МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет компьютерных технологий и прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе,
качеству образования – первый
проректор
________________ Хагуров Т.А.
подпись
« 29 » августа 2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Б1. О.28 Функциональный анализ

Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Профиль Современные методы машинного обучения и компьютерного зрения

Форма обучения очная

Квалификация бакалавр

Краснодар 2025

Рабочая программа дисциплины Функциональный анализ составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Программу составил(и):
С.М. Силинская, доцент КПМ, к.т.н., доцент

И.О. Фамилия, должность, ученая степень, ученое звание подпись

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры прикладной математики
протокол № 01 «28» августа 2025 г.
И.о. заведующего кафедрой Письменский А.В.
подпись

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета компьютерных технологий и прикладной математики
протокол № 01 «28» августа 2025 г.
Председатель УМК факультета Коваленко А.В.
подпись

Рецензенты:
Мостовой Евгений Викторович, генеральный директор ООО «Портал-Юг», e-mail: mostovoy@portal-yug.ru

Луценко Евгений Вениаминович, доктор экономических наук, кандидат технических наук, профессор кафедры компьютерных технологий и систем Федерального государственного бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кубанский государственный аграрный университет имени И.Т. Трубилина», e-mail: prof.lutsenko@gmail.com

1 Цели и задачи изучения дисциплины (модуля)

1.1 Цель освоения дисциплины: формирование у студентов систематических знаний основ функционального анализа как фундаментального математического аппарата для решения задач в области информационных технологий, машинного обучения и компьютерного зрения и освоения основной образовательной программы направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

1.2 Задачи дисциплины

В задачи курса «Функциональный анализ» входят:

- подготовка специалистов, способных применять полученные знания для решения прикладных задач, владеющих достаточными знаниями основных теоретических положений курса «Функциональный анализ»;
- формирование культуры мышления, способности к анализу, обобщению и восприятию информации, к постановке цели и выбору путей ее достижения;
- применение методов функционального анализа в профессиональной сфере;
- формирование умения к строгости изложения материала, к логически непротиворечивой цепочке выводов и заключений;
- развитие навыков применения методов функционального анализа к задачам оптимизации, обработки сигналов и данных;
- подготовка к использованию полученных знаний в профессиональной деятельности.

1.3 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина Б1.О.28 «Функциональный анализ» относится к обязательной части Блока 1 "Дисциплины (модули)" учебного плана. цикла математических, естественнонаучных и общетехнических дисциплин.

Необходимым требованием к «входным» знаниям, умениям и опыту деятельности обучающегося при освоении данной дисциплины является. Для освоения курса студентами необходимо наличие у студентов знаний и умений приобретённых в результате изучения ими базовых курсов математического анализа, алгебры и аналитической геометрии, дифференциальных уравнений. Знания, полученные при изучении данного курса, находят применение при изучении «Уравнений математической физики», «Дифференциальных уравнений», «Теории вероятностей», «Численных методов», ряда дисциплин специализации. Методы функционального анализа находят применение в различных сферах современной прикладной математики, фундаментальной информатики, например при создании современных систем управления, информационных систем, а также в научно-исследовательской работе.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Роль 1: Data Engineer (Инженер по данным)

Задачи:

1. Проектирование и построение ETL-процессов
2. Создание и оптимизация хранилищ данных
3. Обеспечение качества и доступности данных
4. Интеграция разрозненных источников данных

5. Работа с данными в области природопользования, медицины, связи и телекоммуникаций

   Роль 2: ML Engineer (Инженер МО)

   Задачи:

1. Оптимизация производительности и масштабирование моделей
2. Разработка ML-пайплайнов и автоматизация процессов
3. Мониторинг качества моделей в продуктах

   Роль 3: MLOps (Специалист по эксплуатации ИИ)

   Задачи:

1. Автоматизация процессов обучения и развертывания моделей
2. Мониторинг производительности ML-систем
3. Управление версиями моделей и данных
4. Оптимизация вычислительных ресурсов

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций:

Код и наименование индикатора*	Результаты обучения по дисциплине *(знает, умеет, владеет (навыки и/или опыт деятельности))*
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	
ОПК-1.1 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук при построении моделей в заданной предметной области	Знает теоретические положения, лежащие в основе построения теории и методов функционального анализа
ОПК-1.2 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук при выборе методов решения задач профессиональной деятельности	Умеет доказывать утверждения, выбирать методы для решения задач функционального анализа и приложений
ОПК-3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	
ОПК-3.1 Аргументировано применяет современный математический аппарат и информационные технологии, в том числе отечественные, при создании математических моделей для решения задач в области профессиональной деятельности	Владеет методами функционального анализа для исследования различных прикладных задач.
ОПК-3.2 Ориентируется в современных положениях и концепциях прикладной математики и программного обеспечения	Владеет основными методами решения типовых и оригинальных задач функционального анализа, способен применять эти методы для решения конкретных прикладных задач

Результаты обучения по дисциплине достигаются в рамках осуществления всех видов контактной и самостоятельной работы обучающихся в соответствии с утвержденным учебным планом.

Индикаторы достижения компетенций считаются сформированными при достижении соответствующих им результатов обучения.

2 Структура и содержание дисциплины

2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 4 зач. ед. (144 часа), их распределение по видам работ представлено в таблице

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Вид учебной работы</th><th rowspan="2">Всего Часов</th><th>Семестры</th></tr>
<tr><th>6</th></tr>
<tr><td colspan="2">Контактная работа, в том числе:</td><td>86,3</td><td>86,3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Аудиторные занятия (всего):</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Занятия лекционного типа</td><td>48</td><td>48</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторные занятия</td><td>32</td><td>32</td></tr>
<tr><td colspan="2">Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">Иная контактная работа:</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Контроль самостоятельной работы (КСР)</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Промежуточная аттестация (ИКР)</td><td>0,3</td><td>0,3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостоятельная работа, в том числе:</td><td>22</td><td>22</td></tr>
<tr><td colspan="2">Курсовая работа</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">Проработка учебного (теоретического) материала</td><td>22</td><td>22</td></tr>
<tr><td colspan="2">Выполнение индивидуальных заданий (подготовка сообщений, презентаций)</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">Подготовка к текущему контролю</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">Контроль:</td><td>35,7</td><td>35,7</td></tr>
<tr><td colspan="2">Подготовка к экзамену</td><td>35,7</td><td>35,7</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Общая трудоемкость</td><td>час.</td><td>144</td><td>144</td></tr>
<tr><td>в том числе интерактивные</td><td>в том числе контактная работа</td><td>86,3</td></tr>
<tr><td>зач. ед</td><td>4</td><td>4</td></tr>
</table>

2.2 Содержание дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

№	Наименование разделов (тем)	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	СРС
1	2	3	4	5	6	7
1.	Элементы теории множеств	8	4	-	2	2
2.	Мера Лебега и измеримые функции	12	6	-	4	2
3.	Интеграл Лебега	10	4	-	4	2
4.	Линейные пространства	10	4	-	4	2

5.	Метрические пространства	12	6	-	4	2
6.	Нормированные пространства	14	6	-	4	4
7.	Линейные функционалы	10	6	-	2	2
8.	Линейные операторы	12	6		4	2
9.	Преобразование Фурье	14	6		4	4
	ИТОГО по разделам дисциплины	102	48	-	32	22
	Контроль самостоятельной работы (КСР)	6				
	Промежуточная аттестация (ИКР)	0,3				
	Подготовка к текущему контролю	35,7				
	Общая трудоемкость по дисциплине	144				

Примечание: Л – лекции, ПЗ – практические занятия / семинары, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента

2.3 Содержание разделов (тем) дисциплины

2.3.1 Занятия лекционного типа

№	Наименование раздела (темы)	Содержание раздела (темы)	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Элементы теории множеств	Основные понятия теории множеств. Операции над множествами. Отображения множеств. Мощность множеств, счетные и несчетные множества.	Контрольные вопросы
2.	Мера Лебега и измеримые функции	Мера Лебега на прямой. Мера Лебега в R^n. Измеримые функции и их свойства.	Контрольные вопросы
3.	Интеграл Лебега	Необходимость обобщения понятия интеграла Римана. Интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции, понятие. Теорема о существовании интеграла Лебега. Сравнение с интегралом Римана. Интеграл Лебега по произвольному измеримому множеству. Свойства интеграла Лебега. Интеграл Лебега от неограниченной функции.	Контрольные вопросы
4.	Линейные пространства	Понятие линейного пространства Примеры линейных пространств. Евклидовы пространства.	Контрольные вопросы
5.	Метрические пространства	Метрика, аксиомы и определение метрического пространства (МП), примеры МП. Множества в МП, принцип вложенных шаров. Последовательности в МП, полнота МП, компактность и предкомпактность. Эпсилон-сети и вполне ограниченные множества, теорема Хаусдорфа.	Контрольные вопросы
6.	Нормированные пространства	Норма и линейные нормированные пространства. Примеры нормированных пространств. Банаховые пространства. Теорема о полноте конечномерного ЛНП. Сравнение норм. Ряды в нормированных пространствах:	Контрольные вопросы

		сходимость, критерий Коши, абсолютная сходимость	
7.	Линейные функционалы	Линейные функционалы в ЛНП . Определение. Теорема о коразмерности ядра линейного функционала. Теорема Хана-Банаха в линейном пространстве. Линейные непрерывные функционалы в ЛНП. Непрерывность и ограниченность линейного функционала в ЛНП. Теорема Хана-Банаха в ЛНП. Сопряженное пространство L^{*}.Теорема о полноте L^{*}. Слабая сходимость в ЛНП. Теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в Н-пространстве.	Контрольные вопросы
8.	Линейные операторы	Отображения. Принцип неподвижной точки для сжимающего отображения. Линейный оператор в линейном пространстве. Понятие, примеры. Линейный непрерывный оператор в ЛНП. Непрерывность и ограниченность. Норма линейного ограниченного оператора. Свойства, примеры. Равномерная сходимость линейных операторов. Теоремы о равномерной сходимости в единичном круге. Следствие. Полнота пространства $L(L, L_1)$. Сильная сходимость в $L(L, L_1)$. Примеры. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха-Штейнгауза. Обратный оператор. Определение. Теорема о линейности оператора A^{-1}. Достаточное условие ограниченной обратимости линейного оператора. Метод проекционные обращения линейного оператора. Теорема о существовании оператора $(I + A)^{-1}$. Интегральные уравнения Фредгольма. Решение интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром. Теорема об ограниченной обратимости оператора, близкого к ограниченно обратимому. Регулярное множество, спектр и резольвента линейного оператора. Спектральный радиус. Понятие сопряженного оператора. Теорема о его представлении в Н-пространстве. Теорема о линейности и непрерывности сопряжённого оператора. Самосопряжённые операторы. Свойства. Определение и простейшие свойства компактных операторов. Теорема о структуре компактного оператора. Производные Фреше и Гато.	Контрольные вопросы
9.	Преобразование Фурье	Понятие интеграла Фурье. Комплексная форма интеграла Фурье. Понятие преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье Косинус- и синус-преобразования Фурье	Контрольные вопросы

2.3.2 Занятия семинарского типа не предусмотрены

2.3.3 Лабораторные занятия

№	Наименование раздела (темы)	Тематика лабораторных занятий	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Элементы теории множеств	Мощность множества. Счетные и несчетные множества. Операции над множествами	Решение задач
2.	Мера Лебега и измеримые функции	Мера Лебега. Множества меры 0. Измеримые множества. Измеримые функции	Решение задач
3.	Интеграл Лебега	Интеграл Лебега от ограниченных функций. Интеграл Лебега от неограниченных функций	Решение задач Контрольная работа
4.	Линейные пространства	Линейные пространства. Базис.	Решение задач
5.	Метрические пространства	Метрика. Аксиомы метрики. Примеры метрических пространств. Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Сходимость последовательностей в метрических функциональных пространствах. Замкнутость, ограниченность, открытость, полнота и компактность в метрических пространствах.	Решение задач Контрольная работа
6.	Нормированные пространства	Норма в линейных пространствах. Сходимость в линейных нормированных пространствах. Банаховы пространства. Ряды в банаховых пространствах. Евклидовы пространства, общие свойства. Ортогонализация в гильбертовом пространстве. Проектирование на подпространство евклидова пространства.	Решение задач Контрольная работа
7.	Линейные функционалы	Ограниченные функционалы. Норма функционала в пространствах l_p^n, $l_{p.}$.Норма линейного функционала в $L_p(a,b)$, $C[a,b]$.	Решение задач
8.	Линейные операторы	Линейные операторы. Ограниченные операторы. Норма оператора. Обратный оператор. Интегральные уравнения. Спектр, резольвента оператора. Сопряженные операторы. Вполне непрерывные операторы	Решение задач Контрольная работа
9.	Преобразование Фурье	Интеграл Фурье. Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье	Решение задач Контрольная работа

2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Курсовые работы не предусмотрены.

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	Проработка и повторение лекционного материала, материала учебной и научной литературы, подготовка к семинарским занятиям	Методические указания для подготовки к лекционным и семинарским занятиям, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №10 от 18.05.2023 г
2	Подготовка к текущему контролю	Методические указания для подготовки к лекционным и семинарским занятиям, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №10 от 18.05.2023 г

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:
– в печатной форме увеличенным шрифтом,
– в форме электронного документа,
– в форме аудиофайла,
– в печатной форме на языке Брайля.

Для лиц с нарушениями слуха:
– в печатной форме,
– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
– в печатной форме,
– в форме электронного документа,
– в форме аудиофайла.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

3. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины (модуля)

С точки зрения применяемых методов используются как традиционные информационно-объяснительные лекции, так и интерактивная подача материала с мультимедийной системой. Компьютерные технологии в данном случае обеспечивают возможность разнопланового отображения алгоритмов и демонстрационного материала. Такое сочетание позволяет оптимально использовать отведенное время и раскрывать логику и содержание дисциплины.

Лекции представляют собой систематические обзоры теории функционального анализа.

Лабораторное занятие позволяет научить студента применять теоретические знания при решении и исследовании конкретных задач. Лабораторные занятия проводятся в традиционных аудиториях. Подход разбора конкретных ситуаций широко используется как преподавателем, так и студентами при проведении анализа результатов самостоятельной работы. Это обусловлено тем, что в процессе исследования часто встречаются задачи, для которых единых подходов не существует. Каждая конкретная задача при своем исследовании имеет множество подходов, а это требует разбора и оценки целой совокупности конкретных ситуаций.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

4.1 Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины «Функциональный анализ».

Оценочные средства включает контрольные материалы для проведения **текущего контроля** в форме контрольных заданий, разноуровневых заданий и **промежуточной аттестации** в форме вопросов и заданий к экзамену.

Структура оценочных средств для текущей и промежуточной аттестации

№ п/п	Код и наименование индикатора	Результаты обучения	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	ОПК-1.1 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук при построении моделей в заданной предметной области	Знает теоретические положения, лежащие в основе построения теории и методов функционального анализа	Задания для контрольных и самостоятельных работ 1-40	Вопросы на экзамене 1-15, 45-60
2	ОПК-1.2 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук при выборе методов решения задач профессиональной деятельности	Умеет доказывать утверждения, выбирать методы для решения задач функционального анализа и приложений	Задания для контрольных и самостоятельных работ 41-44	Вопросы на экзамене, требующие доказательства и/или вывод расчётных формул: 4- 10,12-15,18-20, 32, 33, 34, 37-40, 46, 47, 49, 51, 53, 55, 56, 58, 59, 62, 65, 66, 67, 70
3	ОПК-3.1 Аргументировано применяет современный математический аппарат и информационные технологии, в том числе отечественные, при создании математических моделей для решения задач в области профессиональной деятельности	Владеет методами функционального анализа для исследования различных прикладных задач.	Кейс 1-3	Практические задачи на экзамене
4	ОПК-3.2 Ориентируется в современных положениях и концепциях прикладной математики и программного обеспечения	Владеет основными методами решения типовых и оригинальных задач функционального анализа, способен применять эти методы	Кейс 4-6	Практические задачи на экзамене

		для решения конкретных прикладных задач		

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

1. Может ли множество, имеющее хотя бы одну внутреннюю точку, иметь нулевую меру?
2. Построить для любого $\alpha \in (0,1)$ замкнутое подмножество X отрезка$[0,1]$ без внутренних точек такое, что $m(X) = \alpha$.
3. Пусть X – множество чисел из отрезка $[0,1]$, в десятичной записи которых отсутствует цифра 8. Найти $m(X)$.
4. Являются ли функции $f(x)$ и $f^3(x)$ измеримыми одновременно? А функции $f(x)$ и $f^2(x)$?
5. Вычислить интеграл Лебега $\int_0^1 \quad f(x)dx$, где
   a) $f(x) = \{x^2$, для всех иррациональных x, больших, чем $\frac{1}{3}$,
   x^3, для всех иррациональных x, меньших, чем $\frac{1}{3}$ 0, если $x \in (0,1) \cap Q$. ,
   b) $f(x) = \{x^2$, если $x \in [0,1] \backslash Q$, 1, если $x \in Q$.
   c) $f(x) = \{sin\, sin\, \pi x$, если $x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right] \backslash D$, $cos\, cos\, \pi x$, если $x \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right) \backslash D$,
   x^2, если $x \in D$, где D – канторово множество.
6. Привести пример функции $x(t)$, такой, что $x \in L_1[0,\ 1] \backslash L_2[0,\ 1]$.
7. Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние на множестве R:
   1) $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$; 2)$\rho(x,y) = |sin\, sin\, (x-y)\ |$; 3) $\rho(x-y) = (x-y)^2$;
   4) $\rho(x,y) = |arctgx - arctgy|$; 5) $\rho(x,y) = arctg|x-y|$; 6) $\rho(x,y) = |x^2 - y^2|$;
   7) $\rho(x,y) = ln(1 + |x-y|)$; 8) $\rho(x,y) = e^{|x-y|} - 1$; 9) $\rho(x,y) = |x^3 - y^3|$;
   10) $\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$; $\rho(x,y) = cos^2(x-y)$?
8. Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние на множестве R^n:
   1) $\rho(x,y) = |x_k - y_k|$; 2) $\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \quad |x_k - y_k|$;
   3) $\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \quad |x_k - y_k|^2$; 4) $\rho(x,y) = |x_k - y_k|$;
   5) $\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \quad k|x_k - y_k|$; 6) $\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \quad |x_k - y_k| lnk$?
9. Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние в классе функций, непрерывных на отрезке $[0,\ 1]$:
   1) $\rho(x,y) = |x(t) - y(t)|$; 2) $\rho(x,y) = sup \frac{1}{t} \int_0^t \quad |x(\tau) - y(\tau)| d\tau,\ \ t \in (0,1]$;
   3) $\rho(x,y) = \sqrt{\int_0^1 \quad |x(t) - y(t)| dt}$; 4) $\rho(x,y) = |x(t) - y(t)| + \int_{\frac{1}{2}}^1 \quad |x(\tau) - y(\tau)| d\tau$?
10. Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние в классе функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,\ 1]$:

$\rho(x,y) = |x'(t) - y'(t)|$;

1) $\rho(x,y) = |x(0) - y(0)| + |x'(t) - y'(t)|$;
2) $\rho(x,y) = |x(t) - y(t)| + |x'(t) - y'(t)|$;
3) $\rho(x,y) = |x(t) - y(t)| + |x'(t) - y'(t)|$?

11. Найти расстояние между функциями $x(t) = sin\, sin\, 2t$ и$cos\, cos\, 2t$ в пространстве 1) $C[0,\pi]$; 2) $C^1[0,\pi]$; 3)$L_1[0,\pi]$; 4) $L_2[0,\pi]$.

12. Найти расстояние между функциями $x(t) = t^3$ +t и y(t)= $2t^3 + t^2$ в пространстве 1) $C[-1,1]$; 2) $C^1[-1,1]$; 3)$L_1[-1,1]$4) $L_2[-1,1]$.

13. Исследовать на сходимость последовательность $\{x_k\}$ в пространстве 1)l_1^n; 2)l_2^n; 3) l_∞^n:

а) $x_k = \left(\frac{1}{k},\ 0, \dots, 0\right)$; б) x_k=$(e^{-2k}, 1, 1, \dots, 1)$; в)$x_k = \left(e^{-k}, e^{-k^2}, \dots, e^{-k^n}\right)$;

г) $x_k = (cos\, cos\, k, 2, 2, \dots, 2\,)$; д) $x_k = \left(k^2,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

14. Исследовать на сходимость последовательность $\{x_k\}$ в пространстве $1) l_1;\ 2) l_{2;}\ ;\ \ 3) l_\infty$

а) $x_k = \left(0, \dots, 0, \hat{\frac{1}{k}}, 0, \dots\right)$; б) $x_r = \left(0, \dots, 0, \hat{\frac{1}{k}}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \dots\right)$; в) $x_k = \left(1, 1, \dots 1, \hat{\frac{1}{k}}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}\right)$;
г) $x_k = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \hat{\frac{1}{k}}, 0, 0, \dots\right)$; д) $x_k = \left(2, 2, \dots, \hat{2}, 0, 0, \dots\right)$; е) $x_k = \left(0, \dots, 0, \hat{3}, 0, \dots\right)$;
ж) $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \dots, \widehat{\frac{1}{2k-1}}, \frac{1}{2k}, \dots\right)$; з)$x_k = (e^{-k}, 0, 0, \dots, 0, 7, 0, 0 \dots.)$;
и)$x_k = \left(5, 0, 0, \dots, 0, \widehat{\frac{1}{k+1}, 0, 0}, \dots\right)$; к) $x_k = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \hat{\frac{1}{\sqrt{k}}}, 0, 0, \dots\right)$.

15. Исследовать на сходимость в пространстве 1) $C[0, 1]$; 2) $L_2(0, 1)$ последовательность
а) $x_k(t) = t^k$; б) $x_k(t) = sin\, sin\, t\ - sin\, sin\, \frac{t}{k}$; в) $x_k(t) = \frac{kt}{\sqrt{k^2+1}}$; г) $x_k(t) = e^{-\frac{t}{k}}$;
д) $x_k(t) = t^k - t^{k+1}$; е) $x_k(t) = t^k - t^{2k}$; ж) $x_k(t) = te^{kt}$.

16. В каких пространствах $L_p[0, 1]$ и к какому пределу сходятся последовательности:
а) $x_k(t) = \{\sqrt{k},\ \ t \in \left[0, \frac{1}{k}\right]\ 0,\ \ \ t \in (\frac{1}{k}, 1]$; б) $x_k(t) = \{ln\, ln\, (k)\,, t \in \left[0, \frac{1}{k}\right]\ t \in (\frac{1}{k,}, 1]$;
в) $x_k(t) = \{e^k, t \in \left[0, \frac{1}{k}\right]\ 0,\ \ \ t \in (0,1]$; в)$x_k(t) = \{\sqrt[3]{k},\ t \in \left[0, \frac{1}{k}\right]\ \frac{1}{\sqrt[3]{t}},\ t \in (\frac{1}{k}, 1]$.

17. Исследовать на сходимость в пространстве 1) $C[0, 1]$; 2) $L_2(0, 1)$ ряды
а) $\sum_{k=0}^{\infty}\ \ t^k$; б) $\sum_{k=0}^{\infty}\ \ (1 - t)t^k$; в) $\sum_{л=0}^{\infty}\ \ e^{-k(t+1)}$.

18. Является ли открытым множество функций из пространства $C[0, 1]$, удовлетворяющих условию:
а) $0 < x(t) < 1 + t^2,\ t \in (0, 1)$,
б) $\int_0^1\ \ |x(t)|dt < 1$;
в)$\int_0^1\ \ x(t)dt < 1$;
г) $\left|x(\frac{1}{3})\right| < 2$?

19. Является ли замкнутым множество функций из $C[0, 1]$, удовлетворяющих условию
а) $sgnx\left(\frac{1}{2}\right) = 1$;
б) sgnx(t)=1, $t \in [0, 1]$?

20. Являются ли компактными, предкомпактными в $C[0, 1]$ следующие семейства функций;
1) $M = \left\{x(t)|\ |x(0)| \le K_0, |x'(t)| \le K_{1,}, t \in [0, 1]\right\}$;
2) $M = \left\{x(t)||x(0)| \le K_0, \int_0^1\ \ (x'(t))^2 dt \le K_1\right\}$;
3) $M = \{x(t)||x(t)| \le t,\ \ t \in [0; 1]\}$;
4) $x_\alpha(t) = t^\alpha$, если а)$0 < \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2 < \infty$; б) $0 < \alpha_1 \le \alpha$;
5) $x_\alpha(t) = e^{(t+\alpha)}$, если а)$\alpha \in R$; б) $\alpha \ge 0$; в) $\alpha \le 0$;
6) $x_\alpha(t) = sin\, sin\, (\alpha t)$, если а)$\alpha \in R_+$; б) $0 \le \alpha \le \alpha_2 < \infty$;
7) $x_\alpha(t) = sin\, sin\, (\alpha + t)$, если а) $\alpha \in R$; б)$0 < \alpha_1 < \alpha < \alpha_2 < \infty$?

21. Провести процесс ортогонализации системы функций $\{1, t, t^2, t^3\}$ в пространстве
а) $L_2(-1, 1)$; б)$L_2(0, 1)$.

22. В пространстве l_2 найти множество векторов, ортогональных вектору x_0 , если
а) $x_0 = \left(0, 0, \dots, 0, \hat{1}, 0, \dots\right)$; б) $x_0 = (0, 1, 0, 1, \dots)$; в)$x_0 = \left(1, 1, \dots, \hat{1}, 0, 0, \dots\right)$.

23. В пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ найти проекции функций
а) $x(t) \equiv 0$; б) $x(t) = sin\, sin\, \left(\frac{t}{2}\right)$; в) $x(t) = t$; г) $x(t) = cos\, cos\, 2t$
на подпространство $X_0 = \{x(t) = c_1 + c_2\, sin\, sin\, t\ + c_3\, cos\, cos\, t\,\}$.

24. В пространстве $L_2[-1, 1]$ найти проекции функций
а) $x(t) = t^2$; б) $x(t) = t^3$

на подпространство $X_0 = \{x(t) = c_1 + c_2 t\}$.

25.Какие из приведенных формул задают оператор:

1) $A[x(t)] = |x(\tau)|$; $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
2) $A[x(t)] = x'(t)$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
3) $A[x(t)] = x(t+1)$, A: $C[0,\infty) \to C[0,\infty)$;
4) $A[x(t)] = tx(t)$, A: $C[0,\infty) \to C[0,\infty)$;
5) $A[x(t)] = x(0)$, A: $L_1(0,1) \to L_1(0,1)$;
6) $A[x(t)] = \frac{1}{x(t)}$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
7) $A[x(t)] = x(t-1)$, A: $C[0,\infty) \to C[0,\infty)$;
8) $A[x(t)] = \int_0^t x(t)dt$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
9) $A[x(t)] = \int_0^t x(t)dt$, A: $L[0,\infty) \to L[0,\infty)$;
10) $A[x(t)] = signx(t)$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
11) $A[x(t)] = \int_1^t x(\tau)d\tau$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
12) $A[x(t)] = \int_0^1 e^{t\tau}x(t)dt$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
13) $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$, $A : l_\infty \to l_2$;
14) $(Ax)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^2} sin\, sin\, kt$, $A : l_\infty \to C[0,1]$;
15) $Ax = \left(x(1), x(\frac{1}{2}), x\left(\frac{1}{3}\right), \dots\right)$, $A : C[0,1] \to l_1$;
16) $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{2x_2}{3}, \dots\right)$, $A : l_\infty \to l_\infty$;
17) $Ax = (x_1, x_2^2, x_3^3, \dots)$, $A : l_2 \to l_2$?

26. Привести примеры нетривиальных операторов в заданных пространствах

1) $C[0,1] \to C[-1,1]$;
2) $R^2 \to R^3$;
3) $l_1 \to l_2$;
4) $l_\infty \to C[0,1]$;
5) $R^3 \to R^2$;
6) $l_\infty \to R^2$;
7) $l_\infty \to l_1$;
8) $L_1(0,1) \to L_2(0,1)$;
9) $C(0, \infty) \to l_1$;
10) $L_1(0,1) \to C[0,1]$;
11) $C[0,1] \to l_\infty$
12) $C[0,1] \to C[1,3]$;
13) $C^1[0,1] \to l_2$.

27. Какие из приведенных ниже операторов являются линейными?

1) $A[x(t)] = 3x(t) + t$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
2) $A[x(t)] = \int_0^{\frac{1}{3}} (t^3 + \tau^3)x(\tau)d\tau$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
3) $A[x(t)] = cos\, cos\, 2x(t)$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
4) $A[x(t)] = tx(t^2)$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
5) $A[x(t)] = |x(t)|$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
6) $A[x(t)] = \int_0^1 e^{\tau t}d\tau$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
7) $(Ax)(t) = cos\, cos\, (tx_2)$, $A : R^2 \to C(-\infty,\infty)$;
8) $(Ax)(t) = 4x_1^2 t + 3x_2 t^2$, $A : R^2 \to C(-\infty,\infty)$;
9) $(Ax)(t) = x_1\, sin\, sin\, t - 3x_2\sqrt[3]{t}$, $A : R^2 \to C(-\infty,\infty)$;

28. Проверить линейность и ограниченность функционалов и найти их нормы в l_1, l_2, l_∞:

1) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$; 2) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k$; 3) f(x)=$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x_k}{k!}$.

29. Найти норму линейного функционала а) в $C[0,1]$, б) в $L_1[0,1]$, в) в $L_2[0,1]$, заданного выражением $\int_0^1 h(t)x(t)dt$, если функция $h(t)$ равна:

1) $\{-3,\ 0 \le t \le 0{,}6, 0{,}2,\ 0{,}6 < t \le 1$;
2) $ln\,(t + \frac{1}{4})$;
3) $2t - 1$;
4) $cos\,cos\,\pi t$;
5) 2-$sin\,sin\,\pi t$
6) $\sqrt{t+4}$;
7) $\sqrt{t^2 - t + 6}$;
8) e^{2t} -3;
9) $ch2t$;
10) $cos\,cos\,\left(t - \frac{1}{2}\right)$;
11) $t^3 - t$;
12) $t^2 - 4t + \frac{1}{3}$;

30. Найти нормы следующих операторов.
1) $A[x(t)] = \int_1^t x(\tau)d\tau$, $A \in L(C[0,1])$;
2) $A[x(t)] = x'(t)$, $A \in L(C^1[0,1], C[0,1])$;
3) $A[x(t)] = t^2 x(t)$, $A \in L(L_2[0,1])$;
4) $A[x(t)]$=$e^{t+1}x(t)$, $A \in L(C[0,1])$;
5) $A[x(t)]$=$\frac{t}{t+1}x(t)$, $A \in L(C[0,\infty))$;
6) $A[x(t)]$=$\int_0^t x(\tau)\,sin\,sin\,\tau d\tau$, $A \in L(C[0,1])$;
7) $A[x(t)]$=$t^2 x(0) - tx\left(\frac{1}{2}\right)$, $A \in L(C[0,1])$;
8) $A[x(t)]$=x(t^4), $A \in L(C[0,1])$;
9) $A[x(t)]$ =($t^2 + 2)x(0)$, $A \in L(C[0,1])$;
10) $A[x(t)]$=t$\int_0^1 x(t)dt$, $A \in L(L_2[0,1])$;
11) $A[x(t)]$=$\int_0^{\pi} (2t + \tau^2)x(\tau)d\tau$, $A \in L(L_1[0,\pi])$;
12) $A[x(t)]$=$\int_0^{\pi} (t - \tau + 1)x(\tau)d\tau$, $A \in L(L_1[0,\pi], C[0,\pi])$;
13) $A[x(t)]$=$\int_0^{\pi} (sin\,sin\,t\ + 2\,cos\,cos\,\tau\,)x(\tau)d\tau$, $A \in L(C[0,\pi], L_1[0,\pi])$;
14) $A[x(t)]$=$\int_0^{\pi} (2t - \tau)^2 x(\tau)d\tau$, $A \in L(L_2[0,\pi])$;
15) $Ax = \left(-x_1, \frac{x_2}{2}, -\frac{x_3}{3}, \dots\right)$, $A \in L(l_1)$;
16) $Ax = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{2x_3}{3}, \frac{3x_4}{4}, \dots\right)$, $A \in L(l_1)$;
17) $Ax = (x_1, x_3, x_2 + x_5)$, $A \in L(l_\infty, R^3)$.

31. Найти оператор, сопряженный оператору $A \in L(l_2)$:
1) $Ax = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$
2) $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, \dots)$, $\{\lambda_n\} \in l_\infty$;
3) $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$;

4) $Ax = (x_2, x_3, \dots)$;

5) $Ax = (5x_1 - 2x_2, x_3,\ x_4, \dots)$.

32. Найти оператор, сопряженный оператору $A \in L(L_2[0,1])$, $A[x(t)] = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$, если функция $K(t,s)$имеет вид:

1) 1;
2) t;
8) te^{-s}
9) t($e^{3s} - \frac{1}{5}$);

3) s;
4) t-s;
5) t+$sin\,sin\,2s$;
6) $|2\pi - 2s|\, sin\,sin\,4t$;
7) $2t-3s$;

10) $\frac{1+s}{1+t}$;
11) $sin\,sin\,(t-2s)$;
12) $e^{t-s}\, cos\,cos\,\left(t^3-\sqrt{s}\right)$;
13) t$sin\,sin\,s\; - s^2\, cos\,cos\,t$.

33. Исследовать обратимость оператора $A \in L(l_p)$, заданного бесконечной матрицей (a_n), если:
1) $a_n = 1 + (-1)^n$; 2) $a_n = \frac{1}{n}$; 3) $\frac{1}{3} \le |a_n| \le 4$.
34. Исследовать обратимость оператора $A \in L(C[0,1])$, заданного соотношением: $A[x_0(t)] = x_0(t)x(t)$, где

1) $x_0(t) = (t-c) - |t-c|,\ \ c \in (a,b)$; 2) $x_0(t) = (t-c),\ \ \ \ c \in (a,b)$;

2) $x_0(t) = 1 + t^2$.
35. Исследовать обратимость оператора $A \in L(C[0,1])$:
1) $A[x(t)]$=$\int_0^t x(s)ds$;
2) $A[x(t)]$=$\int_0^1 tsx(s)ds$;
3) $A[x(t)]$=x(t)-$\int_0^t x(s)ds$;
4) $A[x(t)]$=x$(t) - \int_0^1 x(s)ds$;
5) $A[x(t)]$=x$(t) - \int_0^1 sx(s)ds$.
Если оператор A обратим, то найти его обратный.
36. Какие из операторов $A \in L(l_2)$ вполне непрерывны:
1) $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$, 2) $Ax = (x_2, x_3, , \dots)$, 3) $Ax = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$,
37. Какие из операторов $A \in L(C[0,1])$ вполне непрерывны:
1) $A[x(t)]$=$\int_0^t x(s)ds$;
2) $A[x(t)] = (t+2)x(t)$;
3) $A[x(t)]$=x(0) $cos\,cos\,(2t) - x(1)\, sin\,sin\,(2t)$;
4) $A[x(t)]$=$\int_0^t e^{ts}x(s)ds$;
5) $A[x(t)]$=x(t^2).
38. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $A \in L(l_\infty)$:
1) $Ax = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n, \dots)$; 2) $Ax = \left(x_3, x_1, x_2, \dots, x_{n,\dots}\right)$;
3) $Ax = (-x_1, x_2, \dots, (-1)^n x_n, \dots)$; 4) $Ax = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$;
5) $Ax = (0, 0, \dots, 0, x_n, 0, , \dots)$; 6) $Ax = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$;
7) $Ax = \left(0, x_1, x_2, \dots, x_{n,\dots}\right)$; 8) $Ax = (x_2, x_3, , \dots)$.
39. Найти спектр и спектральный радиус оператора $A \in L(C[0,1])$:
1) $A[x(t)]$=$\int_0^t x(s)ds$; 2) $A[x(t)] = (t+2)x(t)$; 3) $A[x(t)] = tx(t)$;
4) $A[x(t)]$=$\int_0^1 tsx(s)ds$; 5) $A[x(t)]$=$\int_0^1 (t+s)x(s)ds$.
40. Решить уравнение при заданных значениях свободного члена $f(t)$:
1) x$(t) = \frac{1}{3}\int_0^1 x(s)ds + f(t)$, а) $f(t) = 1$, б) $f(t) = t$, в) $f(t) = 1 - t$;
2) $x(t) = \int_0^1 tsx(s)ds + f(t)$, а) $f(t) = t$, б) $f(t) = t^2$, в) $f(t) = t - t^2$;
3) $x(t) = \int_0^\pi cos\,cos\,s\; x(s)ds + f(t)$, а) $f(t) =$$sin\,sin\,t$, б) $f(t) =$$cos\,cos\,t$;

4) $x(t) = \int_0^{\pi}$ $cossin\, sin\, t\, cos\, s\, x(s)ds + f(t),\ a)\ f(t) = sin\, sin\, t$, б) $f(t) = cos\, cos\, t$;

5) $x(t) = \int_{-1}^{1}$ $(ts + t^2 s^2)x(s)ds + f(t),\ a)\ f(t) = 1$, б) $f(t) = t^2 + t$;

6) $x(t) = \int_0^{2\pi}$ $cos\, cos\, (t - s)\, x(s)ds + f(t),\ a)\ f(t) = sin\, sin\, t$, б) $f(t) = cos\, cos\, t$.

41. Проверьте, является ли функция $d(A, B) = 1 - \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$, заданная на парах конечных множеств (кластеров), метрикой. Если не является, то какие аксиомы метрики нарушаются? Реализуйте функцию на Python и протестируйте её на примерах

42. Даны векторы слов a = (1, 0, 2), b = (0, 1, 1), c = (2, 1, 0). Нормализуйте их и убедитесь, что они лежат на единичной сфере в R^3. Покажите, что косинусное сходство $cosine(a, b) = \frac{\langle a,b \rangle}{|a||b|}$ эквивалентно скалярному произведению в некотором Гильбертовом пространстве. Реализуйте расчёт.

43. Рассмотрим ядро $K(x, y) = (1 + x \cdot y)^2$. Найдите явное отображение $\varphi(x)$ в Гильбертово пространство, такое что $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = K(x, y)$ (теорема Мерсера). Реализуйте это отображение и проверьте тождество для произвольных точек.

44. Для заданной матрицы данных X (например, 100x3, 100 объектов, 3 признака) найдите её ковариационную матрицу. Покажите, что собственные векторы этой матрицы – это главные компоненты, и их нахождение эквивалентно задаче нахождения сингулярных векторов для X. Реализуйте PCA "вручную" с помощью SVD и сравните с реализацией из sklearn.decomposition.PCA

Подход, определяющий установление соответствия кейсов ИП и УГТ (5-7), позволяет четко соотносить этапы развития технологии с вовлеченностью партнера и снижать риски при переходе от лабораторных испытаний к промышленному внедрению.

УГТ 5-7- Проверка данного уровня проводится в средах имитационного моделирования, эмулирующих условия приближенные к реальности. Таким образом реализуется основная цель, продемонстрировать уровень готовности технологии на модельной среде максимально приближенной к реальности, а также проверить соответствие технологии требованиям к производительности (провести профилирование на реальных объемах и убедиться в эффективности процедуры масштабирования).

Примеры кейсов

Кейс 1: Компьютерное зрение и сегментация изображений (Пространства функций с ограниченной вариацией)

· Описание: Разработчики алгоритмов компьютерного зрения сталкиваются с задачей точного выделения границ объектов на зашумленных изображениях. Классические методы на основе градиентов часто оказываются слишком чувствительны к шуму и создают разрывные, неполные контуры.

· Цель: Построить математическую модель, которая позволяет восстанавливать чёткие, целостные границы объектов, одновременно подавляя шум и сохраняя важные детали.

· Ожидаемый результат: Использование функционально-аналитического подхода, в частности, пространств функций с ограниченной вариацией (BV). Это позволяет сформулировать задачу сегментации как задачу минимизации энергетического функционала (например, в модели Мэмфорда-Шаха). Такой функционал штрафует за общую длину границ (регуляризация) и за отклонение от исходных данных. В результате алгоритм выдает более устойчивые и точные контуры объектов, что критически важно для медицинской визуализации или автономного вождения.

Кейс 2: Обработка естественного языка и векторные представления слов (Гильбертовы пространства)

· Описание: Для создания чат-бота или поисковой системы, понимающей смысл запросов, необходимо перевести слова и тексты в численную форму, которая сохраняет семантические и синтаксические связи между ними.

· Цель: Построить такое векторное пространство (например, для моделей типа Word2Vec или GloVe), где "близкие" по смыслу слова будут находиться рядом, а над векторами можно производить осмысленные арифметические операции (например, king − man + woman ≈ queen).

· Ожидаемый результат: Применение аппарата гильбертовых пространств. Скалярное произведение в таком пространстве естественным образом задает меру семантической близости (косинусная мера). Теоремы о вложениях и ортогональных проекциях позволяют обосновать методы понижения размерности (например, SVD), используемые для визуализации и упрощения моделей. Это создает математический фундамент для современных языковых моделей.

Кейс 3: Теория управления и оптимальное управление (Банаховы пространства)

· Описание: Инженеры-робототехники проектируют систему управления для робота-манипулятора. Требуется найти такой закон изменения управляющих сигналов (сил, моментов), чтобы робот переместился из точки А в точку Б за минимальное время или с минимальными энергозатратами.

· Цель: Сформулировать и решить задачу оптимального управления, где управляющие воздействия и траектории являются функциями из определенных классов (например, непрерывные или интегрируемые с квадратом).

· Ожидаемый результат: Использование методов функционального анализа в банаховых пространствах. Задача сводится к поиску экстремума функционала (критерия оптимальности) на множестве допустимых функций. Применяются принцип максимума Понтрягина и методы, родственные правилу множителей Лагранжа в бесконечномерных пространствах. Это позволяет находить теоретически обоснованные оптимальные траектории для сложных динамических систем.

Кейс 4: Сжатие с потерями и вейвлет-преобразование (Теория приближений)

· Описание: При создании нового формата сжатия аудио (например, MP3) или видео (MPEG) требуется выбрать математический аппарат для разложения сигнала, который лучше, чем Фурье-анализ, справляется с локальными особенностями сигнала (всплесками, transient-ами).

· Цель: Найти базис, который обеспечивает компактное представление как гладких участков сигнала, так и его особенностей, позволяя эффективно отбрасывать малозначимые коэффициенты.

· Ожидаемый результат: Применение вейвлет-анализа, глубоко связанного с функциональным анализом. Вейвлет-базисы (например, вейвлеты Добеши) образуют безусловные базисы в различных классах функций (пространствах Соболева, Гёльдера). Это означает, что коэффициенты вейвлет-разложения четко характеризуют гладкость функции в каждой точке.

Кейс 5: Компьютерная графика и решение уравнения рендеринга (Интегральные уравнения)

· Описание: Для создания фотореалистичных изображений в киноиндустрии и игровой разработке используется трассировка лучей, которая физически точно моделирует перенос света в сцене. Этот процесс описывается уравнением рендеринга.

· Цель: Численно решить сложное интегральное уравнение рендеринга, которое определяет, сколько света приходит в каждую точку камеры от всех источников, учитывая отражения, преломления и рассеяние.

· Ожидаемый результат: Использование теории линейных интегральных операторов в функциональных пространствах. Уравнение рендеринга является уравнением Фредгольма 2-го рода. Функциональный анализ предоставляет инструменты для исследования его разрешимости (например, с помощью теории Неймана, доказывающей сходимость итеративного метода), что лежит в основе алгоритмов Path Tracing и Metropolis Light Transport, используемых в современных рендерерах (V-Ray, Arnold).

Кейс 6: Голография и восстановление фазы сигнала (Теория операторов)

· Описание: В задачах кристаллографии, медицинской визуализации и создании голографических дисплеев измерить можно только интенсивность волны (модуль комплексной амплитуды), но не её фазу. Однако для восстановления полного изображения фаза необходима.

· Цель: Решить сложную обратную задачу – восстановить полную комплекснозначную функцию (включая фазу) по известному модулю её Фурье-образа и некоторым априорным ограничениям (например, финитности носителя).

· Ожидаемый результат: Формулировка задачи в терминах нелинейных операторов в гильбертовом пространстве. Используются итеративные алгоритмы (например, Герха-Сакстона или Фьенупа), которые поочередно проецируют текущее приближение на множество функций с заданным модулем Фурье-спектра и на множество функций, удовлетворяющих априорным ограничениям. Теоретическое обоснование сходимости таких методов напрямую опирается на теорию проекций на выпуклые множества в гильбертовых пространствах.

Зачетно-экзаменационные материалы для промежуточной аттестации (экзамен)

1. Множества, пространства, подпространства, операции над множествами.
2. Интуитивное понятие меры множества и его свойства.
3. Внешняя мера и мера Лебега.
4. Теорема Лебега.
5. Множество меры ноль.
6. Понятие измеримого функционала и критерий измеримости функционала.
7. Измеримые функционалы и их свойства: умножение на число, сложение с числом, сумма двух измеримых функционалов.
8. Измеримые функционалы и их свойства: сравнение, умножение и деление функционалов.
9. Измеримые функционалы и их свойства: предел последовательности измеримых функционалов.
10. Эквивалентные функционалы, понятие «почти всюду».
11. Простые функционалы. Теорема об измеримости предела последовательности простых функционалов.
12. Интеграл Лебега от простого функционала и ограниченного функционала.
13. Свойства интеграла Лебега.
14. Сравнение интегралов Лебега и Римана для ограниченных функций.
15. Распределения и интеграл Лебега. Интеграл Римана-Стилтьеса.
16. Интеграл Лебега от неограниченных функций.
17. Прямое произведение множеств и мер.

18. Теорема Фубини.
19. Пространства Лебега. Теорема о вложении пространств.
20. Линейность пространств Лебега.
21. Неравенство Гельдера.
22. Неравенство Минковского.
23. Метрика, аксиомы и определение метрического пространства.
24. Примеры метрических пространств.
25. Шар, сфера, окрестность и сопутствующие понятия в метрическом пространстве.
26. Последовательности в метрических пространствах, сходимость последовательностей. Теорема о единственности предела.
27. Фундаментальные последовательности в метрических пространствах. Теорема о сходящейся и фундаментальной последовательности.
28. Полные метрические пространства. Теорема о пополнении метрического пространства.
29. Метрические пространства. Принцип вложенных шаров.
30. Критерий полноты метрического пространства на основе системы вложенных шаров.
31. Компактные множества в метрических пространствах. Ограниченность компактного множества.
32. Компактные множества в метрических пространствах. Замкнутость компактного множества.
33. Компактные множества в метрических пространствах. Полнота компактного множества.
34. Понятие эпсилон-сети и вполне ограниченного множества. Теорема Хаусдорфа.
35. Линейные пространства над полем чисел. Линейная зависимость, базис и размерность пространства.
36. Норма и линейные нормированные пространства (ЛНП), примеры. Свойства нормы как функционала.
37. Последовательность в линейных нормированных пространствах. Банаховые пространства. Теорема о полноте конечномерного ЛНП.
38. Сравнение норм. Теорема об эквивалентности норм конечномерного ЛНП.
39. Ряды в банаховых пространствах, абсолютная сходимость, теорема об абсолютно сходящихся рядах.
40. Скалярное произведение. Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства. Примеры.
41. Норма в гильбертовом пространстве, тождество параллелограмма, поляризационное тождество.
42. Ортогональность. Ортогональное дополнение. Теорема о разложении гильбертова пространства. Расстояние от элемента до подпространства.
43. Ортогональная система элементов. Линейная независимость ортогональной системы.
44. Ортогонализация Гильберта-Шмидта.
45. Полнота ортогональной системы. Теорема Пифагора.
46. Определение и примеры сепарабельных нормированных пространств.
47. Понятие сепарабельного пространства и плотного множества. Теорема о полноте ортогональной системы в сепарабельном пространстве.
48. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Теорема об экстремальном свойстве частичных сумм ряда Фурье.
49. Отображения в метрических пространствах. Сжимающие отображения. Теорема о непрерывности сжимающих отображений.
50. Принцип неподвижной точки для сжимающих отображений.
51. Линейный оператор (ЛО). Непрерывность и критерий непрерывности ЛО.
52. Ограниченность линейного оператора, необходимый и достаточный признак непрерывности.

53. Норма линейного оператора. Вычисление нормы.
54. Пространство линейных операторов. Сходимость линейных операторов.
55. Обратный линейный оператор. Единственность.
56. Теорема Банаха-Штейнгауза.
57. Ядро оператора. Критерий существования обратного ЛО.
58. Теорема о норме обратного оператора.
59. Интегральное уравнения Фредгольма. Решение интегрального уравнения Фредгольма II рода с вырожденным ядром.
60. Принцип неподвижной точки. Теорема о существовании оператора $(J-P)^{-1}$.
61. Проекционные методы решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве: метод наименьших квадратов, метод Галеркина.
62. Собственные значения линейного оператора, линейная независимость собственных решений.
63. Резольвента, регулярное множеств и спектр линейного оператора. Оценка точек спектра.
64. Спектр, спектральный радиус линейного оператора. Критерий обратимости оператора $(J-A)$.
65. Теорема Хана-Банаха в линейном пространстве.
66. Самосопряженные операторы. Свойства.
67. Определение и простейшие свойства компактных операторов.
68. Теорема о структуре компактного оператора.
69. Линейные функционалы в ЛНП. Ядро линейного функционала. Теоремы о ядре линейного функционала.
70. Ограниченность, норма и непрерывность линейного функционала в ЛНП.
71. Теорема Рисса о линейном функционале в гильбертовом пространстве.
72. Сопряжённое пространство. Сильная и слабая сходимости.
73. Линейные непрерывные функционалы в ЛНП.Непрерывность и ограниченность линейного функционала в ЛНП.
74. Производная по Гато.
75. Производная Фреше.
76. Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье.
77. Косинус и синус преобразования Фурье.
78. Свойства преобразования Фурье.

Перечень компетенций (части компетенции), проверяемых оценочным средством: ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-3.1; ОПК-3.2

4.2 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания решения задач по тематике лабораторных работ

Критерии оценки:

5 (Отлично): Все задачи решены корректно с обоснованным выбором численных методов; проведена оценка погрешности и анализ устойчивости/сходимости; выводы полные и обоснованные; оформление аккуратное.

4 (Хорошо): Большинство задач решены верно; допущены мелкие ошибки в реализации метода или оценке погрешности; выводы присутствуют, но краткие.

3 (Удовлетворительно): Решены не все задачи; есть ошибки в выборе метода, отсутствует оценка погрешности или проверка результатов; выводы неполные или отсутствуют.

2 (Неудовлетворительно): Менее половины заданий выполнено; систематические ошибки в применении численных методов; работа не соответствует заданию.

Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания на экзамене:

Оценка	Критерии оценивания по экзамену
Высокий уровень «5» (отлично)	оценку «отлично» заслуживает студент, освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал без пробелов; выполнивший все задания, предусмотренные учебным планом на высоком качественном уровне; практические навыки профессионального применения освоенных знаний сформированы.
Средний уровень «4» (хорошо)	оценку «хорошо» заслуживает студент, практически полностью освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не оценены максимальным числом баллов, в основном сформировал практические навыки.
Пороговый уровень «3» (удовлетворительно)	оценку «удовлетворительно» заслуживает студент, частично с пробелами освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, многие учебные задания либо не выполнил, либо они оценены числом баллов близким к минимальному, некоторые практические навыки не сформированы.
Минимальный уровень «2» (неудовлетворительно)	оценку «неудовлетворительно» заслуживает студент, не освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не выполнил, практические навыки не сформированы.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:
– в печатной форме увеличенным шрифтом,
– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:
– в печатной форме,
– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
– в печатной форме,
– в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

4.3 Методические указания по организации вычислительной инфраструктуры

Условия применения:

- Курс рассчитан на студентов 3-го года обучения.
- Поддерживаемый язык программирования: Python, SciLab.
- Наличие среды разработки (например, VS Code).

Цели, задачи и ожидаемые результаты

Цели организации вычислительной инфраструктуры:

- Обеспечить студентам получение практических навыков функционального моделирования, которое используется в задачах обработки и анализа изображений.

Для этой задачи выделено 2 лабораторные работы.

4.4 Методические указания по организации лабораторных работ

Условия применения:

Курс рассчитан на студентов 3-го года обучения, уже владеющих базовыми знаниями следующих предметов:

- Алгебра и аналитическая геометрия;
- Алгебра и введение в тензорный анализ;
- Математический анализ;
- Численные методы

Цели, задачи и ожидаемые результаты

Цель организации лабораторных работ:

Формирование у студентов практических навыков применение методов функционального анализа для решения практических задач, связанных, в том числе, с методами теории компьютерного зрения.

Задачи преподавателя:

1. Организовать лабораторные работы по ключевым темам дисциплины.
2. Подготовить методические материалы и инструментарий для выполнения лабораторных заданий.
3. Обеспечить студентов примерами решений типовых задач.
4. Разработать критерии оценки и проверки выполненных работ.

Ожидаемые результаты студентов:

- Знает базовые теоретические положения, лежащие в основе построения теории и методов функционального анализа.
- Умеет сформулировать основные утверждения теории, выбрать методы для решения задач.
- Владеет навыками практического применения знаний полученных в рамках курса функционального анализа к решению задач.

5. Перечень учебной литературы, информационных ресурсов и технологий

5.1 Учебная литература:

1. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — 2-е изд.,стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 272 с. — ISBN 978-5-8114-0976-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/210290 (дата обращения: 26.02.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей. http://212.192.134.46/MegaPro/UserEntry?Action=Link_FindDoc&id=146283&idb=0
2. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа [Электронный ресурс] : учебник для бакалавров : в 3 т. Т. 1 / Л. Д. Кудрявцев. - 6-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2024. - 703 с. - https://urait.ru/book/kurs-matematicheskogo-analiza-v-3-t-tom-2-v-2-knigah-kniga-1-537699
3. Гуревич, А. П. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / А. П. Гуревич, В. В. Корнев, А. П. Хромов. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 192 с. — ISBN 978-5-8114-1274-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/210809 (дата обращения: 18.09.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей. http://212.192.134.46/MegaPro/UserEntry?Action=Link_FindDoc&id=158275&idb=0
4. Филимоненкова, Н. В. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 240 с. — ISBN 978-5-8114-1822-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212057 (дата обращения: 08.04.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей. http://212.192.134.46/MegaPro/UserEntry?Action=Link_FindDoc&id=170858&idb=0
5. Кудрявцев, Л.Д. Сборник задач по математическому анализу : учебное пособие: в 3 т. Т. 2. Интегралы. Ряды / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. - Москва : Физматлит, 2021. - 504 с. - URL: https://e.lanbook.com/book/185639 (дата обращения: 25.02.2022). - Режим доступа: для авториз. пользователей. - ISBN 978-5-9221-0307-7. - Текст : электронный. http://212.192.134.46/MegaPro/UserEntry?Action=Link_FindDoc&id=160842&idb=0

5.2. Периодические издания:

1. Базы данных компании «Ист Вью» http://dlib.eastview.com
2. Электронная библиотека GREBENNIKON.RU https://grebennikon.ru/

5.3 Интернет-ресурсы, в том числе современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Электронно-библиотечные системы (ЭБС):
1. ЭБС «ЮРАЙТ» https://urait.ru/
2. ЭБС «УНИВЕРСИТЕТСКАЯ БИБЛИОТЕКА ОНЛАЙН» www.biblioclub.ru
3. ЭБС «BOOK.ru» https://www.book.ru
4. ЭБС «ZNANIUM.COM» www.znanium.com
5. ЭБС «ЛАНЬ» https://e.lanbook.com

Профессиональные базы данных:
1. Web of Science (WoS) http://webofscience.com/
2. Scopus http://www.scopus.com/
3. ScienceDirect www.sciencedirect.com
4. Журналы издательства Wiley https://onlinelibrary.wiley.com/
5. Научная электронная библиотека (НЭБ) http://www.elibrary.ru/

6. Полнотекстовые архивы ведущих западных научных журналов на Российской платформе научных журналов НЭИКОН http://archive.neicon.ru
7. Национальная электронная библиотека (доступ к Электронной библиотеке диссертаций Российской государственной библиотеки (РГБ) https://rusneb.ru/
8. Президентская библиотека им. Б.Н. Ельцина https://www.prlib.ru/
9. Springer Journals https://link.springer.com/
10. Nature Journals https://www.nature.com/siteindex/index.html
11. Springer Nature Protocols and Methods https://experiments.springernature.com/sources/springer-protocols
12. Springer Materials http://materials.springer.com/
13. zbMath https://zbmath.org/
14. Nano Database https://nano.nature.com/
15. Springer eBooks: https://link.springer.com/
16. "Лекториум ТВ" http://www.lektorium.tv/
17. Университетская информационная система РОССИЯ http://uisrussia.msu.ru

Информационные справочные системы:
1. Консультант Плюс - справочная правовая система (доступ по локальной сети с компьютеров библиотеки)

Ресурсы свободного доступа:
1. КиберЛенинка (http://cyberleninka.ru/);
2. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации https://www.minobrnauki.gov.ru/;
3. Федеральный портал "Российское образование" http://www.edu.ru/;
4. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" http://window.edu.ru/;
5. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов http://school-collection.edu.ru/ .
6. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (http://fcior.edu.ru/);
7. Словари и энциклопедии http://dic.academic.ru/;
8. Образовательный портал "Учеба" http://www.ucheba.com/;
9. Законопроект "Об образовании в Российской Федерации". Вопросы и ответы http://xn--273--84d1f.xn--p1ai/voprosy_i_otvety

Собственные электронные образовательные и информационные ресурсы КубГУ:
1. Среда модульного динамического обучения http://moodle.kubsu.ru
2. База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций http://mschool.kubsu.ru/
3. Электронный архив документов КубГУ http://docspace.kubsu.ru/

6 Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной теоретический материал, лабораторных занятий, позволяющих студентам в полной мере ознакомиться с понятием теории функций вещественной переменной и освоиться в решении практических задач.

Важнейшим этапом курса является самостоятельная работа по дисциплине «теория функций вещественной переменной».

Целью самостоятельной работы бакалавра является углубление знаний, полученных в результате аудиторных занятий. Вырабатываются навыки самостоятельной работы. Закрепляются опыт и знания, полученные во время лабораторных занятий.

Самостоятельная работа студентов в ходе изучения дисциплины состоит в выполнении индивидуальных заданий, задаваемых преподавателем, ведущим лабораторные занятия, подготовки теоретического материала к лабораторным занятиям, на основе конспектов лекций и учебной литературы, согласно календарному плану и подготовки теоретического материала к тестовому опросу, зачету и экзамену, согласно вопросам к экзамену.

Указания по оформлению работ:

- работа на лабораторных занятиях и конспекты лекций могут выполняться на отдельных листах либо непосредственно в рабочей тетради;
- оформление индивидуальных заданий желательно на отдельных листах.

Проверка индивидуальных заданий по темам, разобранным на лабораторных занятиях, осуществляется через неделю на текущем лабораторном занятии, либо в течение недели после этого занятия на консультации.

Для разъяснения непонятных вопросов лектором и ассистентом еженедельно проводятся консультации, о времени которых группы извещаются заранее.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующими индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

Проверка индивидуальных заданий по темам, разобранным на лабораторных занятиях, осуществляется через неделю на текущем лабораторном занятии, либо в течение недели после этого занятия на консультации.

Для разъяснения непонятных вопросов лектором и ассистентом еженедельно проводятся консультации, о времени которых группы извещаются заранее.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

Для студентов с ограниченными возможностями здоровья предусмотрены дополнительные индивидуальные консультации, на которых преподаватель подробно разъясняет сложные аспекты дисциплины, помогает адаптировать практические задания и обеспечивает специальные условия для освоения методов работы с системами искусственного интеллекта. Индивидуальный подход позволяет таким студентам полноценно участвовать в учебном процессе и достигать требуемых результатов обучения.

7. Материально-техническое обеспечение по дисциплине (модулю)

Наименование специальных помещений	Оснащенность специальных помещений	Перечень лицензионного программного обеспечения
Учебные аудитории проведения занятий лекционного типа	Мебель: учебная мебель Технические средства обучения:	MS Windows, MS Word, MS PowerPoint

Учебные аудитории для проведения лабораторных занятий	Мебель: учебная мебель Технические средства обучения: экран, проектор, компьютер	MS Windows, MS Word, MS PowerPoint
Аудитории для групповых (индивидуальных) консультаций	учебная мебель (столы, стулья, доска), презентационная техника	MS Windows, MS Word, MS PowerPoint
Аудитории для текущего контроля, промежуточная аттестация	учебная мебель (столы, стулья, доска)	Не предусмотрено

Для самостоятельной работы обучающихся предусмотрены помещения, укомплектованные специализированной мебелью, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

Наименование помещений для самостоятельной работы обучающихся	Оснащенность помещений для самостоятельной работы обучающихся	Перечень лицензионного программного обеспечения
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (читальный зал Научной библиотеки)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	MS Windows, MS Word, MS PowerPoint