

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ:  
Проректор по учебной работе,  
качеству образования – первый  
проректор

  
\* Т.А. Хагуров

*подпись*

«30» мая 2022 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### Б1.О.23 Комплексный анализ

Направление подготовки: 01.03.01 Математика

Направленность (профиль): Математическое моделирование; Преподавание математики и информатики

Форма обучения: очная

Квалификация: бакалавр

Краснодар 2022

Рабочая программа дисциплины Б1.О.23 КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 01.03.01 Математика

Программу составил(и):  
Левицкий Б.Е., доцент, к. ф.-м. н.



Рабочая программа дисциплины Б1.О.23 КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ утверждена на заседании кафедры теории функций протокол № 9 от «12» апреля 2022 г.  
Заведующий кафедрой Голуб М. В.



Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук протокол № 5 «5» мая 2022 г.  
Председатель УМК факультета/института Шмалько С. П.



Рецензенты:

Фоменко Сергей Иванович, канд. физ. - мат. наук,  
старший научный сотрудник лаборатории волновых процессов

Лепетухин Михаил Викторович,  
председатель правления КПК «Кубанский капитал»

## **1. Цели и задачи изучения дисциплины.**

### **1.1. Цель дисциплины**

Комплексный анализ – область математического анализа, являющегося частью единой современной математики, предметом изучения которой являются функции одной и нескольких комплексных переменных, свойства которых порождены комплексной структурой их области определения.

В отличие от вещественного анализа, в котором стройная теория развивается лишь для однозначных функций, переход к функциям комплексного переменного позволяет выяснить природу многозначности и построить безупречную теорию многозначных функций.

Комплексный анализ (теория функций комплексного переменного) дает эффективные методы вычисления интегралов и получения асимптотических оценок, новые способы решений дифференциальных уравнений, позволяет изучать специальные векторные поля, встречающиеся в разнообразных приложениях.

Интересные и неожиданные приложения, в частности, в теоретической физике, получила теория функций многих комплексных переменных. Оба направления изучения функций комплексного переменного получили современное название «Комплексный анализ». Отличительной особенностью комплексного анализа является его подлинная комплексность. В нем сочетаются аналитические и геометрические методы, находят новые применения классические подходы и развиваются новые методы, появляются новые приложения. Понятия комплексного анализа служат отправной точкой построения новых абстрактных теорий, объединяющих разные разделы математики и разные прикладные науки.

Главная цель курса – освоение методов исследования функций комплексного переменного и приложений этих методов к решению задач комплексного и вещественного анализа.

### **1.2. Задачи дисциплины**

- обобщить и систематизировать знания о свойствах и особенностях голоморфных (аналитических) функций, их аналитическом продолжении, рядах голоморфных функций, теории интеграла Коши, гармонических функциях, геометрических принципах конформных отображений и возможностях применений этих знаний;
- сформировать навыки построения конформных отображений с помощью элементарных функций и применения принципа симметрии, определения характера особенностей функции, применения теории вычетов к вычислению некоторых типов определенных интегралов.
- научить применять методы комплексного анализа для решения прикладных задач.

### **1.3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина «Комплексный анализ» относится к блоку Б.1 обязательной части учебного плана по направлению подготовки 01.03.01. Дисциплина читается в 4 и 5-м семестрах. Знания, полученные в этом курсе, используются в математическом анализе, функциональном анализе, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнениях, уравнениях математической физики, теории чисел, методах оптимизации и др. Слушатели должны владеть математическими знаниями в рамках разделов программы учебного курса по математическому анализу, которые изучаются 1 – 4 семестрах для направлений подготовки 01.03.01 – Математика.

### **1.4. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы**

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучаю-

щихся следующих компетенций: ОПК-1, ПК-1.

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
1.	ОПК-1	способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	основные понятия и теоремы комплексного анализа и способы их применения в других областях знаний	<ul style="list-style-type: none"> <li>• производить арифметические операции над комплексными числами, используя различные формы представления комплексных чисел, их геометрическую интерпретацию;</li> <li>• определять разными способами дифференцируемость в смысле комплексного анализа и голоморфность (аналитичность) комплекснозначных функций двух вещественных переменных;</li> <li>• вычислять значения в точке элементарных функций комплексного переменного;</li> <li>• определять конформность в точке отображения, осуществляемого голоморфной функцией, и применять знания о геометрическом смысле модуля и аргумента производной;</li> <li>• решать задачи комплексного анализа, а также применять знания комплексного анализа при решении задач других дисциплин.</li> </ul>	навыками практического использования методов и результатов комплексного анализа при решении различных задач.
2.	ПК-1	способен решать актуальные и важные задачи фундаментальной и прикладной математики	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Различные формы представления комплексных чисел, определения и свойства операций над ними, их геометрическую интерпретацию, основные понятия топологии комплексной плоскости.</li> <li>• Эквивалентные определения поня-</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• использовать аналитическое представление и геометрические свойства отображений, осуществляемых элементарными функциями комплексного переменного, для построения конформных отображений и отыскания образа области при заданном конформном отображении;</li> <li>• осуществлять элементарные геометрические</li> </ul>	навыками корректной и адекватной постановки задач используя методы комплексного анализа

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
			<p>тия голоморфности функции комплексного переменного.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Понятие конформного отображения, геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции.</li> <li>• Определения и геометрические свойства элементарных функций комплексного переменного.</li> <li>• Интегральную теорему Коши для односвязной и многосвязной области, интегральную формулу Коши.</li> <li>• Определение и свойства интеграла типа Коши.</li> <li>• Свойства степенных рядов и равномерно сходящихся рядов голоморфных функций.</li> <li>• Внутреннюю теорему единственности и принцип максимума модуля для голоморфных функций.</li> <li>• Разные способы классификации изолированных особых точек голоморфных функций.</li> <li>• Характер поведения функции в окрестности существенно особой</li> </ul>	<p>преобразования на плоскости с использованием дробно-линейных отображений;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• вычислять криволинейные интегралы от функций комплексного переменного;</li> <li>• восстанавливать голоморфную функцию по ее вещественной или мнимой части;</li> <li>• находить коэффициенты разложения в ряд Тэйлора голоморфных функций и радиус сходимости степенного ряда;</li> <li>• находить коэффициенты разложения в ряд Лорана функций, голоморфных в кольце, и, в частности, в окрестности изолированной особой точки (м.б. бесконечно удаленной);</li> <li>• использовать приемы разложения в ряд Лорана голоморфных функций для разложения в ряд Фурье функций вещественного переменного;</li> <li>• определять разными способами характер изолированной особой точки голоморфной функции, определять порядок нуля и порядок полюса;</li> <li>• разными методами вычислять вычеты голоморфных функций в изолированных особых точках;</li> <li>• находить значения криволинейных интегралов с помощью вычетов;</li> <li>• вычислять некоторые типы определенных (в том числе несобственных) интегралов с помощью вы-</li> </ul>	

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
			<p>точки (теорему Сохоцкого – Вейерштрасса).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Понятие вычета и способы применения вычетов для вычисления криволинейных и несобственных интегралов.</li> <li>• Принцип аргумента и теорему Руше.</li> <li>• Понятие аналитического продолжения по цепи областей и вдоль кривой, понятие полной аналитической функции и ветви аналитической функции, понятие римановой поверхности полной аналитической функции.</li> <li>• Теорема о монодромии.</li> <li>• Принцип симметрии Римана – Шварца.</li> <li>• Геометрические принципы конформных отображений (принцип сохранения области, принцип взаимно-однозначного соответствия, теорема Римана, принцип граничного соответствия).</li> <li>• Понятие гармонической функции, свойства гармонических функций, интегралы Пуассона и Шварца, при-</li> </ul>	<p>четов;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• применять принцип аргумента и теорему Руше для определения соотношения между нулями и полюсами функции в области;</li> <li>• применять принцип симметрии для построения конформных отображений;</li> <li>• определять однозначные ветви многозначной функции и строить риманову поверхность многозначной функции.</li> <li>• применять конформные отображения для решения задачи Дирихле.</li> </ul>	

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
			менение конформных отображений для решения задачи Дирихле.		

## 2. Структура и содержание дисциплины

### 2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц (216 часов, из них – 146,5 ч. контактной работы: лекционных 68 ч., лабораторных 68 ч., 10 ч. КСР, 0,5 ч. ИКР; 33,8 ч. СРС; 35,7 ч. контроля).

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры (часы)		
		4	5	
<b>Контактная работа, в том числе:</b>	<b>146,5</b>	<b>76,2</b>	<b>70,3</b>	
<b>Аудиторные занятия (всего):</b>	<b>136</b>	<b>68</b>	<b>68</b>	
Занятия лекционного типа	68	34	34	
Лабораторные занятия	68	34	34	
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)	-	-	-	
<b>Иная контактная работа:</b>	<b>10,5</b>	<b>8,2</b>	<b>2,3</b>	
Контроль самостоятельной работы (КСР)	10	8	2	
Промежуточная аттестация (ИКР)	0,5	0,2	0,3	
<b>Самостоятельная работа, в том числе:</b>	<b>33,8</b>	<b>31,8</b>	<b>2</b>	
Подготовка домашнего задания	22	20	2	
Подготовка к текущему контролю	11,8	11,8	-	
<b>Контроль:</b>	<b>35,7</b>	<b>-</b>	<b>35,7</b>	
Подготовка к экзамену	35,7	-	35,7	
<b>Общая трудоёмкость</b>	<b>час.</b>	<b>216</b>	<b>108</b>	<b>108</b>
	<b>в том числе контактная работа</b>	<b>146,5</b>	<b>76,2</b>	<b>70,3</b>
	<b>зач. ед</b>	<b>6</b>	<b>3</b>	<b>3</b>

### 2.2 Структура дисциплины:

Распределение видов учебной работы и их трудоёмкости по разделам дисциплины. Разделы дисциплины, изучаемые в IV семестре:

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов			
		Всего	Аудиторная работа		СРС
			Л	Лаб	
1	2	3	4	5	6
1	Комплексные числа и действия над ними. Геометрия и топология комплексной	34	8	10	6

	плоскости.				
2	Комплексная дифференцируемость. Голоморфные функции и конформные отображения	20	8	8	4
3	Теория интеграла Коши	33,8	10	12	11,8
4	Степенные ряды и ряды голоморфных функций	22	8	4	10
	<b>Итого:</b>		34	34	31,8

Практические занятия не предусмотрены.

Разделы дисциплины, изучаемые в V семестре:

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов			
		Всего	Аудиторная работа		СРС
			Л	Лаб	
1	2	3	4	5	6
1	Ряды Лорана. Изолированные особые точки голоморфных функций.	16	8	8	-
2	Теория вычетов	26	10	16	-
3	Аналитическое продолжение	10	8	2	-
4	Геометрические принципы конформных отображений	18	8	8	2
	<b>Итого:</b>		34	34	2

Практические занятия не предусмотрены.

### 2.3 Содержание разделов дисциплины:

#### 2.3.1 Занятия лекционного типа

№ п/п	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	Комплексные числа и действия над ними. Геометрия и топология комплексной плоскости.	Введение. Поле комплексных чисел, операции над комплексными числами (к.ч.). Тригонометрическая форма представления к.ч.. Извлечение корня $n$ -степени из к.ч. Геометрия и топология комплексной плоскости. Стереографическая проекция и ее свойства; сфера Римана, расширенная комплексная плоскость. Открытые, замкнутые, компактные множества на $\mathbb{C}$ и $\hat{\mathbb{C}}$ , лемма Гейне-Бореля-Лебега. Понятие связного и линейного связного множества, односвязные и многосвязные области. Кривые на комплексной плоскости.	Коллоквиум
2	Комплексная дифференцируемость. Голоморфные функции и конформные отображения.	Предел последовательности к.ч., сходимость числовых рядов. Функции комплексного переменного: предел, непрерывность, однолиственность. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. $R$ -дифференцируемые и $C$ -дифференцируемые функции. Сопряженные гармонические	Коллоквиум

		<p>функции. Достаточное условие локальной однолиственности голоморфной функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции. Понятие конформного отображения. Критерий конформности отображения. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Степенные функции. Функция <math>\sqrt[n]{z}</math> и ее риманова поверхность. Отображения двуугольников. Функция Жуковского. Показательная функция. Функция <math>\ln Z</math> и ее риманова поверхность. Общая степенная функция. Выделение однозначной ветви многозначной функции. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Дробно-линейные отображения. Непрерывность, однолиственность и конформность дробно-линейных отображений. Круговое свойство.</p> <p>Понятие инверсии, свойство сохранения симметричных точек, свойство сохранения сложного (ангармонического) отношения. Дробно-линейные изоморфизмы и автоморфизмы (общий вид дробно-линейного отображения круга на себя и верхней полуплоскости на круг). Гидродинамический смысл комплексной дифференцируемости, гидродинамическое истолкование гармонических и аналитических функций. Примеры приложений.</p>	
3	Теория интеграла Коши	<p>Определение и свойства криволинейного интеграла от функций комплексного переменного. Лемма Гурса. Интегральная теорема Коши для односвязных и многосвязных областей. Первообразная функция, формула Ньютона-Лейбница, другое определение логарифмической функции. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем значении. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций, формулы Коши для производных. Теорема Морера. Принцип максимума модуля.</p>	Коллоквиум
4	Степенные ряды и ряды голоморфных функций	<p>Последовательности и ряды голоморфных функций в области, 1-я и 2-я теоремы Вейерштрасса. Степенные ряды, теорема Абеля, радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Ряды Тейлора. Теорема Тейлора, единственность разложения голоморфной функции в степенной ряд. Неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда и теорема Лиувилля. Нули голоморфной функции. Внутренняя теорема единственности для голо-</p>	Коллоквиум

		морфных функций. Ряд Лорана, область его сходимости. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана (теорема Лорана), единственность разложения). Формулы и неравенства Коши для коэффициентов. Изолированные особые точки однозначного характера; классификация изолированных особых точек однозначного характера по поведению функции и ряду Лорана; полюс, порядок полюса; существенная особая точка, теорема Сохоцкого-Вейерштрасса, понятие о теореме Пикара; бесконечно удаленная точка как особая. Целые функции, их порядок и тип; мероморфные функции, функции, мероморфные в расширенной плоскости. Понятие о теореме Миттаг-Лефлера.	
5	Теория вычетов	Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Приемы вычисления вычетов. Теорема о полной сумме вычетов. Применение вычетов к вычислению определенных и несобственных интегралов. Лемма Жордана. Интегралы в смысле главного значения. Логарифмические вычеты в нулях и полюсах. Принцип аргумента. Теорема Руше и основная теорема алгебры. Теорема Гурвица. Коллоквиум.	Коллоквиум
6	Аналитическое продолжение	Аналитический элемент, аналитическое продолжение по цепи областей. Канонический аналитический элемент, аналитическое продолжение по кривой. Понятие полной аналитической функции, ветвь полной аналитической функции, теорема о монодромии (формулировка). Риманова поверхность полной аналитической функции и ее особые точки. Принцип непрерывности. Принцип симметрии Римана – Шварца. Построение конформных отображений с применением принципа симметрии.	Рефераты по теме, обсуждение на практических занятиях.
7	Геометрические принципы конформных отображений	Отображения посредством голоморфных функций: принцип открытости и принцип области; теорема о локальном обращении; однолистные функции, критерий локальной однолистности и критерий конформности в точке, достаточное условие однолистности (принцип взаимнооднозначного соответствия). Конформно эквивалентные области на плоскости. Теорема Римана (формулировка). Понятие о соответствии границ при конформном отображении. Отображение верхней полуплоскости на многоугольник. Формула Кристоффеля-Шварца. Свойства гармонических функций: бесконечная диф-	Проверка домашних заданий

		<p>ференцируемость, теорема о среднем, теорема единственности и принцип максимума-минимума; инвариантность гармоничности при голоморфной замене переменных; теорема Лиувилля и теорема Харнака об устранимой особой точке; интегралы Пуассона и Шварца; разложение гармонических функций в ряды, связь с тригонометрическими рядами; задача Дирихле, применение конформных отображений для ее решения.</p>	
--	--	--	--

### 2.3.2 Лабораторные занятия

№	Наименование раздела	Наименование лабораторных работ	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Комплексные числа и действия над ними. Геометрия и топология комплексной плоскости.	Операции над комплексными числами. Геометрия комплексной плоскости. Кривые на комплексной плоскости. Неравенства	Решение задач на практических занятиях. Проверка домашних заданий, контрольная работа
2.	Комплексная дифференцируемость. Голоморфные функции и конформные отображения.	Элементарные функции комплексного переменного и их свойства. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции. Восстановление голоморфной функции по ее вещественной (или мнимой) части. Дробно-линейные функции. Построение конформных отображений.	Решение задач на практических занятиях. Проверка домашних заданий, контрольная работа
3.	Теория интеграла Коши	Интегрирование функций комплексного переменного. Применение интегральной теоремы Коши и формулы Коши.	Решение задач на практических занятиях. Проверка домашних заданий,
4.	Степенные ряды и ряды голоморфных функций	Разложение функций в ряды Тэйлора и Лорана. Классификация изолированных особых точек голоморфных функций	Решение задач на практических занятиях. Проверка домашних заданий,
5.	Теория вычетов	Вычисление вычетов. Применение теоремы Коши о вычетах и теоремы о полной сумме вычетов. Применение вычетов к вычислению определенных и несобственных интегралов	Решение задач на практических занятиях. Проверка домашних заданий, контрольная

			работа
6.	Аналитическое продолжение	Построение римановой поверхности полной аналитической функции	Рефераты по теме, обсуждение на практических занятиях.
7.	Геометрические принципы конформных отображений	Применение принципа аргумента. Теорема Руше. Применение принципа симметрии Римана – Шварца.	

Практические занятия не предусмотрены.

#### 2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

№	Наименование раздела	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
	Комплексные числа и действия над ними. Геометрия и топология комплексной плоскости.	1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. ( <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322</a> )
	Комплексная дифференцируемость. Голломорфные функции и конформные отображения.	Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 365 с. (см. <a href="https://e.lanbook.com/book/70732#book_name">https://e.lanbook.com/book/70732#book_name</a> )
	Теория интеграла Коши	Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 365 с. (см. <a href="https://e.lanbook.com/book/70732#book_name">https://e.lanbook.com/book/70732#book_name</a> )
	Степенные ряды и ряды голоморфных функций	Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 365 с. (см. <a href="https://e.lanbook.com/book/70732#book_name">https://e.lanbook.com/book/70732#book_name</a> )
	Теория вычетов	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. ( <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322</a> )
	Аналитическое продолжение	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. ( <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322</a> )
	Геометрические принципы конформных отображений	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. ( <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322</a> )

### 3. Образовательные технологии

Активные и интерактивные формы, лекции, практические занятия, блиц - опросы, контрольные работы, коллоквиумы, зачёты. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому практическому занятию. Зачёт выставляется после

отчёта по всем пройденным темам как минимум на «удовлетворительно».

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

В семестре студенты должны выполнить типовые индивидуальные задания (ИЗ) для самостоятельной работы по темам: «Дифференцирование и интегрирование функции комплексного переменного», «Теория вычетов и ее применение». Зачет выставляется после решения всех задач контрольных работ и выполнения самостоятельной работы. Итоговый контроль осуществляется в форме экзамена

Интерактивные методы включают: метод презентации, дискуссии, метод текущего контроля, метод тестирования и др.

#### **Вопросы, вынесенные на дискуссию**

1. Проверка существенности условий теорем (по усмотрению лектора).
2. Самостоятельное доказательство теорем с данной формулировкой и планом доказательства (по усмотрению лектора)
3. Составление плана и поиск решения задачи.
4. Решение задач различными способами.
5. Взаимная и самопроверка знаний и обсуждение полученных результатов.
6. Самостоятельное составление задач по указанной теме.

Интерактивные методы включают: метод презентации, дискуссии, метод текущего контроля, метод тестирования и др.

Студентам предлагаются несколько тем для подготовки рефератов по разделам, выделенным для самостоятельного изучения. Например: «Гидродинамический смысл комплексной дифференцируемости, гидродинамическое истолкование гармонических и аналитических функций»

#### **4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

Текущий контроль осуществляется преподавателем, ведущим практические занятия на основе выполнения студентами домашних заданий и лабораторного практикума. В течение каждого семестра проводятся контрольные работы и теоретический коллоквиум.

##### **4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущей аттестации**

#### **Типовые задачи для контрольных работ**

##### **Контрольная работа №1**

1. Найти действительную и мнимую часть комплексного числа  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$ .
2. Найти коэффициент растяжения  $k$  и угол поворота касательной  $\alpha$  для отображения  $f(z) = \frac{e^{iz} - i}{e^{iz} + i}$  в точке  $z_0 = \pi$ .
3. Найти образ области  $D = \{z : |z| > 1, \text{Im } z > 0\}$  при отображении дробно-линейной функцией  $w = f(z)$ , удовлетворяющей условиям  $f(0) = \infty, f(1+i) = 1, f(2i) = 0$ .

Или:

Найти функцию  $w = f(z)$ , конформно отображающую область  $D = \{z : \text{Im } z > 0\} \setminus [0; i]$  на верхнюю полуплоскость.

##### **Контрольная работа №2**

1. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z_0$  функцию по известной дей-

ствительной части  $U(x,y)$  и значению  $f(z_0)$ :

$$U(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 1, f(0) = 1.$$

2. Вычислить интеграл  $\int_L (iz^2 - 2z) dz$ , где кривая  $L$  – отрезок, соединяющий точки

$$z_1 = 0 \text{ и } z_2 = \frac{\pi i}{2}.$$

3. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $z=0$  функцию:

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2 + 4z - 5}$$

и найти радиус сходимости ряда.

### Контрольная работа №3

1. Разложить по степеням  $z-a$  в кольце  $D = \{z : |z-2| > 0\}$  функцию

$$f(z) = z^4(z-2)^{-2}, a = 2.$$

2. Вычислить интеграл, считая, что обход замкнутого контура происходит в положительном направлении:

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}.$$

3. Вычислить с помощью теории вычетов несобственный интеграл вида:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)},$$

или несобственный интеграл вида  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx.$

4. Вычислить с помощью теории вычетов следующий определенный интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3 \cos \varphi}.$$

### Перечень типовых контрольных вопросов и задач для самостоятельной работы.

#### Типовые задачи для самостоятельной работы

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа:

$$z = (1+i)^9 - (1-i)^2 + i.$$

2. Найти модуль и главное значение  $(0 \leq \arg z < 2\pi)$  аргумента комплексного числа:

$$z = -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}.$$

3. Найти модуль и главное значение аргумента  $(0 \leq \arg z < 2\pi)$  комплексного числа:

$$z = (1 - i\sqrt{3})^3$$

4. Найти все значения корней и построить их на комплексной плоскости:  $\sqrt[5]{32}$

5. Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих нера-

венству:

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1.$$

6. Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству:

$$\operatorname{Re}((1+i)z^2) > 0.$$

7. Представить в алгебраической форме значение функции комплексного переменного:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right).$$

8. Представить в алгебраической форме значение функции комплексного переменного:

$$\operatorname{Ln}(1 + \sqrt{3}i).$$

9. Представить в алгебраической форме значение функции комплексного переменного:

$$(1+i)^i.$$

10. Найти коэффициент растяжения  $k$  и угол поворота  $\alpha$  для отображения  $f(z)$  в точке

$$z_0=1-i, f(z) = \frac{(z-2i)^2}{z+i}.$$

11. Найти образ области

$$D = \left\{ z : |z| < 1; \operatorname{Im} z < 0; \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2} \right\}$$

при отображении дробно-линейной функцией  $W = f(z)$ , удовлетворяющей условиям:  $f(0) = -i$ ;  $f(-1) = \infty$ ;  $f(\infty) = i$ .

12. Найти функцию, конформно отображающую область

$$D = \left\{ |z-1| < 1; \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2} \right\}$$

на верхнюю полуплоскость..

13. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по кривой:

$$\int_{AB} (3z^2 + 2z) dz; AB = \{z = x + iy : y = x^2 : 0 \leq x \leq 1\}$$

где  $A=0, B=1+i$ .

14. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по кривой:

$$\int_{ABC} (z^2 + \cos z) dz, \text{ где}$$

$ABC$  – ломаная, соединяющая точки  $A(0), B(i), C(1)$ ;

15. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $z=0$  функцию  $f(z) = \frac{z+1}{z^2+4z-5}$  и найти радиус сходимости ряда.

16. Определить радиус сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k^2 (z+i)^{3k}.$$

17. Найти разложение функции

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(2-z)}$$

в ряд Лорана в кольце  $K = \{z: 1 < |z| < 2\}$ .

18. Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 - 1)(z^2 + 1)^2}$$

в расширенной комплексной плоскости и выяснить их характер.

19. Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{1}{e^z + 1}$$

в расширенной комплексной плоскости и выяснить их характер.

20. Разложить по степеням  $z-a$  в кольце  $D = \{z: |z-2| > 0\}$  функцию  $f(z) = z^4(z-2)^{-2}, a = 2$ .

21. Вычислить интеграл, считая, что обход замкнутого контура происходит в положительном направлении:

1)  $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$ .

2)  $\int_{|z|=3} \frac{z-1}{z^2+4} dz$

3)  $\int_{|z-i|=1} \frac{e^{\frac{\pi}{2}z}}{(z^2+1)^2} dz$

4)  $\int_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z^4-1)(z+2)}$ .

22. Вычислить с помощью теории вычетов несобственный интеграл:

1)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$ ,

2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$ .

23. Вычислить с помощью теории вычетов следующий определенный интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3 \cos \varphi}$$

## Вопросы к коллоквиуму

### I. Определения и формулировки теорем.

1. Функция, дифференцируемая в смысле комплексного анализа, и функция, голоморфная в точке.
2. Условия Коши-Римана

3. Геометрический смысл модуля и аргумента производной
4. Понятие конформного отображения, достаточное условие конформности.
5. Теорема Коши для односвязной области.
6. Теорема Коши для многосвязной области.
7. Интегральная формула Коши.
8. Интеграл типа Коши.
9. Определение гармонической функции.
10. Определение инверсии.
11. Теорема о среднем
12. Теорема Морера.
13. Принцип максимума модуля.
14. Первая теорема Вейерштрасса.
15. Вторая теорема Вейерштрасса
16. Теорема Абеля
17. Формула Коши Адамара
18. Внутренняя теорема единственности
19. Классификация изолированных особых точек
20. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса
21. Определение вычета в конечной изолированной особой точке и в  $\infty$ .

## ***II. Доказательства утверждений***

1. Круговое свойство дробно-линейных отображений.
2. Свойство сохранения симметричных точек для дробно-линейных отображений.
3. Теорема Коши для односвязной области (доказательство Э.Гурса).
4. Теорема о существовании первообразной.
5. Интегральная формула Коши.
6. Теорема о среднем.
7. Дифференцируемость интеграла типа Коши.
8. Теорема Морера.
9. Принцип максимума модуля.
10. Теорема Абеля.
11. Теорема Тейлора.
12. Внутренняя теорема единственности
13. Неравенства Коши и теорема Лиувилля.
14. Теорема Лорана.
15. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса
16. Выражение вычета через коэффициент разложения в ряд Лоран в конечной точке и в бесконечности.
17. Теорема Коши о вычетах.
18. Теорема о полной сумме вычетов.
19. Лемма Жордана.

### **4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации**

Итоговый контроль осуществляется в форме экзамена.

Контрольные проводятся в письменной форме, либо в форме тестирования, коллоквиумы – в письменной и устной форме. Контрольные и коллоквиумы оцениваются по пятибалльной системе. Экзамены оцениваются по системе: неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично. На лабораторных занятиях контроль осуществляется при ответе у доски и при проверке домашних заданий.

## **Вопросы к экзамену**

1. Комплексные числа и действия над ними. Тригонометрическая и показательная форма представления комплексных чисел. Формула Муавра. Извлечение  $\sqrt[n]{Z}$ .
2. Расширенная комплексная плоскость. Стереографическая проекция и ее свойства.
3. Топология комплексной плоскости. Понятие открытого, замкнутого, связного множества. Область, порядок связности.
4. Пути и кривые. Предел и непрерывность функций комплексного переменного.
5. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.
6. Функции, дифференцируемые в смысле вещественного и комплексного анализа. Формальные производные. Понятие голоморфной функции.
7. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.
8. Понятие конформного отображения. Достаточный признак конформности отображения.
9. Гармонические функции, восстановление голоморфной функции по ее вещественной части.
10. Дробно-линейные отображения, их конформность в  $\mathbb{C}$  и круговое свойство.
11. Понятие инверсии, ее свойства. Свойство сохранения симметричных точек при дробно-линейных отображениях.
12. Построение дробно-линейного отображения по заданному соответствию трех пар точек, свойство сохранения сложного (ангармонического) отношения.
13. Дробно-линейные изоморфизмы верхней полуплоскости на единичный круг и автоморфизмы единичного круга.
14. Свойства функции  $Z^n$ .
15. Функция Жуковского.
16. Показательная функция.
17. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства.
18. Интегральная теорема Коши для односвязной области (доказательство с помощью формулы Грина).
19. Лемма Гурса.
20. Интегральная теорема Коши для односвязной области (доказательство Э. Гурса).
21. Интегральная теорема Коши для многосвязной области.
22. Теорема о существовании первообразной.
23. Интегральная формула Коши и теорема о среднем.
24. Интеграл типа Коши.
25. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций, интегральная формула Коши для производных, теорема Морера.
26. Принцип максимума модуля.
27. Сходимость и равномерная сходимость функциональных рядов. Свойства равномерно сходящихся рядов, признак Вейерштрасса.
28. Первая теорема Вейерштрасса.
29. Вторая теорема Вейерштрасса.
30. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда.
31. Признак Коши сходимости числового ряда. Формула Коши – Адамара.
32. Теорема Тэйлора.
33. Неравенства Коши и теорема Лиувилля.
34. Внутренняя теорема единственности для голоморфных функций.
35. Нули голоморфной функции.
36. Ряд Лорана. Теорема Лорана.
37. Теорема об единственности разложения в ряд Лорана, неравенства Коши для коэффициентов.
38. Классификация изолированных особых точек, критерий устранимости особой точки.
39. Полюсы голоморфной функции, порядок полюса, связь между нулями и полюсами.
40. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса.

41. Целые и мероморфные функции. Представление мероморфной функции, имеющей конечное число полюсов.
42. Вычеты. Выражение вычета через коэффициент разложения в ряд Лорана. Вычисление вычета в случае полюсов разной кратности.
43. Теорема Коши о вычетах.
44. Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов.
45. Лемма Жордана и ее применение.
46. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов.
47. Несобственный интеграл в смысле главного значения. Вычисления в случае простых полюсов. Пример.
48. Логарифмический вычет в нулях и полюсах. Теорема о полной сумме логарифмических вычетов функции, мероморфной в области.
49. Принцип аргумента.
50. Теорема Руше и основная теорема алгебры.
51. Принцип сохранения области.
52. Достаточное условие локальной однолиственности и необходимое условие однолиственности голоморфной функции.
53. Аналитический элемент, аналитическое продолжение по цепи областей. Канонический аналитический элемент, аналитическое продолжение по кривой.
54. Понятие полной аналитической функции, ветвь полной аналитической функции, теорема о монодромии (формулировка). Риманова поверхность полной аналитической функции.
55. Принцип непрерывности.
56. Принцип симметрии Римана-Шварца.
57. Конформно эквивалентные области на плоскости. Теорема Римана (формулировка). Соответствие границ при конформном отображении.
58. Принцип взаимно-однозначного соответствия.
59. Отображение верхней полуплоскости на многоугольник. Формула Кристоффеля-Шварца.

## **5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

### **5.1 Основная литература:**

1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2009, 432 с. (см. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_cid=25&pl1\\_id=322](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=322))
2. Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 365 с. (см. [https://e.lanbook.com/book/70732#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/70732#book_name) )

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах «Лань» и «Юрайт».

### **5.2 Дополнительная литература**

1. Малыхин, Константин Владимирович (КубГУ).  
Избранные главы комплексного анализа [Текст] : учебное пособие / К. В. Малыхин, Н. М. Черных ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Кубанский гос. ун-т. -

Краснодар : [Кубанский государственный университет], 2014. - 122 с. : ил. - Библиогр.: с. 121. (20 шт.)

2. Кытманов, А.М. Интегральные представления и их приложения в многомерном комплексном анализе : монография / А.М. Кытманов, С.Г. Мысливец ; Министерство образования и науки РФ, Сибирский Федеральный университет. - Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2010. - 390 с. - ISBN 978-5-7638-1990-8 ; То же [Электронный ресурс]. -

URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=229174>

### 5.3. Периодические издания:

Не используются при изучении курса.

### 6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Электронная библиотечная система издательства "Лань" – <http://e.lanbook.com/>
2. Электронная библиотечная система "Юрайт" – <http://www.biblio-online.ru/>

### 7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Самостоятельная работа студентов заключается в еженедельном выполнении домашних заданий, написании контрольных работ (две контрольные работы в семестр) и участии в коллоквиумах (один коллоквиум в семестр). Методические рекомендации приведены в Приложениях 1 и 2 к рабочей программе.

### 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

Для облегчения освоения курса и подготовки к экзаменам с участием студентов ведется разработка онтологии предметной области «Теория функций комплексного переменного», использующая технологию онтологического инжиниринга на базе программного редактора онтологий Protege, а также разработка концептуальных карт отдельных разделов предметной области на базе программной среды StarTools (см. Приложение 2 к Рабочей программе).

### 9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) и оснащенность
1.	Лекционные занятия	Лекционная аудитория, специально оборудованная мультимедийными демонстрационными комплексами, учебной мебелью
2.	Лабораторные занятия	Помещение для проведения лабораторных занятий оснащенное учебной мебелью, доской маркером или мелом
3.	Групповые (индивидуальные) консультации	Помещение для проведения групповых (индивидуальных) консультаций, учебной мебелью, доской маркером или мелом

4.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Помещение для проведения текущей и промежуточной аттестации, оснащенное учебной мебелью.
5.	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета

**Рецензия**  
на рабочую программу дисциплины  
**«Комплексный анализ»**  
по направлению подготовки 01.03.01 Математика,  
очной формы обучения.

Составитель рабочей программы:  
доцент каф. теории функций ФГБОУ ВО «КубГУ» Мавроди Н.Н.

Рабочая программа полностью соответствует требованиям ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.01 Математика (уровень бакалавриата).

Все основные разделы программы нашли свое отражение в перечне представленных в программе необходимых знаний и компетенций.

Распределение времени, отводимого на изучение различных разделов курса, включая самостоятельную работу, соответствует их трудоемкости.

Содержащийся перечень и количество практических занятий достаточен для формирования уровня подготовки, определенного требованиями ФГОС.

Перечень тем и разделов, которые должны изучить слушатели, а также основные требования к уровню подготовки слушателей объема знаний и умений, которым они должны обладать по каждой из перечисленных тем.

Информация о видах и объеме учебной работы содержит тематику лекционных занятий и лабораторных работ, призванных сформировать у студентов базовые знания и формирование основных навыков по комплексному анализу, необходимых для решения задач, возникающих в практической деятельности.

Самостоятельные задания развивают знания, умения и навыки, полученные в результате изучения предмета.

Рабочая программа дисциплины позволяет усвоить связи между различными разделами и теоремами комплексного анализа, а также способствует развитию и углублению межпредметных связей между изучением данного курса и прохождением других дисциплин естественнонаучного цикла.

Рабочая программа дисциплины «Комплексный анализ» способствует приобретению и развитию умений и навыков для решения профессиональных задач методами комплексного анализа, формированию компетентного специалиста.

Рецензент,  
Гусаков В.А.,  
канд. физ. – мат. наук,  
директор ООО «Просвещение-Юг».

