

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Кубанский государственный университет»
Факультет компьютерных технологий и прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ:



Проректор по учебной работе,
качеству образования – первый
проректор

Хагуров Т.А.

«30» мая 2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.05 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) Математические и информационные технологии
в цифровой экономике;

Программирование и информационные
технологии);

Математическое моделирование в
естествознании и технологиях

Форма обучения _____ очная

Квалификация (степень) выпускника _____ бакалавр

Краснодар 2025

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Программу составил: Силинская С.М.,
к.т.н., доцент кафедры прикладной математики



Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» утверждена на заседании кафедры прикладной математики
протокол № 9 от 06.05.2025 г.

И.о. заведующего кафедрой
Письменский А.В., к.ф.-м.н.



Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета компьютерных технологий и прикладной математики
протокол № 4 от 23.05.2025 г.

Председатель УМК факультета компьютерных технологий и
прикладной математики УМК факультета
А.В. Коваленко, д.ф.-м.н, к.э.н., доцент



Рецензенты:

Трофимов Виктор Маратович
Доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор
кафедры информационных систем и программирования ФГБОУ ВО «Кубанский
государственный технологический университет».

Попова Елена Витальевна.

Доктор экономических наук, кандидат физико-математических наук, профессор,
Заведующий кафедрой информационных систем ФГБОУ ВО «Кубанский
государственный аграрный университет имени И.Т. Трубилина».

1 Цели и задачи изучения дисциплины.

1.1 Цель освоения дисциплины.

Целью преподавания и изучения дисциплины «Функциональный анализ» является овладение студентами методами функционального анализа непосредственно примыкающими к задачам прикладной математики, которые необходимы с одной стороны для формирования навыков работы с абстрактными математическими понятиями, а с другой стороны для восприятия с общетеоретических позиций идей и методов смежных дисциплин, подготовки выпускника как и к научно-исследовательской деятельности, так и к производственно технологической деятельности в области решения прикладных задач.

1.2 Задачи дисциплины

Задачей изучения дисциплины «Функциональный анализ» является развитие способностей студента понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат при решении задач, возникающих на практике и в научно-исследовательской деятельности.

1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы.

Курс «Функциональный анализ» относится к дисциплинам по выбору вариативной части Блока 1. Для освоения курса студентами необходимо наличие у студентов знаний и умений приобретённых в результате изучения ими базовых курсов математического анализа, алгебры и аналитической геометрии, дифференциальных уравнений. Знания, полученные при изучении данного курса, находят применение при изучении «Уравнений математической физики», «Дифференциальных уравнений», «Теории вероятностей», «Численных методов», ряда дисциплин специализации. Методы функционального анализа находят своё приложение в различных сферах современной прикладной математики, например при создании современных систем управления, а также в научно-исследовательской работе.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций:

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
ПК-1 Способен решать актуальные и значимые задачи прикладной математики и информатики	
ИПК-1.8 (40.001 А/02.5 Др.2) Деятельность, направленная на решение задач актуальные и значимые задачи прикладной математики и информатики аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач	Знает основные понятия, теоремы методы, алгоритмы и средства функционального анализа
	Знает основные понятия, теоремы методы, алгоритмы и средства функционального анализа
	Владеет методами функционального анализа для исследования различных прикладных задач.
ПК-2 Способен активно участвовать в исследовании новых математических моделей в естественных науках	
ИПК-2.11 (40.001 А/02.5 Др.2) Деятельность, направленная на решение задач аналитического характера, предполагающих	Знает теоретические положения, лежащие в основе построения теории и методов функционального анализа
	Умеет доказывать утверждения, выбирать методы для решения задач функционального анализа и приложений

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
выбор и многообразие актуальных способов решения задач, разработки новых математических моделей в естественных науках	Владеет основными методами решения типовых и оригинальных задач функционального анализа, способен применять эти методы для решения конкретных прикладных задач

2. Структура и содержание дисциплины

2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 8 зачетных единиц (288 часов), их распределение по видам работ представлено в таблице

Виды работ	Всего часов	Семестры (часы)	
		5	6
Контактная работа, в том числе:	140.6	72.3	68.3
Аудиторные занятия (всего):	132	68	64
Занятия лекционного типа	66	34	32
Лабораторные занятия	66	34	32
Практические занятия			
Иная контактная работа:	8.6	4.3	4.3
Контроль самостоятельной работы (КСР)	8	4	4
Промежуточная аттестация (ИКР)	0.6	0.3	0.3
Самостоятельная работа, в том числе:	147.4	71.7	75.7
Самостоятельная работа	67	36	31
Подготовка к текущему контролю	80.4	35.7	44.7
Контроль:	80.4	35.7	44.7
Подготовка к экзамену	80.4	35.7	44.7
Общая трудоемкость	час.	288	144
	в том числе контактная работа	140.6	72.3
	зач. ед	8	4

2.2 Содержание дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.
Разделы дисциплины, изучаемые в **5 семестре**

№	Наименование разделов (тем)	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	
1.	Тригонометрические ряды Фурье	33	8		8	17
2.	Интеграл Лебега	42	12		12	18
3.	Пространства Лебега	26	4		4	18
4.	Метрические пространства	38.7	10		10	18.7
	ИТОГО по разделам дисциплины	139.7	34		34	71.7
	Контроль самостоятельной работы (КСР)	4				
	Промежуточная аттестация (ИКР)	0.3				
	Подготовка к текущему контролю	35.7				
	Общая трудоемкость по дисциплине	144				

Разделы дисциплины, изучаемые в **6 семестре**

№	Наименование разделов (тем)	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	
5.	Линейные нормированные пространства	34	8		8	18
6.	Евклидовы пространства	34	8		8	18
7.	Линейные операторы	48	12		12	24
8.	Линейные функционалы	23.7	4		4	15.7
	ИТОГО по разделам дисциплины	139.7	32		32	75.7
	Контроль самостоятельной работы (КСР)	4				
	Промежуточная аттестация (ИКР)	0.3				
	Подготовка к текущему контролю	44.7				
	Общая трудоемкость по дисциплине	144				

2.3 Содержание разделов дисциплины

2.3.1 Занятия лекционного типа

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
5 семестр			
1.	Тригонометрические ряды Фурье	Периодические величины. Гармонический анализ. Понятие ряда. Коэффициенты Фурье. Интеграл Дирихле. Лемма Римана. Следствие из неё. Принцип локализации. Признаки Дини	Контрольные вопросы

		и Липшица сходимости ряда Фурье в точке. Разложение в ряд Фурье для произвольного промежутка. Разложение в ряд Фурье непериодической функции. Разложение в ряд Фурье только по синусам и только по косинусам. Равномерная сходимость ряда Фурье. Преобразование Фурье.	
2.	Интеграл Лебега	Необходимость обобщения понятия интеграла Римана..Множества точек. Понятие меры. Свойства меры. Множество меры ноль. Определения, примеры. Измеримые функции. Теорема об эквивалентных определениях измеримой функции. Свойства измеримых функций. Интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции, понятие. Теорема о существовании интеграла Лебега. Сравнение с интегралом Римана .Интеграл Лебега по произвольному измеримому множеству. Свойства интеграла Лебега .Интеграл Лебега от неограниченной функции.	Контрольные вопросы
3.	Пространства Лебега	Понятие $L_p[a, b]$. Теорема о вложении пространств. Линейность пространств $L_p[a, b]$. Неравенство Гёльдера. Неравенство Минковского. Норма в $L_p[a, b]$. Пространство $L_2[a, b]$. Свойства функций $L_2[a, b]$. Сходимость в $L_2[a, b]$. Теоремы о единственности предела, о непрерывности нормы, фундаментальности и сходимости в $L_2[a, b]$. Теорема о приближении функций из $L_2[a, b]$.	Контрольные вопросы
4.	Метрические пространства	Метрика, аксиомы и определение метрического пространства (МП), примеры МП. Множества в МП, принцип вложенных шаров. Последовательности в МП, полнота МП, компактность и предкомпактность. Эпсилон-сети и вполне ограниченные множества, теорема Хаусдорфа.	Контрольные вопросы
6 семестр			
5.	Линейные нормированные пространства	Линейные пространства над полем чисел. Изоморфизм. Линейная зависимость, базис и размерность пространства. Фактор-пространство. Теорема о размерности фактор-пространства. Норма и линейные нормированные пространства. Примеры нормированных пространств. Банаховые пространства. Теорема о полноте	Контрольные вопросы

		конечномерного ЛНП. Сравнение норм. Ряды в нормированных пространствах: сходимость, критерий Коши, абсолютная сходимость	
6.	Евклидовы пространства	Скалярное произведение. Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства. Примеры. Ортогональность. Ортогональное дополнение. Теорема о разложении гильбертова пространства. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном H -пространстве. Ряды Фурье в H -пространстве. Экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье. Полнота и замкнутость ортонормированной системы в H -пространстве. Теорема Рисса-Фишера в H -пространстве. Изоморфизм H -пространств.	Контрольные вопросы
7.	Линейные операторы	Отображения. Принцип неподвижной точки для сжимающего отображения. Линейный оператор в линейном пространстве. Понятие, примеры. Линейный непрерывный оператор в ЛНП. Непрерывность и ограниченность. Норма линейного ограниченного оператора. Свойства, примеры. Равномерная сходимость линейных операторов. Теоремы о равномерной сходимости в единичном круге. Следствие. Полнота пространства $\mathcal{L}(L, L_1)$. Сильная сходимость в $\mathcal{L}(L, L_1)$. Примеры. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха-Штейнгауза. Обратный оператор. Определение. Теорема о линейности оператора A^{-1} . Достаточное условие ограниченной обратимости линейного оператора. Метод проекционные обращения линейного оператора. Теорема о существовании оператора $(I + A)^{-1}$. Интегральные уравнения Фредгольма. Решение интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром. Теорема об ограниченной обратимости оператора, близкого к ограниченно обратимому. Регулярное множество, спектр и резольвента линейного оператора. Спектральный радиус. Понятие сопряженного оператора. Теорема о его представлении в H -пространстве. Теорема о линейности и непрерывности сопряженного оператора. Самосопряженные операторы. Свойства. Определение и простейшие свойства компактных операторов. Теорема о структуре компактного оператора. Производные Фреше и Гато.	Контрольные вопросы
8.	Линейные функционалы	Линейные функционалы в ЛНП. Определение. Теорема о коразмерности ядра	Контрольные вопросы

	линейного функционала. Теорема Хана-Банаха в линейном пространстве. Линейные непрерывные функционалы в ЛНП. Непрерывность и ограниченность линейного функционала в ЛНП. Теорема Хана-Банаха в ЛНП. Сопряженное пространство L^* . Теорема о полноте L^* . Слабая сходимости в ЛНП. Теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в Н-пространстве.	
--	---	--

2.3.2 Занятия семинарского типа (практические / семинарские занятия/ лабораторные работы)

№	Наименование раздела	Содержание раздела (номера и наименования лабораторных работ)	Форма текущего контроля
1	2	3	4
5 семестр			
1.	Тригонометрические ряды Фурье	Тема 1. Тригонометрические ряды Фурье на $(-\pi, \pi)$ Тема 2. Тригонометрические ряды Фурье на $(-1, 1)$ Тема 3. Разложения в ряд Фурье только по синусам или только по косинусам Тема 4. Преобразование Фурье	РЗ/ЛР
2.	Интеграл Лебега	Тема 1. Мера Лебега. Тема 2. Множества меры 0 Тема 3. Измеримые множества Тема 4. Измеримые функции Тема 5. Интеграл Лебега от ограниченных функций Тема 6. Интеграл Лебега от неограниченных функций	РЗ/ЛР
3.	Пространства Лебега	Тема 1. Основные свойства пространств L_p Тема 2. Сходимость в пространствах L_p	РЗ/ЛР

№	Наименование раздела	Содержание раздела (номера и наименования лабораторных работ)	Форма текущего контроля
1	2	3	4
4.	Метрические пространства	Тема 1. Метрика. Аксиомы метрики. Тема 2. Примеры метрических пространств. Тема 3. Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Тема 4. Сходимость последовательностей в метрических функциональных пространствах. Тема 5. Замкнутость, ограниченность, открытость, полнота и компактность в метрических пространствах.	РЗ/ЛР
6 семестр			
5.	Линейные нормированные пространства	Тема 1. Линейные пространства. Базис. Тема 2. Норма в линейных пространствах. Тема 3. Сходимость в линейных нормированных пространствах. Банаховы пространства. Тема 4. Ряды в банаховых пространствах.	РЗ/ЛР
6.	Евклидовы пространства	Тема 1. Евклидовы пространства, общие свойства. Тема 2. Ортогонализация в гильбертовом пространстве. Тема 3. Проектирование на подпространство евклидова пространства. Тема 4. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.	РЗ/ЛР
7.	Линейные операторы	Тема 1. Линейные операторы Тема 2. Ограниченные операторы. Норма оператора. Тема 3. Обратный оператор. Тема 4. Интегральные уравнения. Тема 5. Спектр, резольвента оператора Тема 6. Сопряженные операторы. Вполне непрерывные	РЗ/ЛР
8.	Линейные функционалы	Тема 1. Ограниченные функционалы. Норма функционала в пространствах l_p^n, l_p . Тема 2. Норма линейного функционала в $L_p(a, b), C[a, b]$.	РЗ/ЛР

Примечание: ЛР – отчет/защита лабораторной работы, КП – выполнение курсового проекта, КР – курсовой работы, РГЗ – расчетно-графического задания, Р – написание реферата, Э – эссе, К – коллоквиум, Т – тестирование, РЗ – решение задач.

При изучении дисциплины могут применяться электронное обучение, дистанционные образовательные технологии в соответствии с ФГОС ВО.

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	Проработка и повторение лекционного материала, материала учебной и научной литературы	Методические указания для подготовки к лекционным и семинарским занятиям, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №10 от 18.05.2023 г.
2	Подготовка к лабораторным занятиям	Методические указания по выполнению лабораторных работ, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №10 от 18.05.2023.
3	Подготовка к решению задач	Методические указания по выполнению самостоятельной работы, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №10 от 18.05.2023 г.
4	Подготовка к текущему контролю	Методические указания по выполнению самостоятельной работы, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №10 от 18.05.2023 г.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

3. Образовательные технологии.

С точки зрения применяемых методов используются как традиционные информационно-объяснительные *лекции*, так и интерактивная подача материала с мультимедийной системой и др. Такое сочетание позволяет оптимально использовать отведенное время и раскрывать логику и содержание дисциплины.

Лекции представляют собой систематический обзор понятий и методов

Комплексного анализа с подачей материала в форме презентаций и с использованием других интерактивных технологий: проблемное обучение, моделирование, дискуссия.

Занятия, проводимые с использованием интерактивных технологий

№	Наименование разделов (тем)	Количество часов	
		всего ауд. часов	интерактивные часы
1.	Тригонометрические ряды Фурье	16	2
2.	Интеграл Лебега	24	2
2.	Пространства Лебега	8	2
3.	Метрические пространства	20	2
4.	Линейные нормированные пространства	16	4
5.	Евклидовы пространства	16	4
6.	Линейные операторы	24	6
7.	Линейные функционалы	8	2
	<i>Итого по дисциплине:</i>	132	22

Лабораторное занятие позволяет научить студента применять теоретические знания при решении и исследовании конкретных задач, развить математическую интуицию и творческое мышление. Разбор конкретных ситуаций, математическое моделирование задач, встречающихся на практике (проблемное обучение), командная работа, визуализация и обсуждение результатов анализа широко используется при проведении лабораторных, а также самостоятельных работ. Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием возможностей средств удаленного доступа (электронная почта, видеоконференция).

4. Оценочные и методические материалы

4.1 Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины «Комплексный анализ».

Оценочные средства включает контрольные материалы для проведения **текущего контроля** в форме:

- тестовых заданий (контрольных и самостоятельные работы);
- контроля за выполнением групповых домашних заданий.

и **промежуточной аттестации** в форме вопросов и заданий к зачету и экзамену.

Структура оценочных средств для текущей и промежуточной аттестации

№ п/п	Код и наименование индикатора (в соответствии с п. 1.4)	Результаты обучения (в соответствии с п. 1.4)	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	ИПК-1.8 (40.001 А/02.5 Др.2) Деятельность, направленная на решение задач актуальные	Знает основные понятия, теоремы методы, алгоритмы	Опрос по результатам лабораторных	Вопросы на экзамене 1-15, 45-60

	и значимые задачи прикладной математики и информатики аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач	и средства функционального анализа	работы и выполненных задач,	
2	ИПК-1.8 (40.001 А/02.5 Др.2) Деятельность, направленная на решение задач актуальные и значимые задачи прикладной математики и информатики аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач	Знает основные понятия, теоремы методы, алгоритмы и средства функционального анализа	<i>Задачи 1 семестра 1-20, 6 семестра 4-9, 12-15</i>	<i>Вопросы на экзамене, требующие доказательства и/или вывод расчётных формул: 4- 10,12-15,18-20, 32, 33, 34, 37-40, 46, 47, 49, 51, 53, 55, 56, 58, 59, 62, 65, 66, 67, 70</i>
3	ИПК-1.8 (40.001 А/02.5 Др.2) Деятельность, направленная на решение задач актуальные и значимые задачи прикладной математики и информатики аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач	Владеет методами функционального анализа для исследования различных прикладных задач.	<i>Задания для контрольных и самостоятельных работ</i>	<i>Практические задачи на экзамене</i>
4	ИПК-2.11 (40.001 А/02.5 Др.2) Деятельность, направленная на решение задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач, разработки новых математических моделей в естественных науках	Знает теоретические положения, лежащие в основе построения теории и методов функционального анализа		<i>Вопросы на экзамене 16-44, 61-88</i>
5	ИПК-2.11 (40.001 А/02.5 Др.2) Деятельность, направленная на решение задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач, разработки новых математических моделей в естественных науках	Умеет доказывать утверждения, выбирать методы для решения задач функционального анализа и приложений	<i>Задачи 5 семестра 21-30, 6 семестра 1-3, 10-11, 14-16</i>	<i>Практические задачи на экзамене</i>
6	ИПК-2.11 (40.001 А/02.5 Др.2) Деятельность, направленная на решение задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач, разработки новых математических моделей в естественных науках	Владеет основными методами решения типовых и оригинальных задач функционального анализа, способен применять эти методы для решения конкретных прикладных задач	<i>Задания для лабораторных работ</i>	<i>Практические задачи на экзамене</i>

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

4.1.2 Образцы заданий для контрольных и самостоятельных работ.

Перечень компетенций (части компетенции), проверяемых оценочным средством:
ПК-1, ПК-2.

Образец заданий для текущего контроля успеваемости.

5-й семестр

1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, определенную на отрезке $[-\pi, \pi]$.
2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$, определенную на отрезке $[-1, 1]$.
3. Разложить в ряд Фурье а) по синусам, б) по косинусам функцию $f(x) = \pi - 2x$, определенную на отрезке $[0, \pi]$.
4. Разложить в ряд Фурье а) по синусам б) по косинусам функцию $f(x) = x^2$, определенную на отрезке $[0, 1]$.
5. Как следует продолжить абсолютно интегрируемую на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функцию, на отрезок $[-\pi, \pi]$, чтобы ее ряд Фурье имел вид $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1)x$?
6. Может ли множество, имеющее хотя бы одну внутреннюю точку, иметь нулевую меру?
7. Построить для любого $\alpha \in (0, 1)$ замкнутое подмножество X отрезка $[0, 1]$ без внутренних точек такое, что $m(X) = \alpha$.
8. Пусть X – множество чисел из отрезка $[0, 1]$, в десятичной записи которых отсутствует цифра 8. Найти $m(X)$.
9. Являются ли функции $f(x)$ и $f^3(x)$ измеримыми одновременно? А функции $f(x)$ и $f^2(x)$?
10. Вычислить интеграл Лебега $\int_0^1 f(x)dx$, где

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{для всех иррациональных } x, \text{ больших, чем } \frac{1}{3}, \\ x^3, & \text{для всех иррациональных } x, \text{ меньших, чем } \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{если } x \in (0, 1) \cap Q. \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \setminus Q, \\ 1, & \text{если } x \in Q. \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{если } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \setminus D, \\ \cos \pi x, & \text{если } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \setminus D, \\ x^2, & \text{если } x \in D, \end{cases}$$

где D – канторово множество.

12. Привести пример функции $x(t)$, такой, что $x \in L_1[0, 1] \setminus L_2[0, 1]$.
13. Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние на множестве $\mathbb{R}$:

- 1) $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$; 2) $\rho(x, y) = |\sin(x - y)|$; 3) $\rho(x - y) = (x - y)^2$;
- 4) $\rho(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$; 5) $\rho(x, y) = \arctg |x - y|$; 6) $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$;
- 7) $\rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$; 8) $\rho(x, y) = e^{|x - y|} - 1$; 9) $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$;

10) $\rho(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$; $\rho(x, y) = \cos^2(x - y)$?

14) Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние на множестве $\mathbb{R}^n$:

1) $\rho(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$; 2) $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$;

3) $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2$; 4) $\rho(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n-1} |x_k - y_k|$;

5) $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n k |x_k - y_k|$; 6) $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k| \ln k$?

15) Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние в классе функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$:

1) $\rho(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$; 2) $\rho(x, y) = \sup_t \frac{1}{t} \int_0^t |x(\tau) - y(\tau)| d\tau, t \in (0, 1]$;

3) $\rho(x, y) = \sqrt{\int_0^1 |x(t) - y(t)| dt}$; 4) $\rho(x, y) = \max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |x(t) - y(t)| + \int_{\frac{1}{2}}^1 |x(\tau) - y(\tau)| d\tau$?

16) Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние в классе функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$:

1) $\rho(x, y) = \max_{t \in [0, 1]} |x'(t) - y'(t)|$;

2) $\rho(x, y) = |x(0) - y(0)| + \max_{t \in [0, 1]} |x'(t) - y'(t)|$;

3) $\rho(x, y) = \max_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)| + \max_{t \in [0, 1]} |x'(t) - y'(t)|$;

4) $\rho(x, y) = \max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |x(t) - y(t)| + \max_{t \in [\frac{1}{2}, 1]} |x'(t) - y'(t)|$?

17) Найти расстояние между функциями $x(t) = \sin 2t$ и $y(t) = \cos 2t$ в пространстве 1) $C[0, \pi]$; 2) $C^1[0, \pi]$; 3) $L_1[0, \pi]$; 4) $L_2[0, \pi]$.

18) Найти расстояние между функциями $x(t) = t^3 + t$ и $y(t) = 2t^3 + t^2$ в пространстве 1) $C[-1, 1]$; 2) $C^1[-1, 1]$; 3) $L_1[-1, 1]$; 4) $L_2[-1, 1]$.

19) Исследовать на сходимость последовательность $\{x_k\}$ в пространстве 1) l_1^n ; 2) l_2^n ; 3) l_∞^n :

а) $x_k = (\frac{1}{k}, 0, \dots, 0)$; б) $x_k = (e^{-2k}, 1, 1, \dots, 1)$; в) $x_k = (e^{-k}, e^{-k^2}, \dots, e^{-k^n})$;

г) $x_k = (\cos k, 2, 2, \dots, 2)$; д) $x_k = (k^2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n})$.

20) Исследовать на сходимость последовательность $\{x_k\}$ в пространстве 1) l_1 ; 2) l_2 ; 3) l_∞

а) $x_k = (0, \dots, 0, \frac{1}{k}, 0, \dots)$; б) $x_k = (0, \dots, 0, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \dots)$; в) $x_k = (1, 1, \dots, 1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2})$;

г) $x_k = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, 0, 0, \dots)$; д) $x_k = (2, 2, \dots, 2, 0, 0, \dots)$; е) $x_k = (0, \dots, 0, \frac{1}{k}, 0, \dots)$;

ж) $x_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{2k-1}, \frac{1}{2k}, \dots)$; з) $x_k = (e^{-k}, 0, 0, \dots, 0, 7, 0, 0, \dots)$;

и) $x_k = (5, 0, 0, \dots, 0, \frac{1}{k+1}, 0, 0, \dots)$; к) $x_k = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k}}, 0, 0, \dots)$.

21) Исследовать на сходимость в пространстве 1) $C[0, 1]$; 2) $L_2(0, 1)$ последовательность

а) $x_k(t) = t^k$; б) $x_k(t) = \sin t - \sin \frac{t}{k}$; в) $x_k(t) = \frac{kt}{\sqrt{k^2+1}}$; г) $x_k(t) = e^{-\frac{t}{k}}$; д) $x_k(t) = t^k - t^{k+1}$; е) $x_k(t) = t^k - t^{2k}$; ж) $x_k(t) = te^{kt}$.

22) В каких пространствах $L_p[0, 1]$ и к какому пределу сходятся последовательности:

а) $x_k(t) = \begin{cases} \sqrt{k}, & t \in [0, \frac{1}{k}] \\ 0, & t \in (\frac{1}{k}, 1] \end{cases}$; б) $x_k(t) = \begin{cases} \ln(k), & t \in [0, \frac{1}{k}] \\ t \in (\frac{1}{k}, 1] \end{cases}$;

в) $x_k(t) = \begin{cases} e^k, & t \in [0, \frac{1}{k}] \\ 0, & t \in (0, 1] \end{cases}$; г) $x_k(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{k}, & t \in [0, \frac{1}{k}] \\ \frac{1}{\sqrt[3]{t}}, & t \in (\frac{1}{k}, 1] \end{cases}$.

- 23) Исследовать на сходимость в пространстве 1) $C[0, 1]$; 2) $L_2(0, 1)$ ряды
а) $\sum_{k=0}^{\infty} t^k$; б) $\sum_{k=0}^{\infty} (1-t)t^k$; в) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-k(t+1)}$.
- 24) Является ли открытым множество функций из пространства $C[0, 1]$, удовлетворяющих условию:
а) $0 < x(t) < 1 + t^2, t \in (0, 1)$,
б) $\int_0^1 |x(t)| dt < 1$;
в) $\int_0^1 x(t) dt < 1$;
г) $\left| x\left(\frac{1}{3}\right) \right| < 2$?
25. Является ли замкнутым множество функций из $C[0, 1]$, удовлетворяющих условию
а) $\operatorname{sgn} x\left(\frac{1}{2}\right) = 1$;
б) $\operatorname{sgn} x(t) = 1, t \in [0, 1]$?
26. Являются ли компактными, предкомпактными в $C[0, 1]$ следующие семейства функций;
1) $M = \{x(t) \mid |x(0)| \leq K_0, |x'(t)| \leq K_1, t \in [0, 1]\}$;
2) $M = \{x(t) \mid |x(0)| \leq K_0, \int_0^1 (x'(t))^2 dt \leq K_1\}$;
3) $M = \{x(t) \mid |x(t)| \leq t, t \in [0, 1]\}$;
4) $x_\alpha(t) = t^\alpha$, если а) $0 < \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 < \infty$; б) $0 < \alpha_1 \leq \alpha$;
5) $x_\alpha(t) = e^{(t+\alpha)}$, если а) $\alpha \in \mathbb{R}$; б) $\alpha \geq 0$; в) $\alpha \leq 0$;
6) $x_\alpha(t) = \sin(\alpha t)$, если а) $\alpha \in \mathbb{R}_+$; б) $0 \leq \alpha \leq \alpha_2 < \infty$;
7) $x_\alpha(t) = \sin(\alpha + t)$, если а) $\alpha \in \mathbb{R}$; б) $0 < \alpha_1 < \alpha < \alpha_2 < \infty$?
27. Провести процесс ортогонализации системы функций $\{1, t, t^2, t^3\}$ в пространстве
а) $L_2(-1, 1)$; б) $L_2(0, 1)$.
28. В пространстве l_2 найти множество векторов, ортогональных вектору x_0 , если
а) $x_0 = (0, 0, \dots, 0, \hat{1}, 0, \dots)$; б) $x_0 = (0, 1, 0, 1, \dots)$; в) $x_0 = (1, 1, \dots, \hat{1}, 0, 0, \dots)$.
29. В пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ найти проекции функций
а) $x(t) \equiv 0$; б) $x(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$; в) $x(t) = t$; г) $x(t) = \cos 2t$
на подпространство $X_0 = \{x(t) = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t\}$.
30. В пространстве $L_2[-1, 1]$ найти проекции функций
а) $x(t) = t^2$; б) $x(t) = t^3$
на подпространство $X_0 = \{x(t) = c_1 + c_2 t\}$.

6 семестр

1. Какие из приведенных формул задают оператор:

- 1) $A[x(t)] = \max_{\tau \in [0, \frac{1}{2}]} |x(\tau)|$; $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$;
- 2) $A[x(t)] = x'(t)$, $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$;
- 3) $A[x(t)] = x(t+1)$, $A : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$;
- 4) $A[x(t)] = tx(t)$, $A : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$;
- 5) $A[x(t)] = x(0)$, $A : L_1(0, 1) \rightarrow L_1(0, 1)$;
- 6) $A[x(t)] = \frac{1}{x(t)}$, $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$;
- 7) $A[x(t)] = x(t-1)$, $A : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$;
- 8) $A[x(t)] = \int_0^t x(t) dt$, $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$;
- 9) $A[x(t)] = \int_0^t x(t) dt$, $A : L[0, \infty) \rightarrow L[0, \infty)$;
- 10) $A[x(t)] = \operatorname{sign} x(t)$, $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$;

- 11) $A[x(t)] = \int_1^t x(\tau) d\tau, \quad A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1];$
- 12) $A[x(t)] = \int_0^1 e^{t\tau} x(t) dt, \quad A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1];$
- 13) $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right), \quad A : l_\infty \rightarrow l_2;$
- 14) $(Ax)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^2} \sin kt, \quad A : l_\infty \rightarrow C[0, 1];$
- 15) $Ax = \left(x(1), x\left(\frac{1}{2}\right), x\left(\frac{1}{3}\right), \dots\right), \quad A : C[0, 1] \rightarrow l_1;$
- 16) $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{2x_2}{3}, \dots\right), \quad A : l_\infty \rightarrow l_\infty;$
- 17) $Ax = (x_1, x_2^2, x_3^3, \dots), \quad A : l_2 \rightarrow l_2?$

2. Привести примеры нетривиальных операторов в заданных пространствах

- 1) $C[0, 1] \rightarrow C[-1, 1];$
- 2) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3;$
- 3) $l_1 \rightarrow l_2;$
- 4) $l_\infty \rightarrow C[0, 1];$
- 5) $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2;$
- 6) $l_\infty \rightarrow \mathbb{R}^2;$
- 7) $l_\infty \rightarrow l_1;$
- 8) $L_1(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1);$
- 9) $C(0, \infty) \rightarrow l_1;$
- 10) $L_1(0, 1) \rightarrow C[0, 1];$
- 11) $C[0, 1] \rightarrow l_\infty$
- 12) $C[0, 1] \rightarrow C[1, 3];$
- 13) $C^1[0, 1] \rightarrow l_2.$

3. Какие из приведенных ниже операторов являются линейными?

- 1) $A[x(t)] = 3x(t) + t, \quad A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1];$
- 2) $A[x(t)] = \int_0^{\frac{1}{3}} (t^3 + \tau^3) x(\tau) d\tau, \quad A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1];$
- 3) $A[x(t)] = \cos 2x(t), \quad A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1];$
- 4) $A[x(t)] = tx(t^2), \quad A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1];$
- 5) $A[x(t)] = |x(t)|, \quad A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1];$
- 6) $A[x(t)] = \int_0^1 e^{t\tau} d\tau, \quad A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1];$
- 7) $(Ax)(t) = \cos(tx_2), \quad A : \mathbb{R}^2 \rightarrow C(-\infty, \infty);$
- 8) $(Ax)(t) = 4x_1^2 t + 3x_2 t^2, \quad A : \mathbb{R}^2 \rightarrow C(-\infty, \infty);$
- 9) $(Ax)(t) = x_1 \sin t - 3x_2 \sqrt[3]{t}, \quad A : \mathbb{R}^2 \rightarrow C(-\infty, \infty);$

4. Проверить линейность и ограниченность функционалов и найти их нормы в l_1, l_2, l_∞ :

- 1) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k};$
- 2) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k;$
- 3) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x_k}{k!}.$

5. Найти норму линейного функционала а) в $C[0, 1]$, б) в $L_1[0, 1]$, в) в $L_2[0, 1]$, заданного выражением $\int_0^1 h(t)x(t)dt$, если функция $h(t)$ равна:

- 1) $\begin{cases} -3, & 0 \leq t \leq 0,6, \\ 0,2, & 0,6 < t \leq 1; \end{cases}$
- 2) $\ln(t + \frac{1}{4});$
- 3) $2t - 1;$
- 4) $\cos \pi t;$
- 5) $2 - \sin \pi t$
- 6) $\sqrt{t+4};$
- 7) $\sqrt{t^2 - t + 6};$
- 8) $e^{2t} - 3;$
- 9) $ch 2t;$
- 10) $\cos\left(t - \frac{1}{2}\right);$
- 11) $t^3 - t;$
- 12) $t^2 - 4t + \frac{1}{3};$

6. Найти нормы следующих операторов.

- 1) $A[x(t)] = \int_1^t x(\tau) d\tau, A \in \mathcal{L}(C[0, 1]);$
- 2) $A[x(t)] = x'(t), A \in \mathcal{L}(C^1[0, 1], C[0, 1]);$
- 3) $A[x(t)] = t^2 x(t), A \in \mathcal{L}(L_2[0, 1]);$
- 4) $A[x(t)] = e^{t+1} x(t), A \in \mathcal{L}(C[0, 1]);$
- 5) $A[x(t)] = \frac{t}{t+1} x(t), A \in \mathcal{L}(C[0, \infty));$
- 6) $A[x(t)] = \int_0^t x(\tau) \sin \tau d\tau, A \in \mathcal{L}(C[0, 1]);$
- 7) $A[x(t)] = t^2 x(0) - tx\left(\frac{1}{2}\right), A \in \mathcal{L}(C[0, 1]);$
- 8) $A[x(t)] = x(t^4), A \in \mathcal{L}(C[0, 1]);$
- 9) $A[x(t)] = (t^2 + 2)x(0), A \in \mathcal{L}(C[0, 1]);$
- 10) $A[x(t)] = t \int_0^1 x(t) dt, A \in \mathcal{L}(L_2[0, 1]);$
- 11) $A[x(t)] = \int_0^\pi (2t + \tau^2) x(\tau) d\tau, A \in \mathcal{L}(L_1[0, \pi]);$
- 12) $A[x(t)] = \int_0^\pi (t - \tau + 1) x(\tau) d\tau, A \in \mathcal{L}(L_1[0, \pi], C[0, \pi]);$
- 13) $A[x(t)] = \int_0^\pi (\sin t + 2 \cos \tau) x(\tau) d\tau, A \in \mathcal{L}(C[0, \pi], L_1[0, \pi]);$
- 14) $A[x(t)] = \int_0^\pi (2t - \tau)^2 x(\tau) d\tau, A \in \mathcal{L}(L_2[0, \pi]);$
- 15) $Ax = \left(-x_1, \frac{x_2}{2}, -\frac{x_3}{3}, \dots\right), A \in \mathcal{L}(l_1);$
- 16) $Ax = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{2x_3}{3}, \frac{3x_4}{4}, \dots\right), A \in \mathcal{L}(l_1);$
- 17) $Ax = (x_1, x_3, x_2 + x_5), A \in \mathcal{L}(l_\infty, \mathbb{R}^3).$

7. Найти оператор, сопряженный оператору $A \in \mathcal{L}(l_2)$:

- 1) $Ax = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$
- 2) $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, \dots), \{\lambda_n\} \in l_\infty;$
- 3) $Ax = (0, x_1, x_2, \dots);$
- 4) $Ax = (x_2, x_3, \dots);$
- 5) $Ax = (5x_1 - 2x_2, x_3, x_4, \dots).$

8. Найти оператор, сопряженный оператору $A \in \mathcal{L}(L_2[0, 1]), A[x(t)] = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds$, если функция $K(t, s)$ имеет вид:

- | | |
|----------------------------|--------------------------------------|
| 1) 1; | 8) te^{-s} |
| 2) t ; | 9) $t(e^{3s} - \frac{1}{5})$; |
| 3) s ; | 10) $\frac{1+s}{1+t}$; |
| 4) $t-s$; | 11) $\sin(t - 2s)$; |
| 5) $t + \sin 2s$; | 12) $e^{t-s} \cos(t^3 - \sqrt{s})$; |
| 6) $ 2\pi - 2s \sin 4t$; | 13) $t \sin s - s^2 \cos t$. |
| 7) $2t - 3s$; | |

9. Исследовать обратимость оператора $A \in \mathcal{L}(l_p)$, заданного бесконечной матрицей (a_n) , если:

- 1) $a_n = 1 + (-1)^n$;
- 2) $a_n = \frac{1}{n}$;
- 3) $\frac{1}{3} \leq |a_n| \leq 4$.

10. Исследовать обратимость оператора $A \in \mathcal{L}(C[0, 1])$, заданного соотношением: $A[x_0(t)] = x_0(t)x(t)$, где

- 1) $x_0(t) = (t - c) - |t - c|, c \in (a, b)$;
- 2) $x_0(t) = (t - c), c \in (a, b)$;

- 2) $x_0(t) = 1 + t^2$.
11. Исследовать обратимость оператора $A \in \mathcal{L}(C[0, 1])$:
- 1) $A[x(t)] = \int_0^t x(s) ds$;
 - 2) $A[x(t)] = \int_0^1 tsx(s) ds$;
 - 3) $A[x(t)] = x(t) - \int_0^t x(s) ds$;
 - 4) $A[x(t)] = x(t) - \int_0^1 x(s) ds$;
 - 5) $A[x(t)] = x(t) - \int_0^1 sx(s) ds$.
- Если оператор A обратим, то найти его обратный.
12. Какие из операторов $A \in \mathcal{L}(l_2)$ вполне непрерывны:
- 1) $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$, 2) $Ax = (x_2, x_3, \dots)$, 3) $Ax = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$,
13. Какие из операторов $A \in \mathcal{L}(C[0, 1])$ вполне непрерывны:
- 1) $A[x(t)] = \int_0^t x(s) ds$;
 - 2) $A[x(t)] = (t + 2)x(t)$;
 - 3) $A[x(t)] = x(0) \cos(2t) - x(1) \sin(2t)$;
 - 4) $A[x(t)] = \int_0^t e^{ts} x(s) ds$;
 - 5) $A[x(t)] = x(t^2)$.
14. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $A \in \mathcal{L}(l_\infty)$:
- 1) $Ax = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n, \dots)$; 2) $Ax = (x_3, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$;
 - 3) $Ax = (-x_1, x_2, \dots, (-1)^n x_n, \dots)$; 4) $Ax = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$;
 - 5) $Ax = (0, 0, \dots, 0, x_n, 0, \dots)$; 6) $Ax = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$;
 - 7) $Ax = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$; 8) $Ax = (x_2, x_3, \dots)$.
15. Найти спектр и спектральный радиус оператора $A \in \mathcal{L}(C[0, 1])$:
- 1) $A[x(t)] = \int_0^t x(s) ds$; 2) $A[x(t)] = (t + 2)x(t)$; 3) $A[x(t)] = tx(t)$;
 - 4) $A[x(t)] = \int_0^1 tsx(s) ds$; 5) $A[x(t)] = \int_0^1 (t + s)x(s) ds$.
16. Решить уравнение при заданных значениях свободного члена $f(t)$:
- 1) $x(t) = \frac{1}{3} \int_0^1 x(s) ds + f(t)$, а) $f(t) = 1$, б) $f(t) = t$, в) $f(t) = 1 - t$;
 - 2) $x(t) = \int_0^1 tsx(s) ds + f(t)$, а) $f(t) = t$, б) $f(t) = t^2$, в) $f(t) = t - t^2$;
 - 3) $x(t) = \int_0^\pi \cos s x(s) ds + f(t)$, а) $f(t) = \sin t$, б) $f(t) = \cos t$;
 - 4) $x(t) = \int_0^\pi \sin t \cos s x(s) ds + f(t)$, а) $f(t) = \sin t$, б) $f(t) = \cos t$;
 - 5) $x(t) = \int_{-1}^1 (ts + t^2 s^2) x(s) ds + f(t)$, а) $f(t) = 1$, б) $f(t) = t^2 + t$;
 - 6) $x(t) = \int_0^{2\pi} \cos(t - s) x(s) ds + f(t)$, а) $f(t) = \sin t$, б) $f(t) = \cos t$.

Примерный перечень вопросов для подготовки к экзамену.

Перечень компетенций (части компетенции), проверяемых оценочным средством: ПК-1, ПК-2.

5 семестр.

1. Периодические величины. Гармонический анализ. Понятие ряда. Коэффициенты Фурье.

2. Тригонометрический ряд Фурье периодической функции с периодом 2π и коэффициенты Фурье
3. Разложение в ряд Фурье на произвольном промежутке.
4. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций
5. Разложение в ряд Фурье непериодических функций только по синусам или по косинусам
6. Ряд Фурье в комплексной форме.
7. Лемма Римана.
8. Интеграл Дирихле.
9. Принцип локализации
10. Теорема о сходимости ряда Фурье для кусочно-дифференцируемой функции.
11. Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье.
12. Косинус и синус преобразования Фурье.
13. Свойства преобразования Фурье.
14. Множества, пространства, подпространства, операции над множествами.
15. Интуитивное понятие меры множества и его свойства.
16. Внешняя мера и мера Лебега.
17. Теорема Лебега.
18. Множество меры ноль.
19. Понятие измеримого функционала и критерий измеримости функционала.
20. Измеримые функционалы и их свойства: умножение на число, сложение с числом, сумма двух измеримых функционалов.
21. Измеримые функционалы и их свойства: сравнение, умножение и деление функционалов.
22. Измеримые функционалы и их свойства: предел последовательности измеримых функционалов.
23. Эквивалентные функционалы, понятие «почти всюду».
24. Простые функционалы. Теорема об измеримости предела последовательности простых функционалов.
25. Интеграл Лебега от простого функционала и ограниченного функционала.
26. Свойства интеграла Лебега.
27. Сравнение интегралов Лебега и Римана для ограниченных функций.
28. Распределения и интеграл Лебега. Интеграл Римана-Стилтьеса.
29. Интеграл Лебега от неограниченных функций.
30. Прямое произведение множеств и мер.
31. Теорема Фубини.
32. Пространства Лебега. Теорема о вложении пространств.
33. Линейность пространств Лебега.
34. Неравенство Гельдера.
35. Неравенство Минковского.
36. Метрика, аксиомы и определение метрического пространства.
37. Примеры метрических пространств.
38. Шар, сфера, окрестность и сопутствующие понятия в метрическом пространстве.
39. Последовательности в метрических пространствах, сходимость последовательностей. Теорема о единственности предела.
40. Фундаментальные последовательности в метрических пространствах. Теорема о сходящейся и фундаментальной последовательности.
41. Полные метрические пространства. Теорема о пополнении метрического пространства.
42. Метрические пространства. Принцип вложенных шаров.
43. Критерий полноты метрического пространства на основе системы вложенных шаров.
44. Компактные множества в метрических пространствах. Ограниченность компактного множества.

45. Компактные множества в метрических пространствах. Замкнутость компактного множества.
46. Компактные множества в метрических пространствах. Полнота компактного множества.
47. Понятие эпсилон-сети и вполне ограниченного множества. Теорема Хаусдорфа.

6 семестр.

48. Линейные пространства над полем чисел. Линейная зависимость, базис и размерность пространства.
49. Норма и линейные нормированные пространства (ЛНП), примеры. Свойства нормы как функционала.
50. Последовательность в линейных нормированных пространствах. Банаховы пространства. Теорема о полноте конечномерного ЛНП.
51. Сравнение норм. Теорема об эквивалентности норм конечномерного ЛНП.
52. Ряды в банаховых пространствах, абсолютная сходимость, теорема об абсолютно сходящихся рядах.
53. Скалярное произведение. Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства. Примеры.
54. Норма в гильбертовом пространстве, тождество параллелограмма, поляризационное тождество.
55. Ортогональность. Ортогональное дополнение. Теорема о разложении гильбертова пространства. Расстояние от элемента до подпространства.
56. Ортогональная система элементов. Линейная независимость ортогональной системы.
57. Ортогонализация Гильберта-Шмидта.
58. Полнота ортогональной системы. Теорема Пифагора.
59. Определение и примеры сепарабельных нормированных пространств.
60. Понятие сепарабельного пространства и плотного множества. Теорема о полноте ортогональной системы в сепарабельном пространстве.
61. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Теорема об экстремальном свойстве частичных сумм ряда Фурье.
62. Отображения в метрических пространствах. Сжимающие отображения. Теорема о непрерывности сжимающих отображений.
63. Принцип неподвижной точки для сжимающих отображений.
64. Линейный оператор (ЛО). Непрерывность и критерий непрерывности ЛО.
65. Ограниченность линейного оператора, необходимый и достаточный признак непрерывности.
66. Норма линейного оператора. Вычисление нормы.
67. Пространство линейных операторов. Сходимость линейных операторов.
68. Обратный линейный оператор. Единственность.
69. Теорема Банаха-Штейнгауза.
70. Ядро оператора. Критерий существования обратного ЛО.
71. Теорема о норме обратного оператора.
72. Интегральное уравнение Фредгольма. Решение интегрального уравнения Фредгольма II рода с вырожденным ядром.
73. Принцип неподвижной точки. Теорема о существовании оператора $(I - P)^{-1}$.
74. Проекционные методы решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве: метод наименьших квадратов, метод Галеркина.
75. Собственные значения линейного оператора, линейная независимость собственных решений.
76. Резольвента, регулярное множество и спектр линейного оператора. Оценка точек спектра.

77. Спектр, спектральный радиус линейного оператора. Критерий обратимости оператора $(J - A)$.
78. Теорема Хана-Банаха в линейном пространстве.
79. Самосопряженные операторы. Свойства.
80. Определение и простейшие свойства компактных операторов.
81. Теорема о структуре компактного оператора.
82. Линейные функционалы в ЛНП. Ядро линейного функционала. Теоремы о ядре линейного функционала.
83. Ограниченность, норма и непрерывность линейного функционала в ЛНП.
84. Теорема Рисса о линейном функционале в гильбертовом пространстве.
85. Сопряжённое пространство. Сильная и слабая сходимости.
86. Линейные непрерывные функционалы в ЛНП. Непрерывность и ограниченность линейного функционала в ЛНП.
87. Производная по Гато.
88. Производная Фреше.

Критерии оценивания результатов обучения

Оценка	Критерии оценивания по экзамену
Высокий уровень «5» (отлично)	оценку «отлично» заслуживает студент, освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал без пробелов; выполнивший все задания, предусмотренные учебным планом на высоком качественном уровне; практические навыки профессионального применения освоенных знаний сформированы.
Средний уровень «4» (хорошо)	оценку «хорошо» заслуживает студент, практически полностью освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не оценены максимальным числом баллов, в основном сформировал практические навыки.
Пороговый уровень «3» (удовлетворительно)	оценку «удовлетворительно» заслуживает студент, частично с пробелами освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, многие учебные задания либо не выполнил, либо они оценены числом баллов близким к минимальному, некоторые практические навыки не сформированы.
Минимальный уровень «2» (неудовлетворительно)	оценку «неудовлетворительно» заслуживает студент, не освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не выполнил, практические навыки не сформированы.

Для успешного выполнения лабораторной работы обучающемуся следует ознакомиться с теоретической частью дисциплины по теме лабораторной работы, изложенной в лекциях. Для углубленного понимания теоретического материала могут быть использованы источники, указанные в списке основной литературы [1-8].

Критерием должной подготовки студентов к выполнению лабораторных работ являются приобретенные знания, позволяющие безошибочно ответить на вопросы, сформулированные по каждой теме лабораторных работ. Для приобретения должных навыков к решению задач предполагается решение задач на лабораторных занятиях в учебных аудиториях под руководством преподавателя. Закрепление приобретенных

навыков осуществляется внеаудиторным самостоятельным решением студентом задач. Номера задач для решения в аудитории и дома указаны к каждой лабораторной работе.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

- при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

- при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

- при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

5. Перечень учебной литературы, информационных ресурсов и технологий

5.1. Учебная литература:

1. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 272 с. — ISBN 978-5-8114-0976-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210290> (дата обращения: 18.09.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Филимоненкова, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 176 с. — ISBN 978-5-8114-1821-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/212048> (дата обращения: 18.09.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Гуревич, А. П. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / А. П. Гуревич, В. В. Корнев, А. П. Хромов. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 192 с. — ISBN 978-5-8114-1274-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210809> (дата обращения: 18.09.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Дерр, В.Я. Функциональный анализ: лекции и упражнения.—М: КНОРУС, 2013
5. Кудрявцев, Лев Дмитриевич. Курс математического анализа: учебник для бакалавров: учебник для студентов вузов, обучающихся по естественнонаучным и техническим направлениям и специальностям. Т3. / Л. Д. Кудрявцев ; Моск. физико-техн. ин-т (Гос.

ун-т). - 6-е изд. - Москва : Юрайт, 2012. - 351 с. - (Бакалавр. Базовый курс). - ISBN 9785991618922 : 306.79. (50)

5.2. Периодическая литература

Не используется

5.3. Интернет-ресурсы, в том числе современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Электронно-библиотечные системы (ЭБС):

1. ЭБС «УНИВЕРСИТЕТСКАЯ БИБЛИОТЕКА ОНЛАЙН» www.biblioclub.ru
2. ЭБС «ZNANIUM.COM» www.znanium.com
3. ЭБС «ЛАНЬ» <https://e.lanbook.com>

Профессиональные базы данных:

1. Web of Science (WoS) <http://webofscience.com/>
2. Scopus <http://www.scopus.com/>
3. ScienceDirect www.sciencedirect.com
4. Springer eBooks: <https://link.springer.com/>
5. Общероссийский портал Math-Net.Ru: <http://www.mathnet.ru>

Ресурсы свободного доступа:

1. Федеральный портал "Российское образование" <http://www.edu.ru/>;
2. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов <http://school-collection.edu.ru/> .
3. Образовательный портал "Учеба" <http://www.uceba.com/>;

Собственные электронные образовательные и информационные ресурсы КубГУ:

1. Среда модульного динамического обучения <http://moodle.kubsu.ru>
2. База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций <http://mschool.kubsu.ru/>

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной теоретический материал, лабораторных занятий, позволяющих студентам в полной мере ознакомиться с понятиями и методами Комплексного анализа и навыками их применением в решении практических задач.

Важнейшим этапом является самостоятельная работа по дисциплине. Целью самостоятельной работы бакалавра является углубление знаний, полученных в результате аудиторных занятий. Вырабатываются навыки самостоятельной работы. Закрепляются опыт и знания, полученные во время лабораторных занятий.

Самостоятельная работа студентов в ходе изучения дисциплины состоит в выполнении индивидуальных заданий, задаваемых преподавателем, ведущим лабораторные занятия, подготовки теоретического материала к лабораторным занятиям, на основе конспектов лекций и учебной литературы, согласно календарному плану и

подготовки теоретического материала к тестовому опросу, зачету и экзамену, согласно вопросам к экзамену.

Указания по оформлению работ:

- работа на лабораторных занятиях и конспекты лекций могут выполняться на отдельных листах либо непосредственно в рабочей тетради;

- оформление индивидуальных заданий желательно на отдельных листах.

Проверка индивидуальных заданий по темам, разобранным на лабораторных занятиях, осуществляется через неделю на текущем лабораторном занятии, либо в течение недели после этого занятия на консультации.

Для разъяснения непонятных вопросов лектором и ассистентом еженедельно проводятся консультации, о времени которых группы извещаются заранее.

Учебная деятельность проходит в соответствии с графиком учебного процесса. Процесс самостоятельной работы контролируется во время аудиторных занятий и индивидуальных консультаций. Самостоятельная работа студентов проводится в форме изучения отдельных теоретических вопросов по предлагаемой литературе и выполнении практических заданий по разобранным во время аудиторных занятий примерам.

Фонд оценочных средств дисциплины состоит из средств текущего контроля (см. список задач и вопросов коллоквиума) и итоговой аттестации (зачета, экзамена).

В качестве оценочных средств, используемых для текущего контроля успеваемости, предлагается перечень вопросов, которые прорабатываются в процессе освоения курса. Данный перечень охватывает все основные разделы курса, включая знания, получаемые во время самостоятельной работы. Кроме того, важным элементом технологии является самостоятельное решение студентами и сдача заданий. Это полностью индивидуальная форма обучения. Студент рассказывает свое решение преподавателю, отвечает на дополнительные вопросы

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

7 Материально-техническое обеспечение по дисциплине (модулю)

№	Вид работ	Наименование учебной аудитории, ее оснащенность оборудованием и техническими средствами обучения
1.	Лекционные занятия	Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа (аудитории: 129, 131, 133, А305, А307)
2.	Лабораторные занятия	Лаборатория, укомплектованная специализированной мебелью, техническими средствами обучения (современными ПЭВМ на базе процессоров Intel или AMD, объединёнными локальной сетью) с выходом в глобальную сеть Интернет, а также современным лицензионным программным обеспечением (операционная система Windows 10/11, пакет Microsoft Office, среды программирования MS Visual Studio)

		(аудитории: 101, 102, 105, 106, 107, А301а)
3.	Групповые (индивидуальные) консультации	Аудитория для семинарских занятий, групповых и индивидуальных консультаций, укомплектованные необходимой мебелью (доска, столы, стулья) (аудитории: 129, 131)
4.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Аудитория для семинарских занятий, текущего контроля и промежуточной аттестации, укомплектованная необходимой мебелью (доска, столы, стулья) (аудитории: 129, 131, 133, А305, А307, 147, 148, 149, 150, 100С, А3016, А512), компьютерами с лицензионным программным обеспечением и выходом в интернет (аудитории: 106, 106а. А301)
5.	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети Интернет, программой экранного увеличения, обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета, необходимой мебелью (доска, столы, стулья) (аудитория 102а, читальный зал).

Примечание: Конкретизация аудиторий и их оснащение определяется ОПОП.

Для самостоятельной работы обучающихся предусмотрены помещения, укомплектованные специализированной мебелью, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

Наименование помещений для самостоятельной работы обучающихся	Оснащенность помещений для самостоятельной работы обучающихся	Перечень лицензионного программного обеспечения
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (читальный зал Научной библиотеки)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	Операционная система Windows 10/11, пакет Microsoft Office
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (ауд 102а)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное	Операционная система Windows 10/11, пакет Microsoft Office

	оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	
--	--	--