

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Факультет компьютерных технологий и прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе,  
качеству образования – первый  
проректор

Хагуров Т.А.

подпись

« 26 » мая 2023г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)  
Б1.В.06 «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»**

Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) Математические и информационные технологии  
в цифровой экономике;

Программирование и информационные  
технологии);

Математическое моделирование в  
естествознании и технологиях

Программа подготовки \_\_\_\_\_ академическая

Форма обучения \_\_\_\_\_ очная

Квалификация (степень) выпускника \_\_\_\_\_ бакалавр

Краснодар 2023

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Программу составил:  
С.И. Фоменко, к.ф.-м.н., доцент



подпись

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» утверждена на заседании кафедры прикладной математики, протокол № 10 от «18» мая 2023 г..

И.о. заведующего кафедрой (разработчика)  
Письменский А.В.



подпись

Рабочая программа дисциплины обсуждена на заседании кафедр:

- прикладной математики, протокол № 10 от 18.05.2023 г.

И.о. заведующего кафедрой (разработчика)  
Письменский А.В.



- математического моделирования, протокол № 12 от 12.05.2023 г.

Заведующий кафедрой (выпускающей)  
акад. РАН, д.ф.-м.н., профессор В.А. Бабешко



- информационных технологий, протокол № 16 от 16.05.2023 г.

Заведующий кафедрой (выпускающей)  
В.В. Подколзин, к.ф.-м.н.



Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета компьютерных технологий и прикладной математики протокол № 5 «19» мая 2023г.

Председатель УМК факультета Коваленко А.В.



Рецензенты:

Шапошникова Татьяна Леонидовна.

Доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор. Почетный работник высшего профессионального образования РФ. Директор института фундаментальных наук (ИФН) ФГБОУ ВО «КубГТУ».

Марков Виталий Николаевич.

Доктор технических наук. Профессор кафедры информационных систем и программирования института компьютерных систем и информационной безопасности (ИКСиИБ) ФГБОУ ВО «КубГТУ».

## 1 Цели и задачи изучения дисциплины.

### 1.1 Цель освоения дисциплины.

Целью преподавания и изучения дисциплины «Функциональный анализ» является овладение студентами методами функционального анализа непосредственно примыкающими к задачам прикладной математики, которые необходимы с одной стороны для формирования навыков работы с абстрактными математическими понятиями, а с другой стороны для восприятия с общетеоретических позиций идей и методов смежных дисциплин, подготовки выпускника как и к научно-исследовательской деятельности, так и к производственно технологической деятельности в области решения прикладных задач.

### 1.2 Задачи дисциплины

Задачей изучения дисциплины «Функциональный анализа» является развитие способностей студента понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат при решении задач, возникающих на практике и в научно-исследовательской деятельности.

### 1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы.

Курс «Функциональный анализ» относится к дисциплинам по выбору вариативной части Блока 1. Для освоения курса студентами необходимо наличие у студентов знаний и умений приобретённых в результате изучения ими базовых курсов математического анализа, алгебры и аналитической геометрии, дифференциальных уравнений. Знания, полученные при изучении данного курса, находят применение при изучении «Уравнений математической физики», «Дифференциальных уравнений», «Теории вероятностей», «Численных методов», ряда дисциплин специализации. Методы функционального анализа находят своё приложение в различных сферах современной прикладной математики, например при создании современных систем управления, а также в научно-исследовательской работе.

### 1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций:

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
<b>ПК-1 Способен решать актуальные и значимые задачи прикладной математики и информатики</b>	
ИПК-1.8 (40.001 А/02.5 Др.2) Деятельность, направленная на решение задач актуальные и значимые задачи прикладной математики и информатики аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач	Знает основные понятия, теоремы методы, алгоритмы и средства функционального анализа
	Знает основные понятия, теоремы методы, алгоритмы и средства функционального анализа
	Владеет методами функционального анализа для исследования различных прикладных задач.
<b>ПК-2 Способен активно участвовать в исследовании новых математических моделей в естественных науках</b>	
ИПК-2.11 (40.001 А/02.5 Др.2) Деятельность, направленная на решение задач аналитического характера, предполагающих	Знает теоретические положения, лежащие в основе построения теории и методов функционального анализа
	Умеет доказывать утверждения, выбирать методы для решения задач функционального анализа и приложений

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
выбор и многообразие актуальных способов решения задач, разработки новых математических моделей в естественных науках	Владеет основными методами решения типовых и оригинальных задач функционального анализа, способен применять эти методы для решения конкретных прикладных задач

## 2. Структура и содержание дисциплины

### 2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 7 зач.ед., их распределение по видам работ представлено в таблице

Вид учебной работы	Всего часов	Трудоёмкость, часы	
		5 семестр	6 семестр
<b>Контактная работа (всего), в том числе:</b>	<b>138,6</b>	<b>70,3</b>	<b>68,3</b>
<b>Аудиторные занятия (всего):</b>	132	68	64
Занятия лекционного типа	66	34	32
Лабораторные занятия	66	34	32
<b>Иная контактная работа</b>			
Контролируемая самостоятельная работа (КСР)	6	2	4
Промежуточная аттестация (ИКР)	0,6	0,3	0,3
<b>Самостоятельная работа (СР):</b>	<b>33</b>	<b>2</b>	<b>31</b>
Самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к лабораторным и практическим занятиям, коллоквиумам и т.д.)	11	0	11
Выполнение индивидуальных заданий	10	0	10
Подготовка к текущему контролю	12	2	10
<b>Контроль</b>	<b>80,4</b>	<b>35,7</b>	<b>44,7</b>
Подготовка и сдача экзамена	80,4	35,7	44,7
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>час.</b>	<b>252</b>	<b>108</b>
	<b>в том числе контактная работа</b>	<b>138,6</b>	<b>70,3</b>
	<b>зач. ед</b>	<b>7</b>	<b>3</b>
<b>Вид итогового контроля</b>		<b>Экзамен</b>	<b>Экзамен</b>

### 2.2 Содержание дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы дисциплины, изучаемые в **5 семестре**

№	Наименование разделов	Количество часов			
		Всего	Аудиторная работа		Внеаудиторная работа
			Л	ЛР	СРС
1	2	3	4	6	7
1.	Тригонометрические ряды Фурье	16,6	8	8	0,6
2.	Интеграл Лебега	24,6	12	12	0,6
3.	Пространства Лебега	8,2	4	4	0,2
4.	Метрические пространства	20,6	10	10	0,6
Всего по разделам дисциплины:		70	34	34	2
Контролируемая работа студента (КСР)		2			
Промежуточная аттестация (ИКР)		0,3			
Подготовка и сдача экзамена (Контроль)		35,7			
<b>Итого по дисциплине:</b>		<b>108</b>			

Разделы дисциплины, изучаемые в **6 семестре**

№	Наименование разделов	Количество часов			
		Всего	Аудиторная работа		Внеаудиторная работа
			Л	ЛР	СРС
1	2	3	4	6	7
5.	Линейные нормированные пространства	16,6	8	8	8
6.	Евклидовы пространства	24,6	8	8	9
7.	Линейные операторы	8,2	12	12	10
8.	Линейные функционалы	20,6	4	4	4
Всего по разделам дисциплины:		95	32	32	31
Контролируемая работа студента (КСР)		4			
Промежуточная аттестация (ИКР)		0,3			
Подготовка и сдача экзамена (Контроль)		44,7			
<b>Итого по дисциплине:</b>		<b>144</b>			

Примечание: Л – лекции, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента, КСР – контролируемая работа студента; ИКР – иная контактная работа.

## 2.3 Содержание разделов дисциплины

### 2.3.1 Занятия лекционного типа

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
<b>5 семестр</b>			
1.	Тригонометрические ряды Фурье	Периодические величины. Гармонический анализ. Понятие ряда. Коэффициенты Фурье. Интеграл Дирихле. Лемма Римана. Следствие из неё. Принцип локализации. Признаки Дини и Липшица сходимости ряда Фурье в точке. Разложение в ряд Фурье для произвольного промежутка. Разложение в ряд Фурье непериодической функции. Разложение в ряд Фурье только по синусам и только по косинусам. Равномерная сходимость ряда Фурье. Преобразование Фурье.	Контрольные вопросы
2.	Интеграл Лебега	Необходимость обобщения понятия интеграла Римана. Множества точек. Понятие меры. Свойства меры. Множество меры ноль. Определения, примеры. Измеримые функции. Теорема об эквивалентных определениях измеримой функции. Свойства измеримых функций. Интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции, понятие. Теорема о существовании интеграла Лебега. Сравнение с интегралом Римана. Интеграл Лебега по произвольному измеримому множеству. Свойства интеграла Лебега. Интеграл Лебега от неограниченной функции.	Контрольные вопросы
3.	Пространства Лебега	Понятие $L_p[a, b]$ . Теорема о вложении пространств. Линейность пространств $L_p[a, b]$ . Неравенство Гёльдера. Неравенство Минковского. Норма в $L_p[a, b]$ . Пространство $L_2[a, b]$ . Свойства функций $L_2[a, b]$ . Сходимость в $L_2[a, b]$ . Теоремы о единственности предела, о непрерывности нормы, фундаментальности и сходимости в $L_2[a, b]$ . Теорема о приближении функций из $L_2[a, b]$ .	Контрольные вопросы
4.	Метрические пространства	Метрика, аксиомы и определение метрического пространства (МП), примеры МП. Множества в МП, принцип вложенных шаров. Последовательности в МП, полнота	Контрольные вопросы

		МП, компактность и предкомпактность. Эpsilon-сети и вполне ограниченные множества, теорема Хаусдорфа.	
<b>6 семестр</b>			
5.	Линейные нормированные пространства	Линейные пространства над полем чисел. Изоморфизм. Линейная зависимость, базис и размерность пространства. Фактор-пространство. Теорема о размерности фактор-пространства. Норма и линейные нормированные пространства. Примеры нормированных пространств. Банаховые пространства. Теорема о полноте конечномерного ЛНП. Сравнение норм. Ряды в нормированных пространствах: сходимость, критерий Коши, абсолютная сходимость	Контрольные вопросы
6.	Евклидовы пространства	Скалярное произведение. Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства. Примеры. Ортогональность. Ортогональное дополнение. Теорема о разложении гильбертова пространства. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном $H$ -пространстве. Ряды Фурье в $H$ -пространстве. Экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье. Полнота и замкнутость ортонормированной системы в $H$ -пространстве. Теорема Рисса-Фишера в $H$ -пространстве. Изоморфизм $H$ -пространств.	Контрольные вопросы
7.	Линейные операторы	Отображения. Принцип неподвижной точки для сжимающего отображения. Линейный оператор в линейном пространстве. Понятие, примеры. Линейный непрерывный оператор в ЛНП. Непрерывность и ограниченность. Норма линейного ограниченного оператора. Свойства, примеры. Равномерная сходимость линейных операторов. Теоремы о равномерной сходимости в единичном круге. Следствие. Полнота пространства $\mathcal{L}(L, L_1)$ . Сильная сходимость в $\mathcal{L}(L, L_1)$ . Примеры. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха-Штейнгауза. Обратный оператор. Определение. Теорема о линейности оператора $A^{-1}$ . Достаточное условие ограниченной обратимости линейного оператора. Метод проекционные обращения линейного оператора. Теорема о существовании оператора $(I + A)^{-1}$ . Интегральные уравнения Фредгольма. Решение интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром. Теорема об ограниченной обратимости оператора, близкого к ограниченно	Контрольные вопросы

		обратимому. Регулярное множество, спектр и резольвента линейного оператора. Спектральный радиус. Понятие сопряженного оператора. Теорема о его представлении в $H$ -пространстве. Теорема о линейности и непрерывности сопряжённого оператора. Самосопряжённые операторы. Свойства. Определение и простейшие свойства компактных операторов. Теорема о структуре компактного оператора. Производные Фреше и Гато.	
8.	Линейные функционалы	Линейные функционалы в ЛНП. Определение. Теорема о коразмерности ядра линейного функционала. Теорема Хана-Банаха в линейном пространстве. Линейные непрерывные функционалы в ЛНП. Непрерывность и ограниченность линейного функционала в ЛНП. Теорема Хана-Банаха в ЛНП. Сопряженное пространство $L^*$ . Теорема о полноте $L^*$ . Слабая сходимость в ЛНП. Теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в $H$ -пространстве.	Контрольные вопросы

### 2.3.2 Занятия семинарского типа (практические / семинарские занятия/ лабораторные работы)

№	Наименование раздела	Содержание раздела (номера и наименования лабораторных работ)	Форма текущего контроля
1	2	3	4
<b>5 семестр</b>			
1.	Тригонометрические ряды Фурье	Тема 1. Тригонометрические ряды Фурье на $(-\pi, \pi)$ Тема 2. Тригонометрические ряды Фурье на $(-l, l)$ Тема 3. Разложения в ряд Фурье только по синусам или только по косинусам Тема 4. Преобразование Фурье	РЗ/ЛР



№	Наименование раздела	Содержание раздела (номера и наименования лабораторных работ)	Форма текущего контроля
1	2	3	4
2.	Интеграл Лебега	Тема 1. Мера Лебега. Тема 2. Множества меры 0 Тема 3. Измеримые множества Тема 4. Измеримые функции Тема 5. Интеграл Лебега от ограниченных функций Тема 6. Интеграл Лебега от неограниченных функций	РЗ/ЛР
3.	Пространства Лебега	Тема 1. Основные свойства пространств $L_p$ Тема 2. Сходимость в пространствах $L_p$	РЗ/ЛР
4.	Метрические пространства	Тема 1. Метрика. Аксиомы метрики. Тема 2. Примеры метрических пространств. Тема 3. Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Тема 4. Сходимость последовательностей в метрических функциональных пространствах. Тема 5. Замкнутость, ограниченность, открытость, полнота и компактность в метрических пространствах.	РЗ/ЛР
<b>6 семестр</b>			
5.	Линейные нормированные пространства	Тема 1. Линейные пространства. Базис. Тема 2. Норма в линейных пространствах. Тема 3. Сходимость в линейных нормированных пространствах. Банаховы пространства. Тема 4. Ряды в банаховых пространствах.	РЗ/ЛР
6.	Евклидовы пространства	Тема 1. Евклидовы пространства, общие свойства. Тема 2. Ортогонализация в гильбертовом пространстве. Тема 3. Проектирование на подпространство евклидова пространства. Тема 4. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.	РЗ/ЛР

№	Наименование раздела	Содержание раздела (номера и наименования лабораторных работ)	Форма текущего контроля
1	2	3	4
7.	Линейные операторы	Тема 1. Линейные операторы Тема 2. Ограниченные операторы. Норма оператора. Тема 3. Обратный оператор. Тема 4. Интегральные уравнения. Тема 5. Спектр, резольвента оператора Тема 6. Сопряженные операторы. Вполне непрерывные	РЗ/ЛР
8.	Линейные функционалы	Тема 1. Ограниченные функционалы. Норма функционала в пространствах $l_p^n, l_p$ . Тема 2. Норма линейного функционала в $L_p(a, b), C[a, b]$ .	РЗ/ЛР

*Примечание: ЛР – отчет/защита лабораторной работы, КП – выполнение курсового проекта, КР – курсовой работы, РГЗ – расчетно-графического задания, Р – написание реферата, Э – эссе, К – коллоквиум, Т – тестирование, РЗ – решение задач.*

При изучении дисциплины могут применяться электронное обучение, дистанционные образовательные технологии в соответствии с ФГОС ВО.

#### **2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

№	Вид самостоятельной работы	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
1	Проработка и повторение лекционного материала, материала учебной и научной литературы	Методические указания для подготовки к лекционным и семинарским занятиям, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №7 от 18.04.2018 г.
2	Подготовка к лабораторным занятиям	Методические указания по выполнению лабораторных работ, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №7 от 18.04.2018 г.
3	Подготовка к решению задач	Методические указания по выполнению самостоятельной работы, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №7 от 18.04.2018 г.
4	Подготовка к текущему контролю	Методические указания по выполнению самостоятельной работы, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №7 от 18.04.2018 г.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

### 3. Образовательные технологии.

С точки зрения применяемых методов используются как традиционные информационно-объяснительные *лекции*, так и интерактивная подача материала с мультимедийной системой и др. Такое сочетание позволяет оптимально использовать отведенное время и раскрывать логику и содержание дисциплины.

Лекции представляют собой систематический обзор понятий и методов Комплексного анализа с подачей материала в форме презентаций и с использованием других интерактивных технологий: проблемное обучение, моделирование, дискуссия.

#### Занятия, проводимые с использованием интерактивных технологий

№	Наименование разделов (тем)	Количество часов	
		всего ауд. часов	интерактивные часы
1	2	3	4
1.	Тригонометрические ряды Фурье	16	2
2.	Интеграл Лебега	24	2
2.	Пространства Лебега	8	0
3.	Метрические пространства	20	2
4.	Линейные нормированные пространства	16	4
5.	Евклидовы пространства	16	4
6.	Линейные операторы	24	4
7.	Линейные функционалы	8	0
	<i>Итого по дисциплине:</i>	132	16

Лабораторное занятие позволяет научить студента применять теоретические знания при решении и исследовании конкретных задач, развить математическую интуицию и творческое мышление. Разбор конкретных ситуаций, математическое моделирование задач, встречающихся на практике (проблемное обучение), командная работа, визуализация и обсуждение результатов анализа широко используется при проведении лабораторных, а также самостоятельных работ. Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием возможностей средств удаленного доступа (электронная почта, видеоконференция).

#### 4. Оценочные и методические материалы

##### 4.1 Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины «Комплексный анализ».

Оценочные средства включает контрольные материалы для проведения **текущего контроля** в форме:

- тестовых заданий (контрольных и самостоятельные работы);
- контроля за выполнением групповых домашних заданий.

и **промежуточной аттестации** в форме вопросов и заданий к зачету и экзамену.

##### Структура оценочных средств для текущей и промежуточной аттестации

№ п/п	Код и наименование индикатора (в соответствии с п. 1.4)	Результаты обучения (в соответствии с п. 1.4)	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	ИПК-1.8 (40.001 А/02.5 Др.2) Деятельность, направленная на решение задач актуальные и значимые задачи прикладной математики и информатики аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач	Знает основные понятия, теоремы методы, алгоритмы и средства функционального анализа	Опрос по результатам лабораторных работы и выполненных задач,	<i>Вопросы на экзамене 1-15, 45-60</i>
2	ИПК-1.8 (40.001 А/02.5 Др.2) Деятельность, направленная на решение задач актуальные и значимые задачи прикладной математики и информатики аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач	Знает основные понятия, теоремы методы, алгоритмы и средства функционального анализа	<i>Задачи 1 семестра 1-20, 6 семестра 4-9, 12-15</i>	<i>Вопросы на экзамене, требующие доказательства и/или вывод расчётных формул: 4- 10,12-15,18-20, 32, 33, 34, 37-40, 46, 47, 49, 51, 53, 55, 56, 58, 59, 62, 65, 66, 67, 70</i>
3	ИПК-1.8 (40.001 А/02.5 Др.2) Деятельность, направленная на решение задач актуальные и значимые задачи прикладной математики и информатики аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач	Владеет методами функционального анализа для исследования различных прикладных задач.	<i>Задания для контрольных и самостоятельных работ</i>	<i>Практические задачи на экзамене</i>

4	ИПК-2.11 (40.001 А/02.5 Др.2) Деятельность, направленная на решение задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач, разработки новых математических моделей в естественных науках	Знает теоретические положения, лежащие в основе построения теории и методов функционального анализа		<i>Вопросы на экзамене 16-44, 61-88</i>
5	ИПК-2.11 (40.001 А/02.5 Др.2) Деятельность, направленная на решение задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач, разработки новых математических моделей в естественных науках	Умеет доказывать утверждения, выбирать методы для решения задач функционального анализа и приложений	<i>Задачи 5 семестра 21-30, 6 семестра 1-3, 10-11, 14-16</i>	<i>Практические задачи на экзамене</i>
6	ИПК-2.11 (40.001 А/02.5 Др.2) Деятельность, направленная на решение задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач, разработки новых математических моделей в естественных науках	Владеет основными методами решения типовых и оригинальных задач функционального анализа, способен применять эти методы для решения конкретных прикладных задач	<i>Задания для лабораторных работ</i>	<i>Практические задачи на экзамене</i>

**Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы**

#### 4.1.2 Образцы заданий для контрольных и самостоятельных работ.

Перечень компетенций (части компетенции), проверяемых оценочным средством:  
ПК-1, ПК-2.

Образец заданий для текущего контроля успеваемости.

##### 5-й семестр

1. Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = x$ , определенную на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .
2. Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = |x|$ , определенную на отрезке  $[-1, 1]$ .
3. Разложить в ряд Фурье а) по синусам, б) по косинусам функцию  $f(x) = \pi - 2x$ , определенную на отрезке  $[0, \pi]$ .
4. Разложить в ряд Фурье а) по синусам б) по косинусам функцию  $f(x) = x^2$ , определенную на отрезке  $[0, 1]$ .
5. Как следует продолжить абсолютно интегрируемую на отрезке  $[0, \frac{\pi}{2}]$  функцию, на отрезок  $[-\pi, \pi]$ , чтобы ее ряд Фурье имел вид  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n - 1)x$  ?
6. Может ли множество, имеющее хотя бы одну внутреннюю точку, иметь нулевую меру?

7. Построить для любого  $\alpha \in (0, 1)$  замкнутое подмножество  $X$  отрезка  $[0, 1]$  без внутренних точек такое, что  $m(X) = \alpha$ .

8. Пусть  $X$  – множество чисел из отрезка  $[0, 1]$ , в десятичной записи которых отсутствует цифра 8. Найти  $m(X)$ .

9. Являются ли функции  $f(x)$  и  $f^3(x)$  измеримыми одновременно? А функции  $f(x)$  и  $f^2(x)$ ?

10. Вычислить интеграл Лебега  $\int_0^1 f(x) dx$ , где

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{для всех иррациональных } x, \text{ больших, чем } \frac{1}{3}, \\ x^3, & \text{для всех иррациональных } x, \text{ меньших, чем } \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{если } x \in (0, 1) \cap Q. \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in [0, 1] \setminus Q, \\ 1, & \text{если } x \in Q. \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{если } x \in [0, \frac{1}{2}] \setminus D, \\ \cos \pi x, & \text{если } x \in (\frac{1}{2}, 1) \setminus D, \\ x^2, & \text{если } x \in D, \end{cases}$$

где  $D$  – канторово множество.

12. Привести пример функции  $x(t)$ , такой, что  $x \in L_1[0, 1] \setminus L_2[0, 1]$ .

13. Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние на множестве  $\mathbb{R}$ :

$$1) \rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}; \quad 2) \rho(x, y) = |\sin(x - y)|; \quad 3) \rho(x, y) = (x - y)^2;$$

$$4) \rho(x, y) = |\arctg x - \arctg y|; \quad 5) \rho(x, y) = \arctg|x - y|; \quad 6) \rho(x, y) = |x^2 - y^2|;$$

$$7) \rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|); \quad 8) \rho(x, y) = e^{|x-y|} - 1; \quad 9) \rho(x, y) = |x^3 - y^3|;$$

$$10) \rho(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}; \quad \rho(x, y) = \cos^2(x - y)?$$

14) Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние на множестве  $\mathbb{R}^n$ :

$$1) \rho(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|; \quad 2) \rho(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|;$$

$$3) \rho(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2; \quad 4) \rho(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n-1} |x_k - y_k|;$$

$$5) \rho(x, y) = \sum_{k=1}^n k|x_k - y_k|; \quad 6) \rho(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k| \ln k?$$

15) Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние в классе функций, непрерывных на отрезке  $[0, 1]$ :

$$1) \rho(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|; \quad 2) \rho(x, y) = \sup \frac{1}{t} \int_0^t |x(\tau) - y(\tau)| d\tau, \quad t \in (0, 1];$$

$$3) \rho(x, y) = \sqrt{\int_0^1 |x(t) - y(t)| dt}; \quad 4) \rho(x, y) = \max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |x(t) - y(t)| + \int_{\frac{1}{2}}^1 |x(t) - y(t)| dt?$$

16) Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние в классе функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[0, 1]$ :

$$1) \rho(x, y) = \max_{t \in [0, 1]} |x'(t) - y'(t)|;$$

$$2) \rho(x, y) = |x(0) - y(0)| + \max_{t \in [0, 1]} |x'(t) - y'(t)|;$$

$$3) \rho(x, y) = \max_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)| + \max_{t \in [0, 1]} |x'(t) - y'(t)|;$$

$$4) \rho(x, y) = \max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |x(t) - y(t)| + \max_{t \in [\frac{1}{2}, 1]} |x'(t) - y'(t)|?$$

17) Найти расстояние между функциями  $x(t) = \sin 2t$  и  $\cos 2t$  в пространстве 1)  $C[0, \pi]$ ; 2)  $C^1[0, \pi]$ ; 3)  $L_1[0, \pi]$ ; 4)  $L_2[0, \pi]$ .

18) Найти расстояние между функциями  $x(t) = t^3 + t$  и  $y(t) = 2t^3 + t^2$  в пространстве  
 1)  $C[-1, 1]$ ; 2)  $C^1[-1, 1]$ ; 3)  $L_1[-1, 1]$ ; 4)  $L_2[-1, 1]$ .

19) Исследовать на сходимость последовательность  $\{x_k\}$  в пространстве 1)  $l_1^n$ ; 2)  $l_2^n$ ; 3)  $l_\infty^n$ :

а)  $x_k = \left(\frac{1}{k}, 0, \dots, 0\right)$ ; б)  $x_k = (e^{-2k}, 1, 1, \dots, 1)$ ; в)  $x_k = (e^{-k}, e^{-k^2}, \dots, e^{-k^n})$ ;

г)  $x_k = (\cos k, 2, 2, \dots, 2)$ ; д)  $x_k = \left(k^2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ .

20) Исследовать на сходимость последовательность  $\{x_k\}$  в пространстве 1)  $l_1$ ; 2)  $l_2$ ; ; 3)  $l_\infty$

а)  $x_k = \left(0, \dots, 0, \frac{1}{k}, 0, \dots\right)$ ; б)  $x_k = \left(0, \dots, 0, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \dots\right)$ ; в)  $x_k = \left(1, 1, \dots, 1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}\right)$ ;

г)  $x_k = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, 0, 0, \dots\right)$ ; д)  $x_k = \left(2, 2, \dots, \widehat{2}, 0, 0, \dots\right)$ ; е)  $x_k = \left(0, \dots, 0, \widehat{3}, 0, \dots\right)$ ;

ж)  $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{2k-1}, \frac{1}{2k}, \dots\right)$ ; з)  $x_k = (e^{-k}, 0, 0, \dots, 0, 7, 0, 0, \dots)$ ;

и)  $x_k = \left(5, 0, 0, \dots, 0, \frac{1}{k+1}, 0, 0, \dots\right)$ ; к)  $x_k = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k}}, 0, 0, \dots\right)$ .

21) Исследовать на сходимость в пространстве 1)  $C[0, 1]$ ; 2)  $L_2(0, 1)$  последовательность

а)  $x_k(t) = t^k$ ; б)  $x_k(t) = \sin t - \sin \frac{t}{k}$ ; в)  $x_k(t) = \frac{kt}{\sqrt{k^2+1}}$ ; г)  $x_k(t) = e^{-\frac{t}{k}}$ ; д)  $x_k(t) = t^k - t^{k+1}$ ; е)  $x_k(t) = t^k - t^{2k}$ ; ж)  $x_k(t) = te^{kt}$ .

22) В каких пространствах  $L_p[0, 1]$  и к какому пределу сходятся последовательности:

а)  $x_k(t) = \begin{cases} \sqrt{k}, & t \in \left[0, \frac{1}{k}\right] \\ 0, & t \in \left(\frac{1}{k}, 1\right] \end{cases}$ ; б)  $x_k(t) = \begin{cases} \ln(k), & t \in \left[0, \frac{1}{k}\right] \\ t \in \left(\frac{1}{k}, 1\right] \end{cases}$ ;

в)  $x_k(t) = \begin{cases} e^k, & t \in \left[0, \frac{1}{k}\right] \\ 0, & t \in (0, 1] \end{cases}$ ; г)  $x_k(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{k}, & t \in \left[0, \frac{1}{k}\right] \\ \frac{1}{\sqrt[3]{t}}, & t \in \left(\frac{1}{k}, 1\right] \end{cases}$ .

23) Исследовать на сходимость в пространстве 1)  $C[0, 1]$ ; 2)  $L_2(0, 1)$  ряды

а)  $\sum_{k=0}^{\infty} t^k$ ; б)  $\sum_{k=0}^{\infty} (1-t)t^k$ ; в)  $\sum_{l=0}^{\infty} e^{-k(t+1)}$ .

24) Является ли открытым множество функций из пространства  $C[0, 1]$ , удовлетворяющих условию:

а)  $0 < x(t) < 1 + t^2, t \in (0, 1)$ ,

б)  $\int_0^1 |x(t)| dt < 1$ ;

в)  $\int_0^1 x(t) dt < 1$ ;

г)  $\left|x\left(\frac{1}{3}\right)\right| < 2$ ?

25. Является ли замкнутым множество функций из  $C[0, 1]$ , удовлетворяющих условию

а)  $\operatorname{sgn} x\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ;

б)  $\operatorname{sgn} x(t) = 1, t \in [0, 1]$  ?

26. Являются ли компактными, предкомпактными в  $C[0, 1]$  следующие семейства функций;

1)  $M = \{x(t) \mid |x(0)| \leq K_0, |x'(t)| \leq K_1, t \in [0, 1]\}$ ;

2)  $M = \{x(t) \mid |x(0)| \leq K_0, \int_0^1 (x'(t))^2 dt \leq K_1\}$ ;

3)  $M = \{x(t) \mid |x(t)| \leq t, t \in [0, 1]\}$ ;

4)  $x_\alpha(t) = t^\alpha$ , если а)  $0 < \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 < \infty$ ; б)  $0 < \alpha_1 \leq \alpha$ ;

5)  $x_\alpha(t) = e^{(t+\alpha)}$ , если а)  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; б)  $\alpha \geq 0$ ; в)  $\alpha \leq 0$ ;

6)  $x_\alpha(t) = \sin(\alpha t)$ , если а)  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ; б)  $0 \leq \alpha \leq \alpha_2 < \infty$ ;

7)  $x_\alpha(t) = \sin(\alpha + t)$ , если а)  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; б)  $0 < \alpha_1 < \alpha < \alpha_2 < \infty$ ?

27. Провести процесс ортогонализации системы функций  $\{1, t, t^2, t^3\}$  в пространстве

а)  $L_2(-1, 1)$ ; б)  $L_2(0, 1)$ .

28. В пространстве  $l_2$  найти множество векторов, ортогональных вектору  $x_0$ , если  
 а)  $x_0 = (0, 0, \dots, 0, \hat{1}, 0, \dots)$ ; б)  $x_0 = (0, 1, 0, 1, \dots)$ ; в)  $x_0 = (1, 1, \dots, \hat{1}, 0, 0, \dots)$ .
29. В пространстве  $L_2[-\pi, \pi]$  найти проекции функций  
 а)  $x(t) \equiv 0$ ; б)  $x(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ ; в)  $x(t) = t$ ; г)  $x(t) = \cos 2t$   
 на подпространство  $X_0 = \{x(t) = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t\}$ .
30. В пространстве  $L_2[-1, 1]$  найти проекции функций  
 а)  $x(t) = t^2$ ; б)  $x(t) = t^3$   
 на подпространство  $X_0 = \{x(t) = c_1 + c_2 t\}$ .

## 6 семестр

1. Какие из приведенных формул задают оператор:

- 1)  $A[x(t)] = \max_{\tau \in [0, \frac{1}{2}]} |x(\tau)|$ ;  $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ;
- 2)  $A[x(t)] = x'(t)$ ,  $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ;
- 3)  $A[x(t)] = x(t + 1)$ ,  $A : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$ ;
- 4)  $A[x(t)] = tx(t)$ ,  $A : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$ ;
- 5)  $A[x(t)] = x(0)$ ,  $A : L_1(0, 1) \rightarrow L_1(0, 1)$ ;
- 6)  $A[x(t)] = \frac{1}{x(t)}$ ,  $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ;
- 7)  $A[x(t)] = x(t - 1)$ ,  $A : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$ ;
- 8)  $A[x(t)] = \int_0^t x(t) dt$ ,  $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ;
- 9)  $A[x(t)] = \int_0^t x(t) dt$ ,  $A : L[0, \infty) \rightarrow L[0, \infty)$ ;
- 10)  $A[x(t)] = \operatorname{sign} x(t)$ ,  $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ;
- 11)  $A[x(t)] = \int_1^t x(\tau) d\tau$ ,  $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ;
- 12)  $A[x(t)] = \int_0^1 e^{t\tau} x(t) dt$ ,  $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ;
- 13)  $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$ ,  $A : l_\infty \rightarrow l_2$ ;
- 14)  $(Ax)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^2} \sin kt$ ,  $A : l_\infty \rightarrow C[0, 1]$ ;
- 15)  $Ax = \left(x(1), x\left(\frac{1}{2}\right), x\left(\frac{1}{3}\right), \dots\right)$ ,  $A : C[0, 1] \rightarrow l_1$ ;
- 16)  $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{2x_2}{3}, \dots\right)$ ,  $A : l_\infty \rightarrow l_\infty$ ;
- 17)  $Ax = (x_1, x_2^2, x_3^3, \dots)$ ,  $A : l_2 \rightarrow l_2$ ?

2. Привести примеры нетривиальных операторов в заданных пространствах

- 1)  $C[0, 1] \rightarrow C[-1, 1]$ ;
- 2)  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ;
- 3)  $l_1 \rightarrow l_2$ ;
- 4)  $l_\infty \rightarrow C[0, 1]$ ;
- 5)  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;
- 6)  $l_\infty \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;
- 7)  $l_\infty \rightarrow l_1$ ;
- 8)  $L_1(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ ;
- 9)  $C(0, \infty) \rightarrow l_1$ ;
- 10)  $L_1(0, 1) \rightarrow C[0, 1]$ ;
- 11)  $C[0, 1] \rightarrow l_\infty$ ;
- 12)  $C[0, 1] \rightarrow C[1, 3]$ ;
- 13)  $C^1[0, 1] \rightarrow l_2$ .

3. Какие из приведенных ниже операторов являются линейными?

- 1)  $A[x(t)] = 3x(t) + t$ ,  $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ;
- 2)  $A[x(t)] = \int_0^{\frac{1}{3}} (t^3 + \tau^3)x(\tau) d\tau$ ,  $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ;



- 3)  $A[x(t)] = \cos 2x(t), A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1];$
- 4)  $A[x(t)] = tx(t^2), A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1];$
- 5)  $A[x(t)] = |x(t)|, A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1];$
- 6)  $A[x(t)] = \int_0^1 e^{t\tau} d\tau, A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1];$
- 7)  $(Ax)(t) = \cos(tx_2), A : \mathbb{R}^2 \rightarrow C(-\infty, \infty);$
- 8)  $(Ax)(t) = 4x_1^2 t + 3x_2 t^2, A : \mathbb{R}^2 \rightarrow C(-\infty, \infty);$
- 9)  $(Ax)(t) = x_1 \sin t - 3x_2 \sqrt[3]{t}, A : \mathbb{R}^2 \rightarrow C(-\infty, \infty);$

4. Проверить линейность и ограниченность функционалов и найти их нормы в  $l_1, l_2, l_\infty$ :

- 1)  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k};$
- 2)  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k;$
- 3)  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x_k}{k!}.$

5. Найти норму линейного функционала а) в  $C[0, 1]$ , б) в  $L_1[0, 1]$ , в) в  $L_2[0, 1]$ , заданного выражением  $\int_0^1 h(t)x(t)dt$ , если функция  $h(t)$  равна:

- |   |                               |
|---|-------------------------------|
| 1) $\begin{cases} -3, & 0 \leq t \leq 0,6, \\ 0,2, & 0,6 < t \leq 1; \end{cases}$ | 6) $\sqrt{t+4};$              |
| 2) $\ln(t + \frac{1}{4});$  | 7) $\sqrt{t^2 - t + 6};$      |
| 3) $2t - 1;$  | 8) $e^{2t} - 3;$              |
| 4) $\cos \pi t;$  | 9) $ch 2t;$                   |
| 5) $2 - \sin \pi t$   | 10) $\cos(t - \frac{1}{2});$  |
|   | 11) $t^3 - t;$                |
|   | 12) $t^2 - 4t + \frac{1}{3};$ |

6. Найти нормы следующих операторов.

- 1)  $A[x(t)] = \int_1^t x(\tau) d\tau, A \in \mathcal{L}(C[0, 1]);$
- 2)  $A[x(t)] = x'(t), A \in \mathcal{L}(C^1[0, 1], C[0, 1]);$
- 3)  $A[x(t)] = t^2 x(t), A \in \mathcal{L}(L_2[0, 1]);$
- 4)  $A[x(t)] = e^{t+1} x(t), A \in \mathcal{L}(C[0, 1]);$
- 5)  $A[x(t)] = \frac{t}{t+1} x(t), A \in \mathcal{L}(C[0, \infty));$
- 6)  $A[x(t)] = \int_0^t x(\tau) \sin \tau d\tau, A \in \mathcal{L}(C[0, 1]);$
- 7)  $A[x(t)] = t^2 x(0) - tx(\frac{1}{2}), A \in \mathcal{L}(C[0, 1]);$
- 8)  $A[x(t)] = x(t^4), A \in \mathcal{L}(C[0, 1]);$
- 9)  $A[x(t)] = (t^2 + 2)x(0), A \in \mathcal{L}(C[0, 1]);$
- 10)  $A[x(t)] = t \int_0^1 x(t) dt, A \in \mathcal{L}(L_2[0, 1]);$
- 11)  $A[x(t)] = \int_0^\pi (2t + \tau^2)x(\tau) d\tau, A \in \mathcal{L}(L_1[0, \pi]);$
- 12)  $A[x(t)] = \int_0^\pi (t - \tau + 1)x(\tau) d\tau, A \in \mathcal{L}(L_1[0, \pi], C[0, \pi]);$
- 13)  $A[x(t)] = \int_0^\pi (\sin t + 2 \cos \tau)x(\tau) d\tau, A \in \mathcal{L}(C[0, \pi], L_1[0, \pi]);$
- 14)  $A[x(t)] = \int_0^\pi (2t - \tau)^2 x(\tau) d\tau, A \in \mathcal{L}(L_2[0, \pi]);$
- 15)  $Ax = (-x_1, \frac{x_2}{2}, -\frac{x_3}{3}, \dots), A \in \mathcal{L}(l_1);$
- 16)  $Ax = (\frac{x_2}{2}, \frac{2x_3}{3}, \frac{3x_4}{4}, \dots), A \in \mathcal{L}(l_1);$
- 17)  $Ax = (x_1, x_3, x_2 + x_5), A \in \mathcal{L}(l_\infty, \mathbb{R}^3).$

7. Найти оператор, сопряженный оператору  $A \in \mathcal{L}(l_2)$ :

- 1)  $Ax = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$

- 2)  $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, \dots)$ ,  $\{\lambda_n\} \in l_\infty$ ;  
 3)  $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$ ;
- 4)  $Ax = (x_2, x_3, \dots)$ ;
- 5)  $Ax = (5x_1 - 2x_2, x_3, x_4, \dots)$ .
8. Найти оператор, сопряженный оператору  $A \in \mathcal{L}(L_2[0, 1])$ ,  $A[x(t)] = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds$ , если функция  $K(t, s)$  имеет вид:
- |                            |                                      |
|----------------------------|--------------------------------------|
| 1) 1;                      | 8) $te^{-s}$                         |
| 2) $t$ ;                   | 9) $t(e^{3s} - \frac{1}{5})$ ;       |
| 3) $s$ ;                   | 10) $\frac{1+s}{1+t}$ ;              |
| 4) $t-s$ ;                 | 11) $\sin(t - 2s)$ ;                 |
| 5) $t + \sin 2s$ ;         | 12) $e^{t-s} \cos(t^3 - \sqrt{s})$ ; |
| 6) $ 2\pi - 2s  \sin 4t$ ; | 13) $t \sin s - s^2 \cos t$ .        |
| 7) $2t - 3s$ ;             |                                      |
9. Исследовать обратимость оператора  $A \in \mathcal{L}(l_p)$ , заданного бесконечной матрицей  $(a_n)$ , если:
- 1)  $a_n = 1 + (-1)^n$ ;    2)  $a_n = \frac{1}{n}$ ;    3)  $\frac{1}{3} \leq |a_n| \leq 4$ .
10. Исследовать обратимость оператора  $A \in \mathcal{L}(C[0, 1])$ , заданного соотношением:  
 $A[x_0(t)] = x_0(t)x(t)$ , где
- 1)  $x_0(t) = (t - c) - |t - c|$ ,  $c \in (a, b)$ ;    2)  $x_0(t) = (t - c)$ ,  $c \in (a, b)$ ;
- 2)  $x_0(t) = 1 + t^2$ .
11. Исследовать обратимость оператора  $A \in \mathcal{L}(C[0, 1])$ :
- 1)  $A[x(t)] = \int_0^t x(s)ds$ ;  
 2)  $A[x(t)] = \int_0^1 tsx(s)ds$ ;  
 3)  $A[x(t)] = x(t) - \int_0^t x(s)ds$ ;  
 4)  $A[x(t)] = x(t) - \int_0^1 x(s)ds$ ;  
 5)  $A[x(t)] = x(t) - \int_0^1 sx(s)ds$ .
- Если оператор  $A$  обратим, то найти его обратный.
12. Какие из операторов  $A \in \mathcal{L}(l_2)$  вполне непрерывны:
- 1)  $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$ ,    2)  $Ax = (x_2, x_3, \dots)$ ,    3)  $Ax = (\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$ ,
13. Какие из операторов  $A \in \mathcal{L}(C[0, 1])$  вполне непрерывны:
- 1)  $A[x(t)] = \int_0^t x(s)ds$ ;  
 2)  $A[x(t)] = (t + 2)x(t)$ ;  
 3)  $A[x(t)] = x(0) \cos(2t) - x(1) \sin(2t)$ ;  
 4)  $A[x(t)] = \int_0^t e^{ts} x(s)ds$ ;  
 5)  $A[x(t)] = x(t^2)$ .
14. Найти собственные значения и собственные векторы оператора  $A \in \mathcal{L}(l_\infty)$ :
- 1)  $Ax = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ;    2)  $Ax = (x_3, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ;  
 3)  $Ax = (-x_1, x_2, \dots, (-1)^n x_n, \dots)$ ;    4)  $Ax = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$ ;  
 5)  $Ax = (0, 0, \dots, 0, x_n, 0, \dots)$ ;    6)  $Ax = (\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$ ;

- 7)  $Ax = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ; 8)  $Ax = (x_2, x_3, \dots)$ .
15. Найти спектр и спектральный радиус оператора  $A \in \mathcal{L}(C[0, 1])$ :
- 1)  $A[x(t)] = \int_0^t x(s) ds$ ; 2)  $A[x(t)] = (t + 2)x(t)$ ; 3)  $A[x(t)] = tx(t)$ ;  
 4)  $A[x(t)] = \int_0^1 tsx(s) ds$ ; 5)  $A[x(t)] = \int_0^1 (t + s)x(s) ds$ .
16. Решить уравнение при заданных значениях свободного члена  $f(t)$ :
- 1)  $x(t) = \frac{1}{3} \int_0^1 x(s) ds + f(t)$ , а)  $f(t) = 1$ , б)  $f(t) = t$ , в)  $f(t) = 1 - t$ ;  
 2)  $x(t) = \int_0^1 tsx(s) ds + f(t)$ , а)  $f(t) = t$ , б)  $f(t) = t^2$ , в)  $f(t) = t - t^2$ ;  
 3)  $x(t) = \int_0^\pi \cos s x(s) ds + f(t)$ , а)  $f(t) = \sin t$ , б)  $f(t) = \cos t$ ;  
 4)  $x(t) = \int_0^\pi \sin t \cos s x(s) ds + f(t)$ , а)  $f(t) = \sin t$ , б)  $f(t) = \cos t$ ;  
 5)  $x(t) = \int_{-1}^1 (ts + t^2 s^2)x(s) ds + f(t)$ , а)  $f(t) = 1$ , б)  $f(t) = t^2 + t$ ;  
 6)  $x(t) = \int_0^{2\pi} \cos(t - s)x(s) ds + f(t)$ , а)  $f(t) = \sin t$ , б)  $f(t) = \cos t$ .

**Примерный перечень вопросов для подготовки к экзамену.**

*Перечень компетенций (части компетенции), проверяемых оценочным средством: ПК-1, ПК-2.*

**5 семестр.**

1. Периодические величины. Гармонический анализ. Понятие ряда. Коэффициенты Фурье.
2. Тригонометрический ряд Фурье периодической функции с периодом  $2\pi$  и коэффициенты Фурье
3. Разложение в ряд Фурье на произвольном промежутке.
4. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций
5. Разложение в ряд Фурье непериодических функций только по синусам или по косинусам
6. Ряд Фурье в комплексной форме.
7. Лемма Римана.
8. Интеграл Дирихле.
9. Принцип локализации
10. Теорема о сходимости ряда Фурье для кусочно-дифференцируемой функции.
11. Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье.
12. Косинус и синус преобразования Фурье.
13. Свойства преобразования Фурье.
14. Множества, пространства, подпространства, операции над множествами.
15. Интуитивное понятие меры множества и его свойства.
16. Внешняя мера и мера Лебега.
17. Теорема Лебега.
18. Множество меры ноль.
19. Понятие измеримого функционала и критерий измеримости функционала.
20. Измеримые функционалы и их свойства: умножение на число, сложение с числом, сумма двух измеримых функционалов.
21. Измеримые функционалы и их свойства: сравнение, умножение и деление функционалов.

22. Измеримые функционалы и их свойства: предел последовательности измеримых функционалов.
23. Эквивалентные функционалы, понятие «почти всюду».
24. Простые функционалы. Теорема об измеримости предела последовательности простых функционалов.
25. Интеграл Лебега от простого функционала и ограниченного функционала.
26. Свойства интеграла Лебега.
27. Сравнение интегралов Лебега и Римана для ограниченных функций.
28. Распределения и интеграл Лебега. Интеграл Римана-Стилтьеса.
29. Интеграл Лебега от неограниченных функций.
30. Прямое произведение множеств и мер.
31. Теорема Фубини.
32. Пространства Лебега. Теорема о вложении пространств.
33. Линейность пространств Лебега.
34. Неравенство Гельдера.
35. Неравенство Минковского.
36. Метрика, аксиомы и определение метрического пространства.
37. Примеры метрических пространств.
38. Шар, сфера, окрестность и сопутствующие понятия в метрическом пространстве.
39. Последовательности в метрических пространствах, сходимости последовательностей. Теорема о единственности предела.
40. Фундаментальные последовательности в метрических пространствах. Теорема о сходящейся и фундаментальной последовательности.
41. Полные метрические пространства. Теорема о пополнении метрического пространства.
42. Метрические пространства. Принцип вложенных шаров.
43. Критерий полноты метрического пространства на основе системы вложенных шаров.
44. Компактные множества в метрических пространствах. Ограниченность компактного множества.
45. Компактные множества в метрических пространствах. Замкнутость компактного множества.
46. Компактные множества в метрических пространствах. Полнота компактного множества.
47. Понятие  $\epsilon$ -сети и вполне ограниченного множества. Теорема Хаусдорфа.

## **6 семестр.**

48. Линейные пространства над полем чисел. Линейная зависимость, базис и размерность пространства.
49. Норма и линейные нормированные пространства (ЛНП), примеры. Свойства нормы как функционала.
50. Последовательность в линейных нормированных пространствах. Банаховы пространства. Теорема о полноте конечномерного ЛНП.
51. Сравнение норм. Теорема об эквивалентности норм конечномерного ЛНП.
52. Ряды в банаховых пространствах, абсолютная сходимость, теорема об абсолютно сходящихся рядах.
53. Скалярное произведение. Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства. Примеры.
54. Норма в гильбертовом пространстве, тождество параллелограмма, поляризованное тождество.
55. Ортогональность. Ортогональное дополнение. Теорема о разложении гильбертова пространства. Расстояние от элемента до подпространства.
56. Ортогональная система элементов. Линейная независимость ортогональной системы.

57. Ортогонализация Гильберта-Шмидта.
58. Полнота ортогональной системы. Теорема Пифагора.
59. Определение и примеры сепарабельных нормированных пространств.
60. Понятие сепарабельного пространства и плотного множества. Теорема о полноте ортогональной системы в сепарабельном пространстве.
61. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Теорема об экстремальном свойстве частичных сумм ряда Фурье.
62. Отображения в метрических пространствах. Сжимающие отображения. Теорема о непрерывности сжимающих отображений.
63. Принцип неподвижной точки для сжимающих отображений.
64. Линейный оператор (ЛО). Непрерывность и критерий непрерывности ЛО.
65. Ограниченность линейного оператора, необходимый и достаточный признак непрерывности.
66. Норма линейного оператора. Вычисление нормы.
67. Пространство линейных операторов. Сходимость линейных операторов.
68. Обратный линейный оператор. Единственность.
69. Теорема Банаха-Штейнгауза.
70. Ядро оператора. Критерий существования обратного ЛО.
71. Теорема о норме обратного оператора.
72. Интегральное уравнение Фредгольма. Решение интегрального уравнения Фредгольма II рода с вырожденным ядром.
73. Принцип неподвижной точки. Теорема о существовании оператора  $(J - P)^{-1}$ .
74. Проекционные методы решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве: метод наименьших квадратов, метод Галеркина.
75. Собственные значения линейного оператора, линейная независимость собственных решений.
76. Резольвента, регулярное множество и спектр линейного оператора. Оценка точек спектра.
77. Спектр, спектральный радиус линейного оператора. Критерий обратимости оператора  $(J - A)$ .
78. Теорема Хана-Банаха в линейном пространстве.
79. Самосопряженные операторы. Свойства.
80. Определение и простейшие свойства компактных операторов.
81. Теорема о структуре компактного оператора.
82. Линейные функционалы в ЛНП. Ядро линейного функционала. Теоремы о ядре линейного функционала.
83. Ограниченность, норма и непрерывность линейного функционала в ЛНП.
84. Теорема Рисса о линейном функционале в гильбертовом пространстве.
85. Сопряженное пространство. Сильная и слабая сходимости.
86. Линейные непрерывные функционалы в ЛНП. Непрерывность и ограниченность линейного функционала в ЛНП.
87. Производная по Гато.
88. Производная Фреше.

### **Критерии оценивания результатов обучения**

Зачет по практике выставляется по результатам выполненных контрольных работ, индивидуальных заданий и текущей работы на лабораторных занятиях. Отметка «зачтено» выставляется при более, чем 60% выполнении индивидуальных заданий.

Оценка	Критерии оценивания на экзамене
отлично	<ul style="list-style-type: none"> <li>– систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины, а также по основным вопросам, выходящим за пределы учебной программы;</li> <li>– точное использование научной терминологии систематически грамотное и логически правильное изложение ответа на вопросы;</li> <li>– безупречное владение инструментарием учебной дисциплины, умение его эффективно использовать в постановке научных и практических задач;</li> <li>– выраженная способность самостоятельно и творчески решать сложные проблемы и нестандартные ситуации;</li> <li>– полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной учебной программой по дисциплине;</li> <li>– умение ориентироваться в теориях, концепциях и направлениях дисциплины и давать им критическую оценку, используя научные достижения других дисциплин;</li> <li>– творческая самостоятельная работа на практических/семинарских/лабораторных занятиях, активное участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий;</li> <li>– высокий уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.</li> </ul>
хорошо	<ul style="list-style-type: none"> <li>– достаточно полные и систематизированные знания по дисциплине;</li> <li>– умение ориентироваться в основном теориях, концепциях и направлениях дисциплины и давать им критическую оценку;</li> <li>– использование научной терминологии, лингвистически и логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;</li> <li>– владение инструментарием по дисциплине, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;</li> <li>– усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной учебной программой по дисциплине;</li> <li>– самостоятельная работа на практических занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий;</li> <li>– средний уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.</li> </ul>
удовлетворительно	<ul style="list-style-type: none"> <li>– достаточный минимальный объем знаний по дисциплине;</li> <li>– усвоение основной литературы, рекомендованной учебной программой;</li> <li>– умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по дисциплине и давать им оценку;</li> <li>– использование научной терминологии, стилистическое и логическое изложение ответа на вопросы, умение делать выводы без существенных ошибок;</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>– владение инструментарием учебной дисциплины, умение его использовать в решении типовых задач;</li> <li>– умение под руководством преподавателя решать стандартные задачи;</li> <li>– работа под руководством преподавателя на практических занятиях, допустимый уровень культуры исполнения заданий;</li> <li>– достаточный минимальный уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.</li> </ul>
неудовлетворительно	<ul style="list-style-type: none"> <li>– фрагментарные знания по дисциплине;</li> <li>– отказ от ответа (выполнения письменной работы);</li> <li>– знание отдельных источников, рекомендованных учебной программой по дисциплине;</li> <li>– неумение использовать научную терминологию;</li> <li>– наличие грубых ошибок;</li> <li>– низкий уровень культуры исполнения заданий;</li> <li>– низкий уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.</li> </ul>

Для успешного выполнения лабораторной работы обучающемуся следует ознакомиться с теоретической частью дисциплины по теме лабораторной работы, изложенной в лекциях. Для углубленного понимания теоретического материала могут быть использованы источники, указанные в списке основной литературы [1-8].

Критерием должной подготовки студентов к выполнению лабораторных работ являются приобретенные знания, позволяющие безошибочно ответить на вопросы, сформулированные по каждой теме лабораторных работ. Для приобретения должных навыков к решению задач предполагается решение задач на лабораторных занятиях в учебных аудиториях под руководством преподавателя. Закрепление приобретенных навыков осуществляется внеаудиторным самостоятельным решением студентом задач. Номера задач для решения в аудитории и дома указаны к каждой лабораторной работе.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

– в печатной форме увеличенным шрифтом,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

## **5. Перечень учебной литературы, информационных ресурсов и технологий**

### **5.1. Учебная литература:**

1. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 272 с. — ISBN 978-5-8114-0976-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210290> (дата обращения: 18.09.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Филимоненкова, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 176 с. — ISBN 978-5-8114-1821-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/212048> (дата обращения: 18.09.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Гуревич, А. П. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / А. П. Гуревич, В. В. Корнев, А. П. Хромов. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 192 с. — ISBN 978-5-8114-1274-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210809> (дата обращения: 18.09.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Дерр, В.Я. Функциональный анализ: лекции и упражнения.—М: КНОРУС, 2013
5. Кудрявцев, Лев Дмитриевич. Курс математического анализа: учебник для бакалавров: учебник для студентов вузов, обучающихся по естественнонаучным и техническим направлениям и специальностям. Т3. / Л. Д. Кудрявцев ; Моск. физико-техн. ин-т (Гос. ун-т). - 6-е изд. - Москва : Юрайт, 2012. - 351 с. - (Бакалавр. Базовый курс). - ISBN 9785991618922 : 306.79. (50)

### **5.2. Периодическая литература**

Не используется

### **5.3. Интернет-ресурсы, в том числе современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

#### **Электронно-библиотечные системы (ЭБС):**

1. ЭБС «УНИВЕРСИТЕТСКАЯ БИБЛИОТЕКА ОНЛАЙН» [www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)
2. ЭБС «ZNANIUM.COM» [www.znanium.com](http://www.znanium.com)
3. ЭБС «ЛАНЬ» <https://e.lanbook.com>

#### **Профессиональные базы данных:**

1. Web of Science (WoS) <http://webofscience.com/>



2. Scopus <http://www.scopus.com/>
3. ScienceDirect [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)
4. Springer eBooks: <https://link.springer.com/>
5. Общероссийский портал Math-Net.Ru: <http://www.mathnet.ru>

#### **Ресурсы свободного доступа:**

1. Федеральный портал "Российское образование" <http://www.edu.ru/>;
2. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов <http://school-collection.edu.ru/>.
3. Образовательный портал "Учеба" <http://www.uceba.com/>;

#### **Собственные электронные образовательные и информационные ресурсы КубГУ:**

1. Среда модульного динамического обучения <http://moodle.kubsu.ru>
2. База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций <http://mschool.kubsu.ru/>

### **6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной теоретический материал, лабораторных занятий, позволяющих студентам в полной мере ознакомиться с понятиями и методами Комплексного анализа и навыками их применением в решении практических задач.

Важнейшим этапом является самостоятельная работа по дисциплине. Целью самостоятельной работы бакалавра является углубление знаний, полученных в результате аудиторных занятий. Вырабатываются навыки самостоятельной работы. Закрепляются опыт и знания, полученные во время лабораторных занятий.

Самостоятельная работа студентов в ходе изучения дисциплины состоит в выполнении индивидуальных заданий, задаваемых преподавателем, ведущим лабораторные занятия, подготовки теоретического материала к лабораторным занятиям, на основе конспектов лекций и учебной литературы, согласно календарному плану и подготовки теоретического материала к тестовому опросу, зачету и экзамену, согласно вопросам к экзамену.

Указания по оформлению работ:

- работа на лабораторных занятиях и конспекты лекций могут выполняться на отдельных листах либо непосредственно в рабочей тетради;

- оформление индивидуальных заданий желательно на отдельных листах.

Проверка индивидуальных заданий по темам, разобранным на лабораторных занятиях, осуществляется через неделю на текущем лабораторном занятии, либо в течение недели после этого занятия на консультации.

Для разъяснения непонятных вопросов лектором и ассистентом еженедельно проводятся консультации, о времени которых группы извещаются заранее.

Учебная деятельность проходит в соответствии с графиком учебного процесса. Процесс самостоятельной работы контролируется во время аудиторных занятий и индивидуальных консультаций. Самостоятельная работа студентов проводится в форме

изучения отдельных теоретических вопросов по предлагаемой литературе и выполнении практических заданий по разобранным во время аудиторных занятий примерам.

Фонд оценочных средств дисциплины состоит из средств текущего контроля (см. список задач и вопросов коллоквиума) и итоговой аттестации (зачета, экзамена).

В качестве оценочных средств, используемых для текущего контроля успеваемости, предлагается перечень вопросов, которые прорабатываются в процессе освоения курса. Данный перечень охватывает все основные разделы курса, включая знания, получаемые во время самостоятельной работы. Кроме того, важным элементом технологии является самостоятельное решение студентами и сдача заданий. Это полностью индивидуальная форма обучения. Студент рассказывает свое решение преподавателю, отвечает на дополнительные вопросы

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

## 7 Материально-техническое обеспечение по дисциплине (модулю)

Наименование специальных помещений	Оснащенность специальных помещений	Перечень лицензионного программного обеспечения
Учебные аудитории А305, А307, 133, 129. для проведения занятий лекционного типа	Мебель: учебная мебель Технические средства обучения: экран, проектор, компьютер	MS Windows, MS Word, MS PowerPoint
Учебные аудитории для проведения лабораторных работ: 133, 149, 150.	Мебель: учебная мебель Технические средства обучения: не требуются	Не предусмотрено
Аудитории А305, 133, 150, 148, для групповых (индивидуальных) консультаций	учебная мебель (столы, стулья, доска), презентационная техника	MS Windows, MS Word, MS PowerPoint
Аудитории А305, 133. для текущего контроля, промежуточная аттестация	учебная мебель (столы, стулья, доска)	Не предусмотрено
Самостоятельная работа: 102-А, а также студентский читальный зал библиотеки КубГУ (к.109С) и зал доступа к электронным ресурсам и каталогам (к. А213).	Кабинеты для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета:	MS Windows, MS Internet Explorer, Microsoft Edge