

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук



УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по учебной работе,
качеству образования – первый
проректор

подпись

Т.А. Хагуров

«30» мая 2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.03.01 АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОЛЕЦ

Направление подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) Современная алгебра и криптография

Форма обучения очная

Квалификация бакалавр

Краснодар 2025

Рабочая программа дисциплины «АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОЛЕЦ» составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

Программу составил(и):
В.А. Любин ст.преподаватель



Рабочая программа дисциплины «Арифметические свойства колец» утверждена на заседании кафедры функционального анализа и алгебры протокол № 11 «13» мая 2025 г.

Заведующий кафедрой (разработчика) Барсукова В.Ю.



Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук
протокол № 4 « 14 » мая 2025г.
Председатель УМК факультета Шмалько С.П.



Рецензенты:

Аршинов Г.А., доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры компьютерных технологий и систем КубГАУ

Марковский А.Н., кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры математических и компьютерных методов КубГУ

1 Цели и задачи изучения дисциплины.

1.1 Цель освоения дисциплины.

Цель освоения дисциплины «Арифметические свойства колец» – получение базовых теоретических сведений по теории делимости, факториальным, евклидовым кольцам, конечным расширениям числовых полей

При освоении дисциплины вырабатывается общематематическая культура: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения задач теории группоидов. Получаемые знания лежат в основе математического образования и необходимы для понимания и освоения всех курсов математики, а также для продолжения обучения в магистратуре по соответствующему направлению подготовки.

1.2 Задачи дисциплины.

Дальнейшее формирование у студентов приобретенных на первых двух курсах знаний по фундаментальной алгебре.

1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы.

Изучение дисциплины «Арифметические свойства колец» предусмотрено стандартом высшего профессионального образования специальности 020301 (федеральный компонент в цикле математических и естественных дисциплин). В рамках дисциплины ее изучение базируется на знаниях курса «Фундаментальная и компьютерная алгебра».

1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций:

Код и наименование индикатора* достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
ПК-1 Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий	
ИПК-1.1. Способен решать актуальные и важные задачи фундаментальной и прикладной математики	Знает арифметику целых чисел: делимость, разложение на множители, основную теорему арифметики; структуру кольца многочленов: неприводимость, разложение на множители
	Умеет формировать понятия, взятые из кольца целых чисел и кольца многочленов, для произвольных колец, определять общие и специфические свойства колец, связанных с понятиями простоты, разложимости, делимости, разрешимости уравнений.
	Владеет способностью определения общих закономерностей разложения элементов кольца на неприводимые множители, владеть структурным анализом в теории колец.

Код и наименование индикатора* достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
ПК-3 Способен математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математически	
ИПК-3.1. Уметь применять , полученные теоретические знания по арифметике абстрактных колец, при изучении и исследовании и их взаимосвязи с кольцом целых чисел.	Знает определение основных понятий в данном курсе, формулировки основных теорем с примерами
	Умеет решать задачи по основным разделам курса : простые элементы в кольцах, разложение на простые множители, представление элементов колец в виде произведения простых идеалов.
	Владеет необходимыми для вычислений формулами, основными алгоритмами решения задач, основными фактами теории колец, алгебры и других мат. наук.

2. Структура и содержание дисциплины.

2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ.

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 2 зач.ед. (72 час), их распределение по видам работ представлено в таблице

Вид учебной работы		Всего часов	Семестры	
			6	
Аудиторные занятия (всего)		72	72	
В том числе:				
Занятия лекционного типа		18	18	
Лабораторные занятия		34	34	
Иная контактная работа:				
Контроль самостоятельной работы (КСР)		2	2	
Промежуточная аттестация (ИКР)		0,2	0,2	
Самостоятельная работа, в том числе:		17,8	17,8	
Проработка учебного (теоретического) материала		6,8	6,8	
Выполнение домашних заданий (подготовка сообщений, презентаций)		6	6	
Подготовка к текущему контролю		5	5	
Контроль:				
Подготовка к зачету				
Общая трудоемкость	час.	72	72	
	в том числе контактная работа	54,2	54,2	

	зач. ед	2	2	
--	---------	---	---	--

2.2 Структура дисциплины:

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы дисциплины, изучаемые в 6 семестре (очная форма)

№	Наименование разделов	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	СРС
1	2	3	4	5	6	7
1.	Теория делимости в областях целостности	8	2		4	2
2.	Алгебра и арифметика колец вычетов	8	2		4	2
3.	Евклидовы кольца	8	2		4	2
4.	Кольца главных идеалов	8	2		4	2
5.	Факториальные кольца	8	2		4	2
6.	Квадратичные кольца	7,8	2		4	1,8
7.	Конечные расширения числовых полей	9	2		4	3
8.	Арифметика колец	13	4		6	3
	Итого по дисциплине:	69,8	18		34	17,8

2.3 Содержание разделов дисциплины:

2.3.1 Занятия лекционного типа.

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Теория делимости в областях целостности	Единицы. Область целостности. Закон сокращения. Делители. Простые и неприводимые элементы кольца и их свойства. Факторизация в областях целостности.	ПК
2.	Теория делимости в кольце $\mathbb{Z}$	Алгоритм деления. Идеалы. Алгоритм Евклида. Простые. Наибольший общий делитель. Фундаментальная теорема арифметики.	ПК
3.	Алгебра и арифметика колец вычетов	Кольца вычетов. Сравнения и их свойства. Малая теорема Ферма. Китайская теорема об остатках. Теорема Эйлера. Арифметические свойства колец вычетов.	ПК
4.	Евклидовы кольца.	Евклидовы области. Примеры. Кольца главных идеалов. Связь между Евклидовыми областями и областями главных идеалов.	ПК
5.	Кольца главных идеалов	Идеалы. Главные идеалы, простые идеалы. Операции над идеалами. Критерий простоты идеала. Максимальные идеалы. Нетеровы области. Области глав-	ПК

		ных идеалов. Связь между областями главных идеалов и нетеровостью Кольца главных идеалов и однозначность разложения.	
6.	Факториальные кольца	Области с однозначной факторизацией. Связь между областями с однозначным разложением и областью главных идеалов. Примеры.	ПК
7.	Квадратичные кольца.	Расширения колец. Квадратичные расширения. Норма, след. Простые и неприводимые элементы. Евклидовость. Факторизация.	ПК
8.	Конечные расширения числовых полей	Поля. Расширения. Алгебраические расширения. Алгебраическое замыкание. Сепарабельные расширения. Чисто несепарабельные расширения. Результат и дискриминант. Трансцендентные расширения.	ПК
9.	Арифметика колец	Связь между Евклидовыми областями, областями главных идеалов и областями с однозначной факторизацией.	ПК

2.3.2 Занятия семинарского типа. Не предусмотрены

2.3.3 Лабораторные занятия.

№	Наименование раздела	Тематика практических занятий (семинаров)	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Теория делимости в областях целостности	Единицы. Область целостности. Закон сокращения. Делители. Простые и неприводимые элементы кольца и их свойства. Факторизация в областях целостности. Целые Гауссовы числа, целые Эйзенштейновы числа.	РЗ
2.	Теория делимости в кольце Z	Алгоритм деления. Простые числа. Наибольший общий делитель. Лемма Безу. Диофантовы уравнения.	РЗ
3.	Алгебра и арифметика колец вычетов	Кольца вычетов. Малая теорема Ферма. Китайская теорема об остатках. Теорема Эйлера. Классы вычетов по простому и составному модулю. Единицы в кольцах вычетов.	РЗ
4.	Евклидовы кольца.	Евклидовость кольца целых чисел, кольца многочленов от одной переменной, целых Гауссовых чисел, целых Эйзенштейновых чисел. Квадратичные Евклидовы области.	РЗ
5.	Кольца главных идеалов	Примеры колец главных идеалов в квадратичных полях, в кольцах многочленов, в областях целостности расширений полей.	РЗ
6.	Факториальные кольца	Области с однозначной факторизацией. Связь между областями с однозначным разложением и областью главных идеалов. Примеры.	РЗ
7.	Квадратичные кольца.	Кольцо целых гауссовых чисел. Целые числа Эйзенштейна.	РЗ
8.	Конечные расширения числовых полей	Получение расширения поля с помощью присоединения корней уравнений.	РЗ
9.	Арифметика колец	Построение примеров и контрпримеров, иллюстрирующих связь между Евклидовыми областями, областями главных идеалов и областями с однозначной	РЗ

	факторизацией.	
--	----------------	--

Защита лабораторной работы (ЛР), выполнение курсового проекта (КП), курсовой работы (КР), расчетно-графического задания (РГЗ), написание реферата (Р), эссе (Э), коллоквиум (К), тестирование (Т), типовой расчет (ТР), проверка конспекта (ПК), решение задач (РЗ) и т.д.

2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Не предусмотрены.

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
1	Проработка учебного (теоретического) материала	«Методические указания по организации самостоятельной работы студентов», утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры, протокол № 1 от 31 августа 2017 г.
2	Выполнение домашних заданий (решение задач)	«Методические указания по организации самостоятельной работы студентов», утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры, протокол № 1 от 31 августа 2017 г.
3	Подготовка к текущему контролю (контрольная работа и др.)	«Методические указания по организации самостоятельной работы студентов», утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры, протокол № 1 от 31 августа 2017 г.
4	Промежуточная аттестация (зачет, экзамен)	«Методические указания по организации самостоятельной работы студентов», утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры, протокол № 1 от 31 августа 2017 г.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

3. Образовательные технологии.

При изучении данного курса используются традиционные лекции и лабораторные занятия.

Цель лабораторных занятий – научить студента применять полученные на лекциях теоретические знания к решению и исследованию конкретных математических и методических задач. В семестре проводятся контрольные работы для проверки усвоения материала студентами.

Самостоятельная работа студентов является неотъемлемой частью процесса подготовки. Под самостоятельной работой понимается часть учебной планируемой работы, которая выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа направлена на усвоение системы научных и профессиональных знаний, формирования умений и навыков, приобретение опыта самостоятельной творческой деятельности. СРС помогает формировать культуру мышления студентов, расширять познавательную деятельность.

Виды самостоятельной работы по курсу:

а) по целям: подготовка к лекциям, к практическим занятиям, к контрольной работе, к экзамену, выполнение типового расчета, подготовка проектного семестрового задания в виде презентации.

б) по характеру работы: изучение литературы, конспекта лекций; поиск литературы в библиотеке; конспектирование рекомендуемой для самостоятельного изучения научной литературы; решение задач, подготовка проекта.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

Интерактивные формы лабораторных занятий:

Се- мест р	Вид занятия	Используемые интерактивные образовательные техно- логии	Количе- ство ча- сов
6	Лабораторные занятия	Коллоквиум на тему: «Теория делимости в кольце це- лых чисел»	4
		Тренинг на тему: «Алгебра и арифметика колец выче- тов»	4
		Метод проектов по теме: «Арифметика колец»	8
Итого:			16

4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля.

Контрольные работы не предусмотрены.

4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации.

Примерные вопросы к зачету по курсу Арифметические свойства колец.

6 семестр

- Доказать, что поле $Q(\sqrt{-2})$ является евклидовым.
- Охарактеризовать простые элементы поля $Q(\sqrt{-3})$.
- Охарактеризовать кольцо целых алгебраических чисел поля $Q(\sqrt{2})$.
- Доказать, что в любой области целостности простой элемент неприводим.
- Доказать, что 2 делится на $(1+i)^2$ в $Z[i]$.
- Пусть $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Охарактеризовать группу обратимых элементов кольца $Z[\omega]$.
- Найти НОД($5+5i$, $-4+7i$) в $Z[i]$.
- Решить в $Z[i]$ уравнение $(1+2i)x + (2-3i)y = 1$.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

- при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

- при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

- при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,

- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,

- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,

- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

Критерии оценивания по промежуточной аттестации

Зачет выставляется по результатам работы студента в течение семестра. Отметка «зачтено» выставляется студентам, которые регулярно посещали занятия, выполняли домашние работы, написали контрольные работы на положительные оценки. Отметка «незачтено» выставляется студентам, которые пропустили более 60 % занятий и написали контрольные работы на неудовлетворительные оценки.

Оценивание ответа на экзамене, осуществляется по следующим критериям.

Оценка **«отлично»** выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач;

Оценка **«хорошо»** выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется студенту, показавшему разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы в некотором объеме, необходимом для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля).

5.1 Основная литература:

1. Кострикин, А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2001. — 272 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59284>.

2. Винберг, Э.Б. Курс алгебры : учебник / Э.Б. Винберг. - Москва : МЦНМО, 2011. - 591 с. - ISBN 978-5-94057-685-3 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

б) дополнительная литература:

1. Нестеренко В. Основы теории чисел. М. МГУ. 2011.
2. Родосский К. Алгоритм Евклида. М. Наука. 1988.

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах «Лань» и «Юрайт».

5.3. Периодические издания:

6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля).

1. <http://mech.math.msu.su/departament/algebra>
2. <http://www.resolventa.ru/metod/student/determinant.htm>
3. <http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/student/an/examples.asp>

7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Раздел	Тема	Содержание вопросов темы	Вид работы
1	Вопросы 1-3	Теория делимости. Простые числа. Основная теорема арифметики.	Поиск необходимой информации (см. спи-сок литературы). Выполнение домашнего задания.
2	Вопросы 4-7	Различные типы колец с точки зрения факторизации.	Поиск необходимой информации (см. спи-сок литературы). Выполнение домашнего задания.
3	Вопрос 8-9	Конструирование с помощью присоединения корней алгебраических уравнений. Примеры.	Поиск необходимой информации (см. спи-сок литературы). Выполнение домашнего задания.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

8.1 Перечень информационных технологий.

Обучающие компьютерные программы по отдельным разделам или темам – не требуются.

8.2 Перечень необходимого программного обеспечения.

Обучающие компьютерные программы по отдельным разделам или темам – не требуются.

8.3 Перечень информационных справочных систем:

1. Электронная библиотечная система eLIBRARY.RU (<http://www.elibrary.ru/>)

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) и оснащенность
---	-----------	--

1.	Лекционные занятия	Лекционная аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) и соответствующим программным обеспечением (ПО) 308 Н, 505Н, 507Н;.
2.	Лабораторные занятия	Специальное помещение, оснащенное доской, маркерами и мелом 312Н,314Н, 307Н, 310Н
3.	Групповые (индивидуальные) консультации	Аудитория, (кабинет) 314Н
4.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Аудитория, (кабинет) 308 Н, 505Н, 507Н;312Н,314Н, 307Н, 310Н
5.	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета. (309Н, 320Н)