

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра теории функций



ТВЕРЖДАЮ:

ректор по научной работе и  
инновациям

Шарафан М.В.

подпись

» мая 2024 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Специальная дисциплина "Вещественный, комплексный и  
функциональный анализ"

Научная специальность: 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный  
анализ

Форма обучения очная

Краснодар 2024

Рабочая программа по Специальной дисциплине "Вещественный, комплексный и функциональный анализ" составлена в соответствии с Федеральными государственными требованиями к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов, утвержденными приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 20 октября 2021 г. № 951.

Программу составил(и):

Е.А. Щербаков, профессор,  
д-р физ.-мат. наук, доцент



Рабочая программа утверждена на заседании кафедры теории функций  
протокол № 12 от «07» мая 2024 г.

Заведующий кафедрой (разработчика) Голуб М. В.



Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета  
математики и компьютерных наук  
протокол № 9 «16» мая 2024 г.

Председатель УМК факультета/института Шмалько С. П.



## 1. Цель изучения дисциплины

Целью курса является обзор основных идей Тейхмюллера и демонстрация их развития в работах Берса, Альфорса, Сарича, Тёрстона, Тромба, и других современных авторов по специальности 01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

## 2. Задачи дисциплины

- Дать представление о современных методах исследования пространств Тейхмюллера, основанные на различных подходах, как включающих теорию квазиконформных отображений, так и не зависящих от неё,

- Дать представление о современной теории и о методах комплексной динамики и об использовании в ней квазиконформных отображений.

## 3. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры

Дисциплина «Математический анализ и геометрия» относится к Образовательному компоненту промежуточная аттестация по дисциплинам (модулям) и практике программы аспирантуры.

Программа рассчитана на аспирантов, прослушавших курс математического анализа, включающий дифференциальное и интегральное исчисление, а также курсы линейной алгебры.

Знания, полученные в этом курсе, необходимы для изучения дисциплин геометрическая теория меры и её приложения, вещественный, комплексный и функциональный анализ (кандидатский экзамен), проведения научно-исследовательской работы и успешной сдачи государственной итоговой аттестации.

## 4. Требования к результатам освоения дисциплины

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся *специальных* компетенций (СК)

№ п.п.	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
1.	ПК-1: способность к системному мышлению и грамотному использованию основных принципов, концепций и методов вещественного, комплексного и функционального анализа	<b>Знать</b> основные понятия и гипотезы для предметной области и исследуемых моделей. <b>В том числе:</b> математические понятия дисциплины и формулировки всех утверждений и теорем; <b>Уметь</b> ориентироваться в современных методах и подходах, применяемых для изучения рассматриваемых процессов и явлений, грамотно использовать и развивать математическую теорию и физико-математические модели, лежащие в их основе. <b>В том числе:</b> применять знания на практике; <b>Владеть</b> навыками применения классических и современных методов анализа математических моделей формализованных материальных объектов и процессов.
2	ПК-2: готовность к постановке профессиональных задач в	<b>Знать</b> нормативные документы для составления заявок, грантов, проектов НИР

№ п.п.	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
	области научно-исследовательской и практической деятельности, подбору, развитию и совершенствованию методов их решения на базе современных достижений в области вещественного, комплексного и функционального анализа	<p>В том числе: основные положения аксиоматической теории Цермело-Френкеля;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-определения и геометрические свойства элементарных функций комплексного переменного;</li> <li>-определения спрямляемых множеств и теоремы о критериях спрямляемости. Элементы теории функций с ограниченным изменением;</li> <li>-определения и свойства различных интегралов, определяемых для суммируемых функций;</li> <li>-теоремы рекуррентности и трансфинитной рекуррентности;</li> <li>-теоремы о построении для заданной системы множеств минимального сигма кольца;</li> <li>-теоремы о структуре минимальных колец и монотонных классов;</li> <li>-теоремы о произведении мер;</li> <li>-теоремы Лузина и Егорова;</li> <li>-теоремы о связи между борелевскими и суслинскими множествами;</li> <li>-теоремы о дифференцируемости</li> </ul> <p><b>Уметь</b> использовать и совершенствовать методы и программное обеспечения для расчета исследуемых характеристик объектов и процессов на базе современных достижений в области механики, прикладной математики и ИТ</p> <p>В том числе: ориентироваться в постановках задач;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-понять поставленную задачу;</li> <li>-формулировать результат;</li> <li>-строго доказать утверждение;</li> <li>-на основе анализа увидеть и корректно сформулировать результат;</li> <li>-грамотно пользоваться языком предметной области.</li> </ul> <p><b>Владеть</b> методами планирования, подготовки, проведения НИР, анализа полученных данных, формулировки выводов и рекомендаций по профилю 01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ. В том числе: проблемно-задачной формой представления математических знаний.</p>

### 5. Структура дисциплины по очной форме обучения.

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 1 зач.ед. (36 часа), их распределение по видам работ представлено в таблице:

Вид учебной работы	Всего (часов)	Семестры (часы)
		3
<b>Контактная работа, в том числе:</b>	-	-

<b>аудиторная по видам учебных занятий (всего)</b>		-	-
<b>в том числе:</b>			
– лекции		-	-
– практические		-	-
– лабораторные		-	-
<b>Иная контактная работа:</b>			
Промежуточная аттестация			экзамен
<b>Самостоятельная работа, в том числе:</b>		-	-
<b>Контроль:</b>		<b>36</b>	<b>36</b>
Подготовка к экзамену		36	36
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>час.</b>	<b>36</b>	<b>36</b>
	<b>зач. ед</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

## 6. Содержание дисциплины по очной форме обучения

По итогам изучаемой дисциплины аспиранты (обучающиеся) сдают зачет.

Дисциплина изучается на 2 курсе, в 3 семестре по учебному плану очной формы обучения.

№ п/п	Тема. Основные вопросы	Семестр	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа
1.	Квазиконформные отображения и их граничные значения	3				6
2.	Голоморфное универсальное покрытие римановой поверхности.					4
3.	Гладкие коэффициенты Бельтрами					4
4.	Граница Тёрстона					6
5.	Метрика Вейля-Петерсона					4
6.	Дифференцирование мер Радона					4
7.	Мера Хаусдорфа					2
8.	Классификация периодических компонент связности Фату					2
9.	Квазиконформная хирургия					4
11.	Теория варифолдов					4
			-	-	-	36

## 7. Образовательные технологии

Активные и интерактивные формы: лекции: проблемная лекция, лекция – пресс-конференция (могут применяться презентации); практические занятия: мозговой штурм, занятие – конференция (с применением презентаций), разбор практических задач, контрольные работы, активизация творческой деятельности, регламентированная дискуссия; для воплощения образовательных форм могут быть использованы компьютерные технологии.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы**

### **Основная учебная литература**

1. Милнор, Д. Теория Морса / Д. Милнор ; пер. с англ. В.И. Арнольд. - М. : б.и., 1963. - 181 с. - (Библиотека сборника "Математика"). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454811>.

2. Альфорс, Л. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения / Л. Альфорс, Л. Берс ; пер. с англ. В.А. Зорич, А.А. Кириллов ; под ред. Б.В. Шабат, Н.И. Плужниковой. - М. : Издательство иностранной литературы, 1961. - 175 с. : ил. - (Библиотека сборника "Математика"). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450358>.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

### **Дополнительная литература**

1) Метрические вопросы теории функций и отображений [Текст] . Вып. 5 / отв. ред. Г. Д. Суворов, В. И. Белый. - Киев : Наукова думка, 1974. - 203 с. - Библиогр.: с. 201-202

2) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1977. - Т. 1. А - Г. - 576 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454588>

3) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1979. - Т. 2. Д - Коо. - 552 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454589>.

4) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1982. - Т. 3. Коо - Од. - 592 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454590>.

5) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1984. - Т. 4. Ок - Сло. - 608 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454591>

6) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1985. - Т. 5. Слу - Я. - 624 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454592>

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Важнейшими составляющими курса являются такие виды занятий, как мозговой штурм и занятие – конференция, на которых по максимуму осуществляется активизация творческой деятельности обучающихся; а также самостоятельная работа аспирантов, такая как разбор лекций, работа с литературой, отработка навыков решения практических задач, подготовка к занятиям-конференциям. В процессе самостоятельной работы обучающимися активно используются информационные справочные системы.

Текущий контроль осуществляется преподавателем, ведущим практические занятия на основе дискуссии с аспирантами, дающей представление о динамике роста знаний аспирантов и их научном потенциале; учета активности аспиранта на занятиях типа «мозговой штурм» и оценке выступления обучающегося на занятии-конференции. Контроль также осуществляется путем проведения контрольных работ.

Итоговый контроль осуществляется в форме экзамена.

Для аспиранта большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала, проводимая научным руководителем.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

#### **10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине позволяют:

- обеспечить взаимодействие между участниками образовательного процесса, в том числе синхронное и (или) асинхронное взаимодействие посредством сети "Интернет";
- фиксировать ход образовательного процесса, результатов промежуточной аттестации по дисциплине и результатов освоения образовательной программы;
- организовать процесс образования путем визуализации изучаемой информации посредством использования презентаций, учебных фильмов;
- контролировать результаты обучения на основе компьютерного тестирования.

##### **Перечень программного обеспечения**

– Офисный пакет приложений Microsoft Office.

##### **Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем**

1. Справочно-правовая система «Консультант Плюс» (<http://www.consultant.ru>)
2. Электронная библиотечная система eLIBRARY.RU (<http://www.elibrary.ru/>) и т.д.

– Могут использоваться иные информационно-поисковые системы сети Интернет.

#### **11. Материально-техническое оснащение.**

Наименование специальных помещений	Оснащенность специальных помещений	Перечень лицензионного программного обеспечения
Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа	Мебель: учебная мебель Технические средства обучения: экран, проектор, компьютер	Microsoft Windows Microsoft Office Professional Plus
Учебные аудитории для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Мебель: учебная мебель	

Для самостоятельной работы обучающихся предусмотрены помещения, укомплектованные специализированной мебелью, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

Наименование помещений для самостоятельной работы обучающихся	Оснащенность помещений для самостоятельной работы обучающихся	Перечень лицензионного программного обеспечения
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (читальный зал Научной библиотеки)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (ауд. _____)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	

## 12. Оценочные средства по дисциплине

Для проведения промежуточной аттестации (представляется отдельным документом в формате приложения к РПД)

## **ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО, ПРОМЕЖУТОЧНОГО И ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ**

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности в процессе освоения программы аспирантуры

### **1.1. Опрос на занятии**

1) установить связь между группой накрывающих преобразований и пространством квадратичных дифференциалов конечной нормы,

2) построить несколько реализаций пространства Тейхмюллера и установить их эквивалентность,

3) установить связь между задачами Грётча и Тейхмюллера об экстремальных  $k$  – квазиконформных отображениях,

4) доказать существование экстремальных отображений,

5) вложить модулярные пространства римановой поверхности в комплексное проективное пространство. Описать свойства этого вложения.

6) Привести пример применения методов квазиконформных отображений в задачах комплексной динамики.

### **1.2. Тестовые задания**

1. Дать определение пространства Тейхмюллера и метрики Тейхмюллера на нём.

2. Охарактеризовать связь между  $T$ -тривиальными квазиконформными отображениями и их гомотопиями.

3. Установить связь между гладкими гиперболическими инвариантными метриками и пространством дифференциалов Бельтрами на римановой поверхности.

4. Доказать теорему Тейхмюллера об экстремальном отображении.

5. Доказать теорему Гамильтона-Крушкаля-Райха-Штребеля.

6. Доказать теорему Альфорса о конечно-порожденных не элементарных клейновых группах.

7. Описать структуру пространства Тейхмюллера для рациональной функции.

8. Сформулировать теорему Тёрстона и объяснить её содержание.

### **1.3. Примерные темы докладов**

1. Квазиконформные отображения и их граничные значения

2. Голоморфное универсальное покрытие римановой поверхности

3. Гладкие коэффициенты Бельтрами

2. Промежуточная аттестация

### **2.1. Вопросы к экзамену**

1. Граница Тёрстона

2. Метрика Вейля-Петерсона

3. Классификация периодических компонент связности Фату

4. Квазиконформная хирургия

Ответ аспиранта на экзамене оценивается по пятибальной шкале.

Критерии оценивания	Количество баллов
Полный ответ на поставленный вопрос, четко сформулированный квалифицированный ответ, грамотно и логически стройно изложенный, в свете которого тесно увязывается теория с практикой. Проявлена повышенная научная и образовательнокультурная эрудиция.	5
Ответ грамотный, логично изложенный, существенные неточности отсутствуют. Проявлена достаточная научная и образовательнокультурная эрудиция.	4
Знания только основного материала, без деталей, допускаются неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения последовательности в изложении. Проявлена ограниченная научная и образовательно-культурная подготовленность.	3
В ответе значительные пробелы в фундаментальных знаниях, допускаются существенные ошибки.	2

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности в процессе освоения образовательной программы

Контроль освоения дисциплины «Геометрическая теория меры и ее приложения» на этапах текущей промежуточной аттестации проводится в соответствии с действующим Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.