

Рабочая программа дисциплины «Хаос динамических систем» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по специальности 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика» (профиль «Математическое моделирование»).

Программу составил(и):

С.В. Азарина, канд. физ.-мат. наук



Рабочая программа дисциплины «Хаос динамических систем» утверждена на заседании кафедры (разработчика) функционального анализа и алгебры протокол №12 от 7 мая 2024 г.

Заведующий кафедрой (разработчика) Барсукова В.Ю.



Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук «14» мая 2024 г., протокол № 3.

Председатель УМК факультета Шмалько С.П.



Рецензенты:

Ковалёва Л.А., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования ИИиЦТ, НИУ «БелГУ»

Засядко О.В., кандидат педагогических наук, доцент кафедры информационных образовательных технологий КубГУ

## 1 Цели и задачи изучения дисциплины (модуля)

### 1.1 Цель освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Дополнительные главы дифференциальных уравнений» являются формирование математической культуры студентов, формирование и способностей к алгоритмическому и логическому мышлению, овладение современным аппаратом дифференциальных уравнений для построения и исследования моделей в естественных науках. Знакомство студентов с методами и приемами качественного исследования поведения решений систем дифференциальных уравнений.

### 1.2 Задачи дисциплины

Задачами изучения дисциплины являются:

1. Изучение студентами различных понятий устойчивости динамических систем.
2. Изучение взаимосвязи обыкновенных дифференциальных уравнений и динамических систем.
3. Знакомство с некоторыми диффеоморфизмами с хаотическим поведением.
4. Знакомство с некоторыми понятиями теории бифуркаций.

### 1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Хаос динамических систем» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1. «Дисциплины (модули)» учебного плана. В соответствии с рабочим учебным планом дисциплина изучается на 5 курсе по очной форме обучения. Вид промежуточной аттестации: зачёт.

Для успешного освоения дисциплины обучающийся должен владеть знаниями, умениями и навыками по программе дисциплин «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Алгебра», «Линейная алгебра», «Функциональный анализ», «Дифференциальная геометрия и топология». Знания, полученные в результате освоения дисциплины «Хаос динамических систем» необходимы для формирования умения создания и исследования моделей на основе динамических систем.

### 1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций:

Код и наименование индикатора* достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
<b>ПК-2 Способен активно участвовать в исследовании новых математических моделей в естественных науках</b>	
Проведение научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработок при исследовании самостоятельных тем. Проведение работ по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований	Знать понятие потока, однопараметрической группы диффеоморфизмов, аттрактора. Знать структуру некоторых динамических систем с хаотическим поведением.
	применять рассматриваемые методы при доказательстве различных теорем и решений, относящихся к этому кругу проблем
	Уметь исследовать устойчивость динамических систем, определять тип точки бифуркации.

## 2 Структура и содержание дисциплины

### 2.1 Распределение трудоемкости дисциплины по видам работ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы (72 часа, из них – 34,2 часа контактной работы, в то числе лекционных 10 ч., лабораторных 20 ч., 0,2 часа ИКР, 4 ч. КСР; 37,8 часов самостоятельной работы).

Их распределение по видам работ представлено в таблице.

Виды работ		Всего часов	Форма обучения
			очная
			9 семестр (часы)
<b>Контактная работа, в том числе:</b>		<b>54,2</b>	<b>54,2</b>
<b>Аудиторные занятия (всего):</b>		<b>30</b>	<b>30</b>
занятия лекционного типа		10	10
лабораторные занятия		20	20
практические занятия		-	-
семинарские занятия		-	-
<b>Иная контактная работа:</b>			
Контроль самостоятельной работы (КСР)		4	4
Промежуточная аттестация (ИКР)		0,2	0,2
<b>Самостоятельная работа, в том числе:</b>			
Проработка учебного (теоретического) материала		14	14
Выполнение домашних заданий (решение задач)		14	14
Подготовка к текущему контролю		9,8	9,8
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>час.</b>	<b>72</b>	<b>72</b>
	<b>в том числе контактная работа</b>	<b>34,2</b>	<b>34,2</b>
	<b>зач. ед</b>	<b>2</b>	<b>2</b>

## 2.2 Структура дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины. Разделы дисциплины, изучаемые в **девятом** семестре:

№	Наименование разделов (тем)	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	
1.	Потоки и каскады.	8	2	-	2	4
2.	Связь с обыкновенными дифференциальными уравнениями	15	2	-	5	8
3.	Структурная устойчивость	15	2	-	5	8
4.	Примеры диффеоморфизмов с хаотическим поведением	14	2	-	4	8
5.	Бифуркации	15,8	2	-	4	9,8
	<i>ИТОГО по разделам дисциплины</i>		10	-	20	
	Контроль самостоятельной работы (КСР)	4				
	Промежуточная аттестация (ИКР)	0,2				
	Общая трудоемкость по дисциплине	72				

## 2.3 Содержание разделов дисциплины

### 2.3.1 Занятия лекционного типа

№	Наименование раздела (темы)	Содержание раздела (темы)	Форма текущего контроля
---	-----------------------------	---------------------------	-------------------------

1.	Потоки и каскады	Понятие динамической системы. Потоки и каскады как динамические системы с непрерывным и дискретным временем соответственно. Примеры.	Проверка домашнего задания, устный опрос
2.	Связь с обыкновенными дифференциальными уравнениями	Поток как решение обыкновенного дифференциального уравнения, его генератор. Построение каскада, связанного с дифференциальным уравнением. Использование функции последования при исследовании поведения решения ОДУ.	Проверка домашнего задания, опрос
3.	Структурная устойчивость	Структурно устойчивые динамические системы. Топологическая эквивалентность потоков, теорема Гробмана-Хартмана. Классификация грубых точек в двумерном случае.	Проверка домашнего задания
4.	Примеры диффеоморфизмов с хаотическим поведением	Системы Морса-Смейла. Пример грубого потока в трёхмерном случае, который не является системой Морса-Смейла. Подкова Смейла, символическая динамика. Гиперболический диффеоморфизм Аносова на двумерном торе	Проверка домашнего задания, самостоятельная работа
5.	Бифуркации	Омега-устойчивость, аттракторы. Бифуркация. Бифуркация рождения цикла. Бифуркация удвоения цикла.	Проверка домашнего задания

### 2.3.2 Занятия семинарского типа (практические / семинарские занятия/ лабораторные работы)

№	Наименование раздела (темы)	Содержание раздела (темы)	Форма текущего контроля
	Потоки и каскады	Понятие динамической системы. Потоки и каскады как динамические системы с непрерывным и дискретным временем соответственно. Примеры.	Проверка домашнего задания, устный опрос
2.	Связь с обыкновенными дифференциальными уравнениями	Поток как решение обыкновенного дифференциального уравнения, его генератор. Построение каскада, связанного с дифференциальным уравнением. Использование функции последования при исследовании поведения решения ОДУ.	Проверка домашнего задания, опрос
3.	Структурная устойчивость	Структурно устойчивые динамические системы. Топологическая эквивалентность потоков, теорема Гробмана-Хартмана. Классификация грубых точек в двумерном случае.	Проверка домашнего задания, самостоятельная работа
4.	Примеры диффеоморфизмов с хаотическим поведением	Системы Морса-Смейла. Пример грубого потока в трёхмерном случае, который не является системой Морса-Смейла. Подкова Смейла, символическая динамика. Гиперболический диффеоморфизм Аносова на двумерном торе	Проверка домашнего задания
5.	Бифуркации	Омега-устойчивость, аттракторы. Бифуркация. Бифуркация рождения цикла. Бифуркация удвоения цикла.	Проверка домашнего задания, контрольная работа

**2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов) курсовые работы не предусмотрены.**

**2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	Проработка учебного (теоретического) материала	Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 9 от 16 мая 2024 г.
2	Выполнение домашних заданий (решение задач)	Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 9 от 16 мая 2024 г.
3	Подготовка к текущему контролю	Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 9 от 16 мая 2024 г.
4	Выполнение лабораторных работ	1. Методические указания по выполнению лабораторных работ. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 9 от 16 мая 2024 г.
4	Промежуточная аттестация (зачёт)	Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 9 от 16 мая 2024 г.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

**3. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины (модуля)**

При изучении данного курса используются традиционные лекции и лабораторные занятия.

Цель лабораторных занятий – научить студента применять полученные на лекциях теоретические знания к решению и исследованию конкретных задач. В каждом семестре проводятся контрольные работы для проверки усвоения материала студентами.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

**4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

Учебная деятельность проходит в соответствии с графиком учебного процесса. Процесс самостоятельной работы контролируется во время аудиторных занятий и индивидуальных консультаций.

Оценочными средствами дисциплины являются средства текущего контроля (коллоквиумы, устные опросы.), а также на лабораторных занятиях – контрольные работы, проверка домашних заданий) и промежуточная аттестация (зачет, экзамен). Устный опрос по теоретическому материалу проводится на лабораторных занятиях.

#### Структура оценочных средств для текущей и промежуточной аттестации

№ п/п	Код и наименование индикатора (в соответствии с п. 1.4)	Результаты обучения (в соответствии с п. 1.4)	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	ПК-2 Способен активно участвовать в исследовании новых математических моделей в естественных науках	<p>Знает понятия динамической системы, потока, каскада, структурной устойчивости, омега-устойчивости, бифуркации. Знает, как строятся подкова Смейла, гиперболический диффеоморфизм Аносова, функция последования.</p> <p>Применяет рассматриваемые методы при доказательстве различных теорем и решений, относящихся к этому кругу проблем.</p> <p>Владеет навыками использования символической динамики, построения функции последования, исследования устойчивости разных типов.</p>	Вопросы для устного опроса, лабораторные работы	Вопрос на зачёте

**Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы**

#### Контрольная работа

##### Вариант 1.

1. Найдите фазовые кривые, изобразите их и поле направлений; решите, сделав удобную замену Пусть  $x_1 = x_1(t)$ ,  $x_2 = x_2(t)$ .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2). \end{cases}$$

2. Гиперболический диффеоморфизм Аносова на  $T^2$  задаётся с помощью линейного оператора в  $\mathbb{R}^2$  с матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите образы точек единичного квадрата, если диффеоморфизм (построенный из оператора  $A$ ) применить дважды.

3. Будет ли положение(ия) равновесия системы грубым(ми) при малом изменении параметра  $a$ ?

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + a \sin y, \\ \dot{y} = ax^3 - a^2 y. \end{cases}$$

**Зачетно-экзаменационные материалы для промежуточной аттестации (экзамен/зачет)**

Примерный перечень вопросов к зачёту.

1. Динамические системы. Определение и примеры.
2. Потоки и каскады.
3. Связь динамической системы с обыкновенным дифференциальным уравнением.
4. Функция последования.
5. Надстройка над диффеоморфизмом.
6. Топологическая сопряжённость.
7. Структурная устойчивость потоков.
8. Теорема Гробмана-Хартмана для каскадов на двумерном компактном многообразии.
9. Теорема Гробмана-Хартмана для потоков на двумерном компактном многообразии.
10. Системы Морса-Смейла.
11. Подкова Смейла, символическая динамика.
12. Гиперболический диффеоморфизм Аносова на двумерном торе.
13. Омега-предельные множества, неблуждающие множества, Омега-устойчивость, аттракторы.
14. Предельные множества, аттракторы.
15. Странные аттракторы.
16. Точки бифуркации.
17. Бифуркация рождения цикла.
18. Бифуркация удвоения цикла.

### **Критерии оценивания результатов обучения**

Критерии оценивания по зачёту:

«зачтено»: студент регулярно посещал занятия; выполнял домашние работы; владеет теоретическими знаниями по данному разделу; знает методы решения интегральных уравнений с различными типами ядер, допускает незначительные ошибки в ходе решения задач; студент умеет правильно объяснять изученный материал, иллюстрируя его соответствующими примерами; написал контрольные работы на положительные оценки;

«не зачтено»: студент пропустил более 60 % занятий, не выполнял домашние работы, материал не усвоен или усвоен частично, студент затрудняется привести примеры при изложении изученного материала, имеет довольно ограниченный объем знаний программного материала, написал контрольные работы на неудовлетворительные оценки.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

– в печатной форме увеличенным шрифтом,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

## **5. Перечень учебной литературы, информационных ресурсов и технологий**

### **5.1. Учебная литература**

1. В.И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, МЦНМО, 2018.
2. В.И. Арнольд. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., МЦНМО, 1999
3. Ю.Е. Гликлих. Начала хаотической динамики. Учебное пособие. Воронеж, ВГУ, 2012
4. А.М. Виноградов, И.С. Красильщик. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. Москва, Факториал, 1997.
5. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М., 2005. <https://e.lanbook.com/book/48171>
6. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, М.:2006.
7. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. СПб. «Лань», 2008. [www.e.lanbook.com/view/book/123](http://www.e.lanbook.com/view/book/123)

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах «Лань» и «Библиоклуб».

### **5.3. Интернет-ресурсы, в том числе современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

**Электронно-библиотечные системы (ЭБС):**

1. ЭБС «ЛАНЬ» <https://e.lanbook.com>

**Ресурсы свободного доступа:**

1. Федеральный портал "Российское образование" <http://www.edu.ru/>
2. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" <http://window.edu.ru/>;
3. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации <https://www.minobrnauki.gov.ru/>
4. Краткий справочник по математике - <http://matembook.chat.ru/>
5. Математический портал - <http://www.allmath.com/>

**Собственные электронные образовательные и информационные ресурсы КубГУ:**

1. Среда модульного динамического обучения <http://moodle.kubsu.ru>
2. База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций <http://mschool.kubsu.ru/>

## **6 Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной систематизированный материал, лабораторных занятий, в ходе которых



студентами приобретаются и закрепляются основные практически навыки решения различных задач, в том числе с применением полученных теоретических знаний.

Важнейшим этапом курса является самостоятельная работа по дисциплине. Самостоятельная работа студентов является неотъемлемой частью процесса подготовки. Под самостоятельной работой понимается часть учебной планируемой работы, которая выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа направлена на усвоение системы научных и профессиональных знаний, формирования умений и навыков, приобретение опыта самостоятельной творческой деятельности. СРС помогает формировать культуру мышления студентов, расширять познавательную деятельность.

Виды самостоятельной работы по курсу:

**а) по целям:** подготовка к лекциям, к практическим занятиям, к контрольной работе, к коллоквиуму.

**б) по характеру работы:** изучение литературы, конспекта лекций; поиск литературы в библиотеке; конспектирование рекомендуемой для самостоятельного изучения научной литературы; решение задач, тестов; работа с обучающими и контролирующими программами.

#### Тематическое планирование самостоятельной работы студентов

№ п/п	Наименование раздела	Содержание раздела	Вид работы
1	Преобразования и группы преобразований	Действие диффеоморфизма на фазовый поток. Модель Лотки-Вольтерра, маятник.	Поиск необходимой информации (см. список литературы). Решение задач.
2	Симметрии дифференциальных уравнений	Поиск симметрий для других типов уравнений	Поиск необходимой информации. Изучение лекционного материала. Конспектирование.
3	Разрешение особенностей	Исследования маятника с трением	Повторение лекционного материала и материала учебников. Подготовка к контрольной работе
4	Производная по направлению векторного поля	Нахождение первых интегралов. Закон сохранения энергии.	Поиск необходимой информации. Подготовка к контрольной работе
5	Хаос динамических систем	Бифуркация удвоения цикла	Изучение лекционного материала и материала учебников.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

#### 7. Материально-техническое обеспечение по дисциплине (модулю)

Наименование специальных помещений	Оснащенность специальных помещений	Перечень лицензионного программного обеспечения
Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа	Мебель: учебная мебель Технические средства обучения: экран, проектор, компьютер	Программы для демонстрации и создания презентаций (Miktex, Microsoft Office, Open BSD, Videopad)
Учебные аудитории для проведения групповых и	Мебель: учебная мебель Технические средства обучения:	

индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Доска, мел, маркеры	
Учебные аудитории для проведения лабораторных работ. Лаборатория...	Мебель: учебная мебель Технические средства обучения: Доска, мел, маркеры	

Для самостоятельной работы обучающихся предусмотрены помещения, укомплектованные специализированной мебелью, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

Наименование помещений для самостоятельной работы обучающихся	Оснащенность помещений для самостоятельной работы обучающихся	Перечень лицензионного программного обеспечения
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (читальный зал Научной библиотеки)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (ауд. _____)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	