

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук



УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по учебной работе,
качеству образования – первый
проректор

подпись

Т.А. Хагуров

«30» мая 2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Б1.О.24

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Специальность	01.05.01 Фундаментальные математика и механика
Специализация	«Фундаментальная математика и её приложения» «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг» «Машинное обучение, методы оптимизации и прогнозирование» «Математическое моделирование»
Форма обучения	очная
Квалификация	Математик. Механик. Преподаватель

Краснодар 2025

Рабочая программа дисциплины «Уравнения в частных производных» составлена в соответствии с ФГОС ВО по специальности 01.05.01 Фундаментальная математика и механика (уровень высшего образования: специалитет).

Программу составил:

Марковский А. Н., к.ф.-м.н., доц.



Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры математических и компьютерных методов, протокол № 15 от 13.05.2025.

Заведующий кафедрой

математических и компьютерных методов Лежнев А. В.



Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук, протокол № 4 от 14.05.2025.

Председатель УМК факультета математики и компьютерных наук Шмалько С. П.



Рецензенты:

Савенко И. В., коммерческий директор ООО «РосГлавВино»

Никитин Ю. Г., доцент кафедры теоретической физики и компьютерных технологий
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет»

1 Цели и задачи изучения дисциплины (модуля).

1.1 Цель освоения дисциплины.

Целями освоения дисциплины «Уравнения в частных производных» являются: подготовка в области уравнений в частных производных, находящих применение в задачах математической физике, механике, биологии, экологии. Овладение аналитическими и вычислительными методами решения основных начально краевых задач.

1.2 Задачи дисциплины.

Овладение основными понятиями, идеями и методами теории уравнений в частных производных; методами Фурье и базисных потенциалов для аналитического и численного решения основных начально краевых задач с использованием системы компьютерной алгебры (MathCAD), визуализация полученных результатов.

При освоении дисциплины вырабатывается общематематическая культура: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для анализа дифференциальных уравнений в частных производных и эффективно их решать. Получаемые знания лежат в основе математического образования и опираются на знания дисциплин: математический анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, функциональный анализ, теория функций комплексного переменного, вычислительные методы.

1.3 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы.

Дисциплина «Уравнения в частных производных» относится к обязательной части Блока 1 "Дисциплины (модули)" учебного плана.

Знания и умения, приобретенные студентами в результате изучения дисциплины, будут использоваться при изучении общих и специальных курсов, при выполнении курсовых и дипломных работ, связанных с аналитическим и численными методами использующие компьютерные пакеты прикладных программ для решения начально краевых задач математической физики.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование у обучающихся следующих компетенций.

Код и наименование индикатора* достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 – Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	
ОПК-1.1 – Знает актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики	Знать информационно-коммуникационные технологии и основные требования информационной безопасности
	Уметь решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры
	Владеть способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности
ОПК-1.2 – Осуществляет выбор методов решения задач	Знать информационно-коммуникационные технологии и основные требования информационной безопасности

Код и наименование индикатора* достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
фундаментальной математики	Уметь решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры
	Владеть способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности
ОПК-1.3 – Владеет навыками формализации актуальных задач фундаментальной математики и применения подходящих методов их решения	Знать информационно-коммуникационные технологии и основные требования информационной безопасности
	Уметь решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры
	Владеть способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности
ОПК-2 – Способен создавать, анализировать и реализовывать новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	
ПКО-2.1 – Знает математические модели стандартных задач в области профессиональной деятельности	Знать информационно-коммуникационные технологии и основные требования информационной безопасности
	Уметь стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры
	Владеть способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности
ПКО-2.2 – Выбирает необходимые методы исследования, модифицирует существующие и разрабатывает новые методы, исходя из задач конкретного исследования	Знать информационно-коммуникационные технологии и основные требования информационной безопасности
	Уметь стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры
	Владеть способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности
ПКО-2.3 – Применяет полученные результаты, представляет итоги проделанной работы	Знать информационно-коммуникационные технологии и основные требования информационной безопасности
	Уметь стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры
	Владеть способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности

Результаты обучения по дисциплине достигаются в рамках осуществления всех видов контактной и самостоятельной работы обучающихся в соответствии с утвержденным учебным планом.

Индикаторы достижения компетенций считаются сформированными при достижении соответствующих им результатов обучения

2. Структура и содержание дисциплины.

2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ.

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 7 зачетных единиц (252 часа), их распределение по видам работ представлено в таблице

Вид учебной работы		Всего часов	Семестры (часы)	
			6-й	7-й
Контактная работа, в том числе:		130,5	58,2	72,3
Аудиторные занятия (всего)		120	52	68
Занятия лекционного типа		52	18	34
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)		–	–	–
Лабораторные занятия		68	34	34
Иная контактная работа:		10,5	6,2	4,3
Контроль самостоятельной работы (КСР)		10	6	4
Промежуточная аттестация (ИКР)		0,5	0,2	0,3
Самостоятельная работа, в том числе:		85,8	49,8	36
Проработка учебного (теоретического) материала		43,0	25	18
Подготовка к текущему контролю		42,8	24,8	18
Контроль		35,7	–	35,7
Общая трудоемкость	час.	252	108	144
	в том числе контактная работа	130,5	58,2	73,3
	зач. ед	7	3	4

2.2 Структура дисциплины:

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы дисциплины, изучаемые в 6 и 7 семестре

№	Наименование разделов	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	СРС
1	2	3	4	5	6	7
6-й семестр						
1	Функциональные пространства	25,8	6	–	6	13,8
2	Спектральные задачи	24	4	–	8	12
3	Уравнение диффузии	26	4	–	10	12
4	Гармонические функции	26	4	–	10	12
	<i>Итого по дисциплине:</i>	101,8	18	–	34	49,8
7-й семестр						
1	Теория потенциала	28	10	–	6	12
2	Обобщенное решение	24	8	–	8	8
3	Классификация уравнений второго порядка	24	6	–	10	8
4	Уравнений гиперболического типа	28	10	–	10	8
	<i>Итого по дисциплине:</i>	104	34	–	34	36

Примечание: Л – лекции, ПЗ – практические занятия / семинары, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента

2.3 Содержание разделов дисциплины:

2.3.1 Занятия лекционного типа.

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
6-й семестр			
1	Функциональные пространства	Замыкание множества. Линейные многообразия плотные в нормированном пространстве. Банахово пространство. Пополнение нормированного пространства. Пространство Лебега. Изоморфизм, изометрия и вложение нормированных пространств. Пространства Соболева и простейшая теорема вложения. Неравенство Фридрихса	
2	Спектральные задачи	Гильбертовы пространства. Ряды Фурье. Полные ортогональные системы. Ортогональные разложения в гильбертовом пространстве. Формулы Остроградского и Грина. Спектральные задачи уравнения Лапласа	
3	Уравнение диффузии	Уравнение диффузии, принцип максимума. Первая краевая задача уравнения теплопроводности, единственность. Метод Фурье, существование решения. Стабилизация решения при неограниченном времени. Вторая краевая задача уравнения теплопроводности, существование. Вторая краевая задача, стабилизация. Обратная задача теплопроводности, некорректность. Обратная задача теплопроводности, регуляризация	
4	Гармонические функции	Фундаментальное решение уравнения Лапласа, свойства. Интегральное представление функции. Гармонические функции, свойства. Теорема о среднем. Подпространство гармонических функций, полная система потенциалов. Подпространство гармонических функций, лемма Новикова. Задача Робена, алгоритм, полнота системы	
7-й семестр			
1	Элементы теории потенциала	Потенциала двойного слоя, граничные свойства, интегральный оператор. Методы теории потенциала решения 1-ой и 2-ой краевых задач. Полнота системы альфа и бета. Метод базисных потенциалов. Внутренняя задачи Дирихле и Внутренняя задачи Неймана. Алгоритмы. Бигармоническая задача, единственность, алгоритм МБП	
2	Обобщенное решение	Другое определение обобщенной производной. Теорема Рисса об общем виде линейных функционалов. Вложение гильбертовых пространств. Следствие из теоремы Рисса. Существование и единственность решения задачи Дирихле уравнения Пуассона	

3	Классификация уравнений второго порядка	Уравнения характеристик. Классификация уравнений второго порядка. Приведение к каноническому виду. Соотношения на характеристиках. Сетка характеристик, метод характеристик	
4	Уравнений гиперболического типа	Вывод уравнений звуковых колебаний. Основные задачи. Уравнения звуковых колебаний, основные задачи. Краевые задачи на примере уравнения мембраны. Метод Фурье для первой краевой задачи. Вторая краевая задача звуковых колебаний мембраны. Закон сохранения и теорема единственности	

2.3.2 Занятия семинарского типа.

Занятия семинарского типа не предусмотрены

2.3.3 Лабораторные занятия.

№	Наименование лабораторных работ	Форма текущего контроля
1	3	4
6-й семестр		
1	Вычисление криволинейного интеграла первого и второго рода	ЛР
2	Вычисление криволинейных интегралов специального типа	ЛР
3	Вычисление двойного интеграла по заданной области	ЛР
4	Интегральное представление заданной функции	ЛР
5	Ортогональные системы. Разложение в ряд Фурье заданной функции	ЛР
6	Представление решение уравнения теплопроводности	ЛР
7	Алгоритм решения обратной задачи теплопроводности	ЛР
8	Регуляризация решения обратной задачи теплопроводности	ЛР
9	Задача Робена	ЛР
7-й семестр		
10	Внутренняя краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа	ЛР
11	Внешняя краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа	ЛР
12	Внутренняя краевая задача Неймана для уравнения Лапласа	ЛР
13	Внешняя краевая задача Неймана для уравнения Лапласа	ЛР
14	Внутренняя краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона	ЛР
15	Бигармоническая задача	ЛР
16	Задача собственного вихря заданной области	ЛР
17	Приведение уравнения к каноническому виду	

Защита лабораторной работы (ЛР), выполнение курсового проекта (КП), курсовой работы (КР), расчетно-графического задания (РГЗ), написание реферата (Р), эссе (Э), коллоквиум (К), тестирование (Т) и т.д.

2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Курсовые работы не предусмотрены

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Самостоятельная работа студентов по дисциплине включает следующие виды деятельности:

- проработку и анализ лекционного материала;
- изучение учебной литературы;
- поиск информации в сети Интернет по различным вопросам;
- решение задач по темам курса;
- работу с вопросами для самопроверки;
- подготовку к контрольной работе;
- подготовку к зачёту и экзамену.

Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины представлен в таблице.

№	Вид самостоятельной работы	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1.	Подготовка к текущему контролю	Методические указания для подготовки к занятиям лекционного и семинарского типа. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5 от 05 мая 2022 г. Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5 от 05 мая 2022 г. Методические указания по использованию интерактивных методов обучения. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5т от 05 мая 2022 г. Методические указания по подготовке эссе, рефератов, курсовых работ. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5т от 05 мая 2022 г.
2.	Выполнение лабораторных работ и расчетно-графических заданий	Методические указания по выполнению лабораторных работ. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5 от 05 мая 2022 г. Методические указания по выполнению расчетно-графических заданий. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5 от 05 мая 2022 г.
3.	Подготовка и оформление отчетов по практике	1. Методические указания по подготовке и оформлению отчета по практике. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5 от 05 мая 2022 г.
4.	Выполнение и защита выпускной квалификационной работы	1. Методические указания по выполнению и защите выпускной квалификационной работы (бакалавриат, магистратура, специалитет). Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5 от 05 мая 2022 г.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом;
- в форме электронного документа;
- в форме аудиофайла;
- в печатной форме на языке Брайля.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме;
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме;
- в форме электронного документа;
- в форме аудиофайла.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

3. Образовательные технологии.

Лекции, лабораторные занятия, контрольные работы, зачет и экзамен.

Разбор практических задач и примеров, моделирование ситуаций, приводящих к тем или иным ошибкам в программе, выработка навыков выявления и исправления ошибок в процессе написания программы. Построение тестовых примеров для выявления ошибок в программе и сравнения эффективности различных алгоритмов.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля.

4.1.1 Примерный перечень тем для рефератов и устных опросов

1. Дайте определение квазилинейного уравнения первого порядка, его решения?
2. Какое геометрическое толкование можно дать квазилинейному уравнению первого порядка, его решению, характеристикам?
3. Сформулируйте задачу Коши для квазилинейного уравнения первого порядка и дайте ей геометрическую интерпретацию.
4. Чем определяется тип уравнения второго порядка?
5. С помощью, каких преобразований можно уравнение второго порядка привести к каноническому виду?
6. Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнения и привести его к каноническому виду в области гиперболичности.
7. Сформулируете теорему Коши-Ковалевской.
8. Дайте определение корректно поставленной задачи математической физики.
9. Каковы характерные особенности задач, приводящихся к уравнениям гиперболического типа?
10. В чем заключается физическая интерпретация формулы Даламбера?
11. Что такое прямая и обратная волна?
12. Что такое область зависимости решения?
13. Чем объясняется тот факт, что принцип Гюйгенса не имеет места в плоском случае?
14. Пользуясь методом спуска, получите из формулы Пуассона решения задачи о колебании бесконечной струны.

15. Что такое запаздывающий потенциал?
16. В каком случае может существовать стационарное решение неоднородного уравнения с неоднородными граничными условиями?
17. Какая задача называется характеристической?

4.1.2 Образцы индивидуальных заданий

Номер варианта k задания определяется номером студента по списку группы. Каждому варианту соответствует криволинейный треугольник Q_k с границей $S = S_k$ (см. [5], с. 5).

Задание № 1 (k). Вычислить аналитически и на компьютере (в системе символьной алгебры) двойной и криволинейные интегралы первого и второго рода

$$J_0 = \iint_Q dx dy, \quad J_1 = \int_S 2 ds, \quad J_2 = \int_S y dx,$$

по указанным контурам $S = S_k$ с положительным направлением обхода, записав для каждой части контура S_k параметрическое представление и соответствующие определенные интегралы, учитывая направление обхода.

Задание № 2 (k). Вычислить значения криволинейного интеграла

$$J_3(x_m, y_m) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n} \ln \left((x - x^m)^2 + (y - y^m)^2 \right) ds,$$

где $S = S_k$ – указанный для каждого варианта контур, точки (x^m, y^m) , $m = 1, 2, 3$ – соответственно внешняя, граничная и внутренняя точки (выбрать самостоятельно), $n = \vec{n}(x, y)$ – внешняя единичная нормаль к S .

Задание № 3. 1) Доказать, что функция $\ln \left((x - x^m)^2 + (y - y^m)^2 \right)$ является гармонической при $(x, y) \neq (x^m, y^m)$, а функция

$$\beta(r, t) = \int_S \ln \left((x - r)^2 + (y - t)^2 \right) ds$$

гармоническая в Q и в области $Q^+ = R^2 \setminus \overline{Q}$.

2) Доказать асимптотическое равенство

$$\beta(r, t) = \ln \left((r)^2 + (t)^2 \right) \int_S ds + o(1), \quad r^2 + t^2 \rightarrow \infty.$$

Задание № 4 (k). Построить аналитическое решение методом Фурье при $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$ и $f(x) = 0$ и представить формулы коэффициентов Фурье задачи

$$u_t = u_{xx}(x, t) + f(x), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T),$$

$$u|_{x=0} = \varphi_0(t), \quad u|_{x=1} = \varphi_1(t),$$

$$u|_{t=0} = H(x).$$

Функция $y = H(x)$, определяется для варианта k криволинейными сторонами треугольника Q_k .

Задание № 5 (k). Построить аналитическое решение методом Фурье при $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$ и $f(x) = 0$ и представить формулы коэффициентов Фурье задачи

$$u_t = u_{xx}(x, t) + f(x), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x=1} = \varphi_1(x),$$

$$u|_{t=0} = H(x).$$

Задание № 6 (k). Для решений задач 4 и 5, вычислить N первых коэффициентов Фурье h_n начальной функции $y = H(x)$, построить графики функций $u^N(0.3, t)$, $u^N(0.5, t)$, $0 \leq t \leq T$ ($N = 5, 10, 20$, сравнить их на одном графике), получить графики функций $y = H(x)$, $y = u^N(x, 0)$ и оценку $\|u^N(x, 0) - H(x)\|_{(0,1)}$.

Задание № 7 (k). Решить задачи 4 и 5 для неоднородного уравнения теплопроводности при $f(x) = 0.5q \sin q\pi x$, где $q=2$ для нечетных номеров и $q=4$ для четных номеров k ; построить графики функций $u^N(0.3, t)$, $u^N(0.5, t)$, $t > 0$; получить формулы для $c_m(t)$.

Задание № 8 (k). Обратная теплопроводность. Найти начальное распределение $v(x, t)|_{t=0} = G(x)$ температуры в стержне, если в момент времени $T > 0$ задано финальное распределение $g(x)$ – указанная выше функция, $v(x, t)$ – решение задачи:

$$v_t(x, t) = \Delta v(x, t)|_{x \in Q}, \quad v(x, t)|_{\partial Q} = 0, \quad v(x, t)|_{t=T} = g(x),$$

Рассмотреть метод простейшей регуляризации, δ – малый положительный параметр:

$$v_t(x, t) = \Delta v(x, t)|_{x \in Q}, \quad v(x, t)|_{\partial Q} = 0, \quad \delta v(x, 0) + v(x, T) = g(x)$$

Для данного T ($T = 0.1, 0.2$) и выбранного δ вычислить $c_K(t)$, получить решение обратной задачи в виде конечной суммы Фурье $v^N(x, t)$, определить приближенно искомую начальную функцию $v(x, 0)$, для нее получить решение прямой задачи $u(x, t)$ с начальным условием $u|_{t=0} = v(x, 0)$, вычислить финальную погрешность $\|u(x, T) - H(x)\|_{(0,1)}$ при разных δ и N .

Задание № 9 (k). Потенциал простого слоя

$$R(x) = \int_S \varphi^*(y) E(x - y) dS_y,$$

принимая постоянные значения на границе

$$R(x)|_S = R_S \equiv \text{const},$$

называется потенциалом Робена, а φ^* и R_S – плотностью и константой Робена соответственно. Для заданной кривой S найти плотность φ^* и константу R_S Робена. Используя метод базисных потенциалов.

Задание № 10 (k). Для краевой задачи Неймана для уравнения Пуассона

$$\Delta v(x, y)|_D = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}\bigg|_{\partial D} = 0.$$

в области $D = (0, \pi) \times (0, \pi)$ вычислить коэффициенты v_{nk} разложения решения $v(x, y)$ по ортонормированной системе $\varphi_{nk}(x, y)$ и получить аналитическое решение (в виде ряда), где $f(x, y) = H(x)\cos(2y)$ для нечетных вариантов k и $f(x, y) = \sin x H(y)$ для четных вариантов k ; функция $H(x)$ для варианта k определяется сторонами S_2, S_3 криволинейного треугольника Q_k . Представить график поверхности $v^N(x, y)$; графики $\Delta v^N(x, y)$ и вычислить погрешность $\varepsilon(N) = \left(\iint_D (\Delta v^N(x, y) - f(x, y))^2 dx dy\right)^{1/2}$; для $n, k = 0, 1, \dots, 7$ представить таблицу коэффициентов v_{nk} . Использовать метод Фурье (метод разложения по собственным функциям оператора Лапласа образующими полную систему в подпространстве $L_2^C(D)$, ортогональном единице, $L_2(D) = \{1\} \oplus L_2^C(D)$):

$$\begin{aligned} \varphi_{n0}(x, y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx, \quad \varphi_{0k}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos ky, \\ \varphi_{nk}(x, y) &= \frac{2}{\pi} \cos nx \cos ky, \quad n, k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Задание № 11 (k). Решить численно внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u(x, y)|_Q = 0, \quad (x, y) \in Q,$$

$$u|_S = g(x, y),$$

используя систему функций α_m^+ , $m = 1, \dots, N$; где $Q = Q_k$, $\partial Q_k = S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, $g(x, y) = M$ при $(x, y) \in S$. Представить линии уровня функции $u^N(x, y)$; вычислить погрешность $\delta(N) = \|g - u^N\|_S$ для разных N . Вычислить интеграл по S от нормальной производной $u^N(x, y)$.

Задание № 12 (k). Решить численно краевую задачу для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 w(x, y)|_Q = 0, \quad (x, y) \in Q,$$

$$w|_S = a(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial n}\bigg|_S = b(x, y),$$

$$\text{где } a(x, y) = \begin{cases} -1, (x, y) \in S_1, \\ 0, (x, y) \in S_2, \text{ и } b(x, y) = \begin{cases} 1, (x, y) \in S_2, \\ 0, (x, y) \in S_3. \end{cases} \\ 1, (x, y) \in S_3, \end{cases}$$

Представить: формулировку задачи, представление решения $w(x, y)$, график линий уровня функции $w(x, y)$, погрешность $\delta(N) = \|g - w^N\|_S$, таблицу вычисленных коэффициентов (физическая интерпретация: если $w(x, y)$ – функции тока, то вершины треугольника – это точечные источники и стоки).

Задание № 13 (k). Решить численно краевую задачу для бигармонического уравнения при условии $a(x, y) = 0$, $b(x, y) = \varphi^*(x, y)$, где $\varphi^*(x, y)$ – плотность потенциала Робена для S . Решение $w(x, y)$ – собственный (регулярный) вихрь области.

Задание № 14 (k). Для номеров $k=1, 2, \dots, 12$ решить задачу

$$u_{tt} = u_{xx}(x, t) + f(x), \quad x \in (0, \pi), \quad t \in (0, T),$$

$$u|_{x=0} = \varphi_0(t), \quad u|_{x=\pi} = \varphi_1(t),$$

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{t=0} = u^1(x),$$

$\varphi_1(t) = \varphi_0(t) = 0$, разложением функций по синусам кратных дуг (при этом $a_n(t) = 0$). Для номеров $k=1, 2, \dots, 6$ взять $u^0(x) = H(x)$, $x \in (0, 1)$, $u^0(x) = 0$, $x \in (1, \pi)$; $u^1(x) = 0$. Для номеров $k=7, \dots, 12$ – $u^0(x) = 0$, $u^1(x) = H(x)$, $x \in (0, 1)$, $u^1(x) = 0$, $x \in (1, \pi)$. Функция $H(x)$ $x \in (0, 1)$, определяется криволинейными сторонами треугольника Q_k . Записать в аналитическом виде решение задачи методом Фурье при $f(x) = 0$; выписать формулы для коэффициентов $b_n(t)$: $b_n''(t) = -n^2 b_n(t)$, $b_n'(0) = u_n^0$, $b_n'(0) = u_n^1$. Выбрать N для приближенного решения $u^N(x, t) = \sum_1^N b_n(t) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$, построить графики функций $u(x_j, t)$, $t > 0$, для некоторых x_j , графики функций $\|(u_x(x, t))\|_{(0, \pi)}^2$, $\|(u_t(x, t))\|_{(0, \pi)}^2$ и их суммы. Сделать «анимацию» графиков $u(x, ph)$, $x \in (0, \pi)$, $p=1, 2, \dots$, при некотором малом h .

Задание № 15 (k). Решить эту задачу для неоднородного уравнения

$$u_{tt} = u_{xx}(x, t) + f(x), \quad x \in (0, \pi), \quad t \in (0, T),$$

при $f(x) = 0.5q \sin q\pi x$, где $q=2$ для нечетных номеров и $q=4$ для четных номеров k ; построить графики функций $u(0.3, t)$, $u(0.5, t)$, $t > 0$. Замечание. Заменой искомой функции можно перейти к задаче с однородным уравнением.

Для получения зачёта студент должен выполнить и сдать преподавателю полученные практические семестровые задания.

4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

4.2.1 Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Основные функциональные пространства.
2. Замыкание множества.
3. Линейные многообразия плотные в нормированном пространстве.
4. Банахово пространство.
5. Пополнение нормированного пространства.
6. Пространство Лебега.
7. Изоморфизм, изометрия и вложение нормированных пространств.
8. Пространства Соболева и простейшая теорема вложения.
9. Неравенство Фридрихса.
10. Гильбертовы пространства.
11. Ряды Фурье.
12. Полные ортогональные системы.
13. Ортогональные разложения в гильбертовом пространстве.
14. Формулы Остроградского и Грина.
15. Спектральные задачи уравнения Лапласа
16. Уравнение диффузии, принцип максимума.
17. Первая краевая задача уравнения теплопроводности, единственность.
18. Метод Фурье, существование решения.
19. Стабилизация решения при неограниченном времени.
20. Вторая краевая задача уравнения теплопроводности, существование.
21. Вторая краевая задача, стабилизация.
22. Обратная задача теплопроводности, некорректность.
23. Обратная задача теплопроводности, регуляризация.
24. Гармонические функции.
25. Фундаментальное решение уравнения Лапласа, свойства.
26. Интегральное представление функции.
27. Гармонические функции, свойства.
28. Теорема о среднем.
29. Подпространство гармонических функций, полная система потенциалов.
30. Подпространство гармонических функций, лемма Новикова.
31. Задача Робена, алгоритм, полнота системы.
32. Потенциала двойного слоя, граничные свойства, интегральный оператор.
33. Методы теории потенциала решения 1-ой и 2-ой краевых задач.
34. Полнота системы альфа и бета.
35. Метод базисных потенциалов.
36. Внутренняя задачи Дирихле и Внутренняя задачи Неймана. Алгоритмы.
37. Бигармоническая задача, единственность, алгоритм МБП.
38. Определение обобщенной производной.
39. Теорема Рисса об общем виде линейных функционалов.
40. Вложение гильбертовых пространств.
41. Следствие из теоремы Рисса.
42. Существование и единственность решения задачи Дирихле уравнения Пуассона
43. Классификация уравнений второго порядка.
44. Уравнения характеристик.
45. Классификация уравнений второго порядка.
46. Приведение к каноническому виду.
47. Соотношения на характеристиках.
48. Сетка характеристик, метод характеристик
49. Уравнений гиперболического типа.
50. Вывод уравнений звуковых колебаний. Основные задачи.
51. Уравнения звуковых колебаний, основные задачи.
52. Краевые задачи на примере уравнения мембраны.

53. Метод Фурье для первой краевой задачи.
54. Вторая краевая задача звуковых колебаний мембраны.
55. Закон сохранения и теорема единственности

4.2.2 Примерные билеты к экзамену

БИЛЕТ № 1

1. Пространства Соболева и простейшая теорема вложения
2. Классификация уравнений второго порядка

БИЛЕТ № 2

1. Первая краевая задача уравнения теплопроводности, единственность
2. Существование и единственность решения задачи Дирихле уравнения Пуассона

Критерии оценивания по зачету.

Оценка «Зачтено» выставляется при условии, что студент проявил знания основного минимума изученного материала в объеме, необходимом для последующего обучения. Практическое задание выполнено, возможно, имеются отдельные неточности и ошибки.

Оценка «Не зачтено» выставляется при условии, что обнаружены существенные пробелы в знании основного материала, практическое задание выполнено не в полном объеме, имеются существенные ошибки, окончательных ответов не получено.

Критерии оценивания по экзамену.

Оценка	Критерии оценивания по экзамену
Высокий уровень «5» (отлично)	оценку «отлично» заслуживает студент, освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал без пробелов; выполнивший все задания, предусмотренные учебным планом на высоком качественном уровне; практические навыки профессионального применения освоенных знаний сформированы.
Средний уровень «4» (хорошо)	оценку «хорошо» заслуживает студент, практически полностью освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не оценены максимальным числом баллов, в основном сформировал практические навыки.
Пороговый уровень «3» (удовлетворительно)	оценку «удовлетворительно» заслуживает студент, частично с пробелами освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, многие учебные задания либо не выполнил, либо они оценены числом баллов близким к минимальному, некоторые практические навыки не сформированы.
Минимальный уровень «2» (неудовлетворительно)	оценку «неудовлетворительно» заслуживает студент, не освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не выполнил, практические навыки не сформированы.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля).

5.1 Учебная литература:

1. Треногин В.А., Недосекина И.С. Уравнения в частных производных. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. М.: Физматлит, 2013. — 228 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/59744?category_pk=3145#book_name

2. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. М.: Лаборатория знаний, 2015. — 263 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/70703?category_pk=906#book_name

3. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. М.: Физматлит, 2000. — 400 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2363#book_name

4. Треногин В.А. Функциональный анализ. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. М.: Физматлит, 2007. — 488 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/59471?category_pk=911#book_name

5. Вашарин А.А., Владимиров В.С., Каримова Х.Х., Михайлов В.П., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Сборник задач по уравнениям математической физики. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. М.: Физматлит, 2003. — 288 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/59314#book_name

6. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. М.: Физматлит, 2009. — 404 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/59551#book_name

7. Соболева Е.С., Фатеева Г.М. Задачи и упражнения по уравнениям математической физики. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. М.: Физматлит, 2012, — 96 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/5295#book_name

8. Мурашкин В. Г. Инженерные и научные расчеты в программном комплексе MathCAD: учебное пособие. – Самара: СГАСУ, 2011. – 84 с. - доступно: www.biblioclub.ru – Университетская библиотека ONLINE.

5.2. Периодические издания

Приведённые журналы имеются в фонде Научной библиотеки КубГУ, <https://www.kubsu.ru/ru/node/15554>,

1. Журнал «Математическое моделирование».
2. Журнал «Журнал вычислительной математики и математической физики».
3. Журнал «Прикладная математика и механика».
4. Журнал «Прикладная механика и техническая физика».

5.3. Интернет-ресурсы, в том числе современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Электронно-библиотечные системы (ЭБС):

1. ЭБС «ЮРАЙТ» <https://urait.ru/>
2. ЭБС «УНИВЕРСИТЕТСКАЯ БИБЛИОТЕКА ОНЛАЙН» www.biblioclub.ru
3. ЭБС «BOOK.ru» <https://www.book.ru>
4. ЭБС «ЛАНЬ» <https://e.lanbook.com>

Профессиональные базы данных:

1. Научная электронная библиотека (НЭБ) <http://www.elibrary.ru/>
2. Национальная электронная библиотека (доступ к Электронной библиотеке диссертаций Российской государственной библиотеки (РГБ) <https://rusneb.ru/>
3. «Лекториум ТВ» <http://www.lektorium.tv/>
4. Университетская информационная система РОССИЯ <http://uisrussia.msu.ru>

Ресурсы свободного доступа:

1. КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru/>);
2. Федеральный портал «Российское образование» <http://www.edu.ru/>;
3. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» <http://window.edu.ru/>;
4. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов <http://school-collection.edu.ru/> .
5. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (<http://fcior.edu.ru/>);
6. Служба тематических толковых словарей <http://www.glossary.ru/>;
7. Словари и энциклопедии <http://dic.academic.ru/>;
8. Образовательный портал «Учеба» <http://www.ucheba.com/>;
9. Список литературы по MathCAD. Образовательный математический сайт: http://www.exponenta.ru/soft/mathcad/mathcad_book.asp.

Собственные электронные образовательные и информационные ресурсы

КубГУ:

1. Среда модульного динамического обучения <http://moodle.kubsu.ru>
2. База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций <http://mschool.kubsu.ru/>
3. Библиотека информационных ресурсов кафедры информационных образовательных технологий <http://mschool.kubsu.ru/>;
4. Электронный архив документов КубГУ <http://docspace.kubsu.ru/>

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной теоретический материал, рассматриваются основные приёмы решения задач и решаются примеры практических задач.

На лабораторных занятиях студенты, решая семестровые задания, приобретают практические навыки применения компьютерных пакетов, написания и отладки программ, программной реализации алгоритмов компьютерной графики.

Важнейшим этапом курса является самостоятельная работа по дисциплине «Уравнения в частных производных», во время которой студенты осуществляют проработку необходимого материала, используя литературу из основного и дополнительного списков, готовятся к текущему контролю, изучая примеры задач,

рассмотренных на лекциях и на практических занятиях, и образцы программ по темам лабораторных занятий (выдаются студентам в электронном виде).

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

7. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Распределение видов материально-технического обеспечения по видам занятий представлено в таблице.

Наименование специальных помещений	Оснащенность специальных помещений	Перечень лицензионного программного обеспечения
Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа (302Н, 303Н, 308Н, 309Н, 505А, 507А)	Мебель: учебная мебель. Технические средства обучения: экран, проектор, компьютер	средство подготовки презентаций MS PowerPoint; математический пакет MathCAD
Учебные аудитории для проведения лабораторных работ, групповых и индивидуальных консультаций (301Н, 309Н, 316Н, 320Н)	Мебель: учебная мебель. Технические средства обучения: экран, проектор, компьютер с доступом к сети «Интернет» и в электронную информационно-образовательную среду организации	Интернет-браузеры для просмотра сайтов в сети Интернет; средство подготовки презентаций MS PowerPoint; математический пакет MathCAD
Учебные аудитории для проведения текущей и промежуточной аттестации (301Н, 302Н, 303Н, 307Н, 308Н, 308На, 309Н, 310Н, 312Н, 314Н, 316Н, 318Н, 320Н)	Мебель: учебная мебель. Технические средства обучения: экран, проектор, компьютер	Математический пакет MathCAD

Для самостоятельной работы обучающихся предусмотрены помещения, укомплектованные специализированной мебелью, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

Наименование помещений для самостоятельной работы обучающихся	Оснащенность помещений для самостоятельной работы обучающихся	Перечень лицензионного программного обеспечения
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (читальный зал Научной библиотеки)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в	Интернет-браузеры для просмотра сайтов в сети Интернет; средство подготовки презентаций MS PowerPoint

	электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (301Н, 302Н, 303Н, 307Н, 308Н, 308На, 309Н, 310Н, 312Н, 314Н, 316Н, 318Н, 320Н)	Мебель: учебная мебель. Подключение к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации	Интернет-браузеры для просмотра сайтов в сети Интернет; средство подготовки презентаций MS PowerPoint