляется право задавать студентам дополнительные вопросы по всей учебной программе дисциплины.

Результат сдачи экзамена заноситься преподавателем в экзаменационную ведомость и зачетную книжку.

Оценивание уровня освоения дисциплины основывается на качестве выполнения студентом заданий текущего контроля и ответов на вопросы экзамена.

Критерии оценки:

1. Оценка ответов на экзаменационные вопросы (40% итоговой оценки)

Отлично (5)

Полные, развернутые ответы с демонстрацией глубокого понимания темы.

Использование примеров, формул, корректных терминов.

Умение анализировать и сравнивать методы.

% выполнения: 90–100% (допускаются незначительные неточности).

Хорошо (4)

Ответы содержат основные идеи, но без углубленного анализа.

Возможны небольшие ошибки в деталях или формулировках.

% выполнения: 75–89%.

Удовлетворительно (3)

Ответы поверхностные, с существенными пробелами.

Отсутствие примеров или некорректное применение терминов.

% выполнения: 60–74%.

Неудовлетворительно (2)

Отсутствие понимания ключевых концепций.

Грубые ошибки или неспособность ответить на большую часть вопросов.

% выполнения: <60%.

Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания коллоквиума

Критерии оценки:

«Отлично»: Ответ демонстрирует глубокое и системное понимание теоретического материала. Формулировки определений и теорем приводятся точно, полностью и с соблюдением всех необходимых условий. Студент свободно оперирует математической терминологией, устанавливает логические связи между понятиями, поясняет смысл утверждений и при необходимости излагает идею доказательства или приводит релевантный пример. Изложение логично, структурировано, без содержательных или терминологических ошибок.

«Хорошо»: Ответ в целом корректен и отражает хорошее понимание темы. Основные определения и теоремы сформулированы верно, однако могут отсутствовать второстепенные детали (например, одно из условий теоремы не названо явно). Имеется общее представление о связи понятий, возможны незначительные неточности в терминологии или неполное объяснение сути утверждения. Студент способен отвечать на уточняющие вопросы, но аргументация может быть недостаточно развёрнутой.

«Удовлетворительно»: Ответ носит фрагментарный или поверхностный характер. Студент воспроизводит отдельные элементы теории (например, название теоремы или общую идею), но не владеет полной и точной формулировкой. Имеются существенные пробелы: пропущены ключевые условия, перепутаны понятия, отсутствует понимание области применимости результата. Возможны грубые терминологические ошибки. Ответ демонстрирует минимально достаточный уровень для допуска к дальнейшим видам работ, но требует серьёзной доработки.

«Неудовлетворительно»: Ответ отсутствует или содержит фундаментальные ошибки, свидетельствующие о непонимании базовых понятий курса. Студент не может сформулировать даже простейшие определения (например, что такая линейная зависимость векторов, определяет матрицы, базис линейного пространства). Имеет место путаница в терминах, логическая несвязность, попытки угадывания вместо содержательного ответа. Материал не усвоен.

Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания решения задач по тематике лабораторных работ

Критерии оценки:

5 (Отлично): Все задачи правильно классифицированы и решены; решения проверены; выводы полные и обоснованные; оформление аккуратное.

4 (Хорошо): Большинство задач решены верно; допущены мелкие ошибки в вычислениях; выводы присутствуют, но краткие.

3 (Удовлетворительно): Решены не все задачи; есть ошибки алгоритмах решения задач; отсутствует проверка или задача не выполнена.

2 (Неудовлетворительно): Менее половины заданий решено; систематические ошибки в подходе; работа не соответствует заданию.

4.3. Методические указания по организации вычислительной инфраструктуры

Условия применения:

- Курс рассчитан на студентов 1-го года обучения.
- Занятия проводятся в формате лекций и лабораторных аудиторных занятий.
- Наличие проектора и инфраструктуры для демонстрации формулировок теорем и решений типовых задач.
- Доступ к Moodle для скачивания лекционных материалов и лабораторных работ.
- Наличие вычислительных инструментов для самопроверки решений задач матричной алгебры.

Цели, задачи и ожидаемые результаты

Цели организации вычислительной инфраструктуры:

- Обеспечить студентам дополнительные инструменты для самопроверки решений задач матричной алгебры.
- Поддержать процесс самостоятельной подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и экзамену с помощью цифровых ресурсов.

5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.

5.1. Учебная литература

1. Татарников, О. В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник для вузов / О. В. Татарников, А. С. Чуйко, В. Г. Шершнев; под общей редакцией О. В. Татарникова. - Москва: Юрайт, 2025. - 273 с. - URL: <https://urait.ru/bcode/556226> (дата обращения: 29.10.2024). - Режим доступа: для авториз. пользователей. - ISBN 978-5-534-19275-9. - Текст: электронный.
http://megapro.kubsu.ru/MegaPro/UserEntry?Action=Link_FindDoc&id=146475&idb=0
2. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебное пособие для вузов / Л. А. Беклемишева, Д. В. Беклемишев, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров. - 9-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2022. - 496 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/190976> (дата обращения: 22.04.2022). - Режим доступа: для авториз. пользователей. - ISBN 978-5-8114-9224-4. - Текст: электронный.
http://megapro.kubsu.ru/MegaPro/UserEntry?Action=Link_FindDoc&id=148437&idb=0
3. Прокуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учебное пособие для вузов / И. В. Прокуряков. - 16-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2022. - 476 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/183752> (дата обращения: 10.03.2022). - Режим доступа: для авториз. пользователей. - ISBN 978-5-8114-9039-4. - Текст: электронный.
http://megapro.kubsu.ru/MegaPro/UserEntry?Action=Link_FindDoc&id=147141&idb=0
4. Горлач, Б. А. Линейная Линейная алгебра и аналитическая геометрия: практикум для студентов технических и экономических специальностей вузов: учебное пособие для вузов / Б. А. Горлач, Е. П. Ростова. - Санкт-Петербург: Лань, 2021. - 144 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/162373> (дата обращения: 31.10.2023). - Режим доступа: для авториз. пользователей. - ISBN 978-5-8114-6737-2. - Текст: электронный.
http://megapro.kubsu.ru/MegaPro/UserEntry?Action=Link_FindDoc&id=271520&idb=0
5. Ильин В.А. Линейная Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник для студентов университетов и технических вузов, обучающихся по специальностям "Математика", "Прикладная математика и информатика" / В. А. Ильин, Г. Д. Ким; Москов-

- ский государственный университет имени М. В. Ломоносова. - 3-е изд., перераб. и доп. - Москва: Проспект: Изд-во Московского университета, 2025. - 393 с. http://megapro.kubsu.ru/MegaPro/UserEntry?Action=Link_FindDoc&id=281584&idb=0
6. Ларин, С. В. Алгебра и теория чисел. Группы, кольца и поля: учебник для вузов / С. В. Ларин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2025. — 160 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-05567-2. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563870> (дата обращения: 02.08.2025).
 7. Цубербiller О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1970.
 8. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре: учебное пособие для студентов / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. – Изд. 12-е, стер. – СПб.: Лань, 1998. – 288 с.

5.2. Периодическая литература

Использование периодических изданий не предусматривается.

5.4. Интернет-ресурсы, в том числе современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Электронно-библиотечные системы (ЭБС):

1. ЭБС «ЮРАЙТ» <https://urait.ru/>
2. ЭБС «УНИВЕРСИТЕТСКАЯ БИБЛИОТЕКА ОНЛАЙН» <http://www.biblioclub.ru/>
3. ЭБС «BOOK.ru» <https://www.book.ru>
4. ЭБС «ZNANIUM.COM» www.znanium.com
5. ЭБС «ЛАНЬ» <https://e.lanbook.com>

Профессиональные базы данных

Электронно-библиотечные системы (ЭБС):

6. ЭБС «ЮРАЙТ» <https://urait.ru/>
7. ЭБС «УНИВЕРСИТЕТСКАЯ БИБЛИОТЕКА ОНЛАЙН» <http://www.biblioclub.ru/>
8. ЭБС «BOOK.ru» <https://www.book.ru>
9. ЭБС «ZNANIUM.COM» www.znanium.com
10. ЭБС «ЛАНЬ» <https://e.lanbook.com>

Профессиональные базы данных

1. Scopus <http://www.scopus.com/>
2. ScienceDirect <https://www.sciencedirect.com/>
3. Журналы издательства Wiley <https://onlinelibrary.wiley.com/>
4. Научная электронная библиотека (НЭБ) <http://www.elibrary.ru/>
5. Полнотекстовые архивы ведущих западных научных журналов на Российской платформе научных журналов НЭИКОН <http://archive.neicon.ru>
6. Национальная электронная библиотека (доступ к Электронной библиотеке диссертаций Российской государственной библиотеки (РГБ)) <https://rusneb.ru/>
7. Президентская библиотека им. Б.Н. Ельцина <https://www.prlib.ru/>
8. База данных CSD Кембриджского центра кристаллографических данных (CCDC) <https://www.ccdc.cam.ac.uk/structures/>
9. Springer Journals: <https://link.springer.com/>
10. Springer Journals Archive: <https://link.springer.com/>
11. Nature Journals: <https://www.nature.com/>
12. Springer Nature Protocols and Methods: <https://experiments.springernature.com/sources/springer-protocols>
13. Springer Materials: <http://materials.springer.com/>
14. Nano Database: <https://nano.nature.com/>
15. Springer eBooks (i.e. 2020 eBook collections): <https://link.springer.com/>
16. "Лекториум ТВ" <http://www.lektorium.tv/>
17. Университетская информационная система РОССИЯ <http://uisrussia.msu.ru>

Бесплатные образовательные ресурсы

1. Jupyter Notebook – интерактивные вычисления
2. Visual Studio Code – редактор кода с поддержкой Python
3. Google Scholar/arXiv – доступ к научным публикациям

Ресурсы свободного доступа

1. КиберЛенинка <http://cyberleninka.ru/>;
2. Американская патентная база данных <http://www.uspto.gov/patft/>
3. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации <https://www.minобрнауки.gov.ru/>;
4. Федеральный портал "Российское образование" <http://www.edu.ru/>;
5. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" <http://window.edu.ru/>;
6. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов <http://school-collection.edu.ru/> .
7. Проект Государственного института русского языка имени А.С. Пушкина "Образование на русском" <https://pushkininstitute.ru/>;
8. Справочно-информационный портал "Русский язык" <http://gramota.ru/>;
9. Служба тематических толковых словарей <http://www.glossary.ru/>;
10. Словари и энциклопедии <http://dic.academic.ru/>;
11. Образовательный портал "Учеба" <http://www.ucheba.com/>;
12. Законопроект "Об образовании в Российской Федерации". Вопросы и ответы http://xn--273--84d1f.xn--p1ai/voprosy_i_otvety

Собственные электронные образовательные и информационные ресурсы КубГУ

1. Электронный каталог Научной библиотеки КубГУ <http://megapro.kubsu.ru/MegaPro/Web>
2. Электронная библиотека трудов ученых КубГУ <http://megapro.kubsu.ru/MegaPro/UserEntry?Action=ToDb&idb=6>
3. Среда модульного динамического обучения <http://moodle.kubsu.ru>
4. База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций <http://infoneeds.kubsu.ru/>
5. Библиотека информационных ресурсов кафедры информационных образовательных технологий <http://mschool.kubsu.ru>;
6. Электронный архив документов КубГУ <http://docspace.kubsu.ru/>
7. Электронные образовательные ресурсы кафедры информационных систем и технологий в образовании КубГУ и научно-методического журнала "ШКОЛЬНЫЕ ГОДЫ" <http://icdau.kubsu.ru/>

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной теоретический материал, лабораторных занятий, позволяющих студентам в полной мере ознакомиться с понятием дифференциальных уравнений и освоиться в решении практических задач.

По курсу предусмотрено проведение лабораторных занятий, на которых дается прикладной систематизированный материал. В ходе занятий разбираются методы решений задач по темам. После занятия рекомендуется выполнить упражнения, приводимые для самостоятельной работы.

При самостоятельной работе студентов необходимо изучить литературу, приведенную в перечнях выше, для осмыслиения вводимых понятий, анализа предложенных подхо-

дов и методов дискретной математики. При решении новой задачи студент должен уметь выбрать метод решения и его обоснование.

Важнейшим этапом курса является самостоятельная работа по дисциплине. В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки работы с дискретными объектами.

Используются активные, инновационные образовательные технологии, которые способствуют развитию общекультурных, общепрофессиональных компетенций и профессиональных компетенций обучающихся:

- проблемное обучение;
- разноуровневое обучение;
- проектные методы обучения;
- исследовательские методы в обучении;
- обучение в сотрудничестве (командная, групповая работа);
- информационно-коммуникационные технологии.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

Учебно-методическим обеспечением курсовой работы студентов являются:

1. учебная литература;
2. нормативные документы ВУЗа;
3. методические разработки для студентов.

Самостоятельная работа студентов включает:

- оформление итогового отчета (пояснительной записи).
- анализ нормативно-методической базы организации;
- анализ научных публикаций по заранее определённой теме;
- анализ и обработку информации;
- работу с научной, учебной и методической литературой,
- работу с конспектами лекций, ЭБС.

Для самостоятельной работы представляется аудитория с компьютером и доступом в Интернет, к электронной библиотеке вуза и к информационно-справочным системам.

Перечень учебно-методического обеспечения:

1. Основная образовательная программа высшего профессионального образования федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Кубанский государственный университет» по направлению подготовки.
2. Положение о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Кубанский государственный университет».
3. Общие требования к построению, содержанию, оформлению и утверждению рабочей программы дисциплины Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.
4. Методические рекомендации по содержанию, оформлению и применению образовательных технологий и оценочных средств в учебном процессе, основанном на Федеральном государственном образовательном стандарте.
5. Учебный план основной образовательной программы по направлению подготовки.
6. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между

преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

Важнейшим компонентом курса является самостоятельная проектная работа, в ходе которой студент разрабатывает законченное решение для решения задач (кейсов) индустриальных партнеров. Допускается выполнение проектов в командах.

Подход, определяющий установление соответствия кейсов ИП и УГТ (5-7), позволяет четко соотносить этапы развития технологии с вовлеченностью партнера и снижать риски при переходе от лабораторных испытаний к промышленному внедрению.

Кейсы индустриальных партнеров

Кейс №1: Оптимизация архитектуры многоэтажного жилого комплекса

Описание:

Необходимо спроектировать оптимальную структуру этажей жилого дома, учитывая ограничение на количество жильцов, распределение площадей помещений и максимизацию общей жилой площади здания.

Цель: Разработка оптимальной структуры жилого комплекса, позволяющей эффективно разместить жилые площади, исходя из заданных условий и ограничений.

Исходные данные:

- Количество этажей
- Максимальная общая жилая площадь этажа
- Средняя площадь одной квартиры
- Ограничение на число жильцов одного этажа
- Коэффициенты функциональности разных зон квартиры: w_1 (гостиная), w_2 (спальня), w_3 (кухня).

Задания:

1. Постройте матрицу распределения жилплощадей между квартирами и определите оптимальное соотношение площадей комнат (w_i) для каждой зоны.
2. Определите оптимальный набор размеров квартир, обеспечивающий максимальную общую полезную площадь и минимальное общее число жильцов.
3. Рассчитайте расстояние от центра масс жилого комплекса до наиболее удалённой квартиры.

Компетенции:

1. Применение методов оптимизации (линейное программирование, решение уравнений);
2. Умение оперировать понятиями матриц и пространственной геометрии;
3. Умение оперировать понятиями матриц и пространственной геометрии;

Ожидаемый результат:

Полученная методика позволит застройщикам эффективнее планировать строительство жилых комплексов, уменьшая издержки и увеличивая комфорт проживания.

Кейс №2: Применение матриц в задаче регрессии для строительной организации

Описание:

Строительная организация планирует реализовать крупный строительный проект и хочет

заранее оценить рентабельность проекта, основываясь на предварительном финансовом анализе.

Организация собирает статистику о ранее выполненных объектах, включающих такие факторы, как:

1. Затраты на материалы (materials_cost);
2. Стоимость рабочей силы (labor_cost);
3. Время строительства (construction_time, месяцы);
4. Местоположение строительства объекта (location_score, балл от 1 до 10, где 10 — наиболее привлекательное);
5. Итоговая доходность проекта (profit_margin, %).

Цель: создание предсказательной модели, позволяющей оценивать доходность profit_margin нового строительного проекта на основе значений признаков materials_cost, labor_cost, construction_time, location_score.

Задания:

1. Создать матрицу признаков, включив все доступные атрибуты.
2. Применить стандартизацию данных для приведения всех количественных признаков к единому масштабу.
3. Реализовать простую линейную регрессию с использованием матричной записи.
4. Оценить качество модели с помощью среднеквадратичной ошибки (RMSE).
5. Интерпретировать полученные коэффициенты регрессии.

Компетенции:

- Понимание принципов формирования матрицы признаков;
- Освоение техники стандартизации данных;
- Научиться реализовывать линейную регрессию вручную и интерпретировать её результаты;
- Оценивать влияние каждого фактора на итоговую доходность проекта.

Ожидаемый результат:

Обучение модели регрессии на исторических данных с использованием матриц и линейной алгебры позволяет строительной организации оценивать будущую доходность проектов на этапе планирования. Такой подход уменьшает риски инвестирования, позволяет грамотно управлять ресурсами.

Цели задания:

1. Освоить методы предварительной подготовки данных для машинного обучения, включая обработку категориальных признаков и нормализацию числовых данных.
2. Научиться выбирать подходящий алгоритм классификации и настраивать его параметры для конкретной задачи.
3. Овладеть практическими методами разделения данных на обучающий и тестовый наборы, проводить обучение и проверку моделей.
4. Изучить принципы построения отчетов по результатам классификации, интерпретировать полученные метрики и сделать выводы о качестве модели.

Кейс №3: Распределение рабочих смен на строительном участке

Описание:

Требуется равномерно распределить рабочую нагрузку среди бригад строителей, используя концепцию ортонормированного базиса и принципа наименьших квадратов.

Цель:

Равномерное распределение рабочего времени и нагрузки между сотрудниками, уменьшение усталости и стресса на рабочем месте.

Исходные данные:

Количество работников: m , рабочие смены: s , объем работ: v .

Задания:

1. Составьте матрицу загрузки персонала.
2. Найдите ортонормированный базис пространства возможных нагрузок.
3. Решите задачу минимизации среднеквадратичной ошибки нагрузки, распределяя бригады оптимальным образом.

Компетенции

1. Решение задач оптимизации с применением методов линейной алгебры;
2. Умение представлять реальные процессы в виде формальных математических моделей;
3. Расчет коэффициентов регрессии и применение принципа наименьших квадратов.

Ожидаемый результат:

Повышение уровня удовлетворенности клиентов и улучшение репутации управляющей компании благодаря оперативному решению возникающих вопросов.

7. Материально-техническое обеспечение по дисциплине (модулю)

Перечень информационно-коммуникационных технологий

1. Электронная почта mail.ru, yandex.ru
2. Yandex Browser
3. Система управления обучением Moodle – сдача работ

Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения

1. OpenOffice
2. Yandex Browser
3. Mozilla Firefox
4. Google Chrome
5. Wolfram Alpha

№	Вид работ	Наименование учебной аудитории, ее оснащенность оборудованием и техническими средствами обучения
1.	Лекционные занятия	Аудитория, укомплектованная специализированной мебелью и техническими средствами обучения
2.	Лабораторные занятия	Аудитория, укомплектованная специализированной мебелью и техническими средствами обучения, компьютерами, проектором, программным обеспечением
3.	Групповые (индивиду-	Аудитория, укомплектованная специализированной мебе-

	дуальные) консультации	лью и техническими средствами обучения, компьютерами, программным обеспечением
4.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Аудитория, укомплектованная специализированной мебелью и техническими средствами обучения, компьютерами, программным обеспечением
5.	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.

Примечание: Конкретизация аудиторий и их оснащение определяется ОПОП.

Для самостоятельной работы обучающихся предусмотрены помещения, укомплектованные специализированной мебелью, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

Наименование помещений для самостоятельной работы обучающихся	Оснащенность помещений для самостоятельной работы обучающихся	Перечень лицензионного программного обеспечения
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (читальный зал Научной библиотеки)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	Операционная система Windows 10/11, пакет Microsoft Office
Помещение для самостоятельной работы обучающихся	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	Операционная система Windows 10/11, пакет Microsoft Office