

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ:  
Проректор по учебной работе,  
качеству образования – первый  
проректор

  
\* Т.А. Хагуров  
подпись

«30» мая 2022 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

**Б1.В.ДВ.05.02 Дополнительные главы теории функций комплексного  
переменного**

Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальная математика и механика

Направленность (профиль): Фундаментальная математика и её приложения

Форма обучения: очная

Квалификация: Математик. Механик. Преподаватель

Краснодар 2022

Рабочая программа дисциплины Б1.В.ДВ.05.02 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ  
ГЛАВЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО  
составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным  
стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки  
01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Программу составил(и):  
Гаврилюк М.Н., доцент, к.ф.-м.н., доцент



---

Рабочая программа дисциплины Б1.В.ДВ.05.02 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ  
ГЛАВЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО  
утверждена на заседании кафедры ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ  
протокол № 9 «12» апреля 2022 г.  
Заведующий кафедрой Голуб М. В.



---

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета  
математики и компьютерных наук  
протокол № 5 «5» мая 2022 г.  
Председатель УМК факультета/института Шмалько С. П.



---

Рецензенты:

Фоменко Сергей Иванович, канд. физ. - мат. наук,  
старший научный сотрудник лаборатории волновых процессов

Лепетухин Михаил Викторович,  
председатель правления КПК «Кубанский капитал»

# 1 Цели и задачи изучения дисциплины

## 1.1 Цель освоения дисциплины

Освоение методов общей теории меры и теории интегрирования по мере.

## 1.2 Задачи дисциплины

Помочь студенту овладеть основами аксиоматической теории множеств и теории трансфинитных чисел, ознакомить с методами конструктивной теории меры Бореля, дать представление о пополнении меры, ознакомить с внутренними глубинными связями, объединяющими теорию меры Жордана, Бореля, Лебега, Хаусдорфа и дать представление об основных свойствах этих мер, ознакомить с классификацией общих мер, ознакомить с процессами построения измеримых множеств, установить критерии регулярности борелевских мер, ознакомить с понятием размерности Хаусдорфа и её теоретико-множественными и топологическими свойствами, а также её применениями в теории фракталов, ознакомить с теорией измеримых функций, и дать введение в общую теорию интегрирования по мере Бореля, Лебега, Лебега – Стильеса, ознакомить с классами функций с ограниченным изменением, абсолютно непрерывными функциями, ознакомить с классификацией мер, порождаемых монотонными функциями, ознакомить с классом функций, обладающих обобщёнными производными.

## 1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дополнительные главы теории функций комплексного переменного» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1 «Дисциплины (модули)» учебного плана Б1.В.ДВ.05.02.

## 1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций:

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
ПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики	Знает теоретические основы оптимизации и исследования операций и содержательную сторону задач, возникающих в практике.
	Умеет использовать полученные знания для осуществления анализа управленческих ситуаций и идентифицировать проблему.
	Владет навыками принятия решений в современных условиях хозяйствования.
ПК-5. Способен находить и извлекать актуальную научно-техническую информацию из электронных библиотек, реферативных журналов и т.п.	Знает формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства.
	Умеет определять класс задач, для которых применим тот или иной аппарат, выбирать метод решения конкретного типа задач.
	Владет аппаратом математического анализа, методами применения этого аппарата к решению задач.

Курс «Дополнительные главы теории функций комплексного переменного» входит в число специальных, дисциплин, закладывающих базу знаний специалиста — математика в области теории функций. От изучающего настоящий курс требуется глубокое знание университетского курса анализа

## 2. Структура и содержание дисциплины

### 2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 2 зачетных единиц (72 часа), их распределение по видам работ представлено в таблице

Вид учебной работы		Всего часов	Семестры (часы)
			9
<b>Контактная работа, в том числе:</b>		<b>46,2</b>	<b>46,2</b>
<b>Аудиторные занятия (всего):</b>		<b>44</b>	<b>44</b>
Занятия лекционного типа		22	22
Лабораторные занятия		22	22
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)		-	-
		-	-
<b>Иная контактная работа:</b>		<b>2,2</b>	<b>2,2</b>
Контроль самостоятельной работы (КСР)		2	2
Промежуточная аттестация (ИКР)		0,2	0,2
<b>Самостоятельная работа, в том числе:</b>		<b>25,8</b>	<b>25,8</b>
Курсовая работа		-	-
Проработка учебного (теоретического) материала		10	10
Выполнение индивидуальных заданий (подготовка сообщений, презентаций )		5	5
Реферат		5,8	5,8
Подготовка к текущему контролю		5	5
<b>Контроль:</b>		<b>-</b>	<b>-</b>
Подготовка к зачету		-	-
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>Час.</b>	<b>72</b>	<b>72</b>
	<b>В том числе контактная работа</b>	<b>46,2</b>	<b>46,2</b>
	<b>Зач. ед</b>	<b>2</b>	<b>2</b>

### 2.2 Содержание дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы (темы) дисциплины, изучаемые в 9 семестре (*очная форма обучения*)

№	Наименование разделов (тем)	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	
1.	Общая теория меры.	24	4		10	10
2.	Классы измеримых функций	24	8		6	10
3.	Теория интегрирования по мере	21,8	10		6	5,8
	<i>ИТОГО по разделам дисциплины</i>		22		22	25,8
	Контроль самостоятельной работы (КСР)					
	Промежуточная аттестация (ИКР)					
	Подготовка к текущему контролю					
	Общая трудоемкость по дисциплине					

Примечание: Л – лекции, ПЗ – практические занятия / семинары, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента

### 2.3 Содержание разделов дисциплины:

#### 2.3.1 Занятия лекционного типа

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля

1	2	3	4
1.	Общая теория меры	<p>Множества, измеримые по Жордану.</p> <p>Необходимые и достаточные условия измеримости множеств по Жордану. Характеристические свойства системы <math>\omega</math> натуральных чисел и аксиомы Пеано системы <math>\mathbb{N}</math> натуральных чисел .</p> <p>Упорядоченные и вполне упорядоченные множества. Теорема о сравнении трансфинитов.</p> <p>Теорема С.Н. Бернштейна. Борелевские множества. Мера Бореля на системе борелевских множеств. Множество Кантора , его мощность .</p> <p>Теорема о существовании множеств , не измеримых по Борелю. Полные меры, пополнение меры Бореля. Множество Кантора , его мощность .</p> <p>Полукольца , кольца, сигма- кольца. Теорема о существовании минимального сигма кольца для заданной системы множеств. Внешняя мера Лебега множеств в конечно - мерных евклидовых пространствах, её счётная полуаддитивность.</p> <p>Класс измеримых по Лебегу множеств. Сравнение конструкций Жордана и Лебега построения системы измеримых множеств. Конструкция Каратеодори построения системы <math>\mu</math>-измеримых множеств.</p>	0
2.	Классы измеримых функций	<p>Общее определение меры. Регулярные меры.</p> <p>Регулярные меры Бореля. Мера Радона. Примеры мер.</p> <p>Критерий Каратеодори наличия борелевского свойства у меры.</p> <p>Мера Хаусдорфа. Теорема о регулярности меры Хаусдорфа. Элементарные свойства меры Хаусдорфа. Понятие размерности Хаусдорфа, её свойства. Теорема о непрерывности меры на кольце (прямая и обратная).</p> <p>Измеримые функции. Необходимое и достаточное условие измеримости функции по Борелю.</p> <p>Теорема Егорова о почти равномерной сходимости последовательности измеримых функций. Связь со сходимостью почти всюду.</p> <p>Теорема Н.Н. Лузина о связи между измеримыми и непрерывными функциями. Монотонные функции и меры Лебега - Стильеса.</p> <p>Функции с ограниченным изменением и их свойства. Сходимость измеримых функций по мере. Связь со сходимостью почти всюду.</p> <p>Лемма Рисса о невидимых справа (слева) точках.</p> <p>Теорема о дифференцируемости монотонной функции.</p>	0
3.	Теория интегрирования по мере	<p>Интеграл Лебега. Его свойства.</p> <p>Теорема об интегрируемости монотонной функции.</p> <p>Теорема о точках Лебега.</p> <p>Абсолютно непрерывные функции. Теорема Лебега о производной абсолютно непрерывной функции.</p> <p>Понятие обобщённой производной локально интегрируемой функции. Описание класса функций с обобщёнными производными.</p>	0

### 2.3.2 Занятия семинарского типа

Не предусмотрены.

### 2.3.3 Лабораторные занятия

№	Наименование раздела	Наименование лабораторных работ	Форма Текущего контроля
1	2	3	4
1.	Общая теория меры	Примеры измеримых по Жордану множеств. Борелевские множества. Полукольца, кольца, сигма-кольца. Теорема о существовании минимального сигма кольца для заданной системы множеств. Измеримость по Лебегу.	Проверка домашних заданий, ответы у доски
2.	Классы измеримых функций	Регулярные меры. Регулярные меры Бореля. Мера Радона. Мера Хаусдорфа. Примеры мер. Понятие размерности Хаусдорфа, её свойства. Измеримые функции. Необходимое и достаточное условие измеримости функции по Борелю. Сходимость измеримых функций по мере. Связь со сходимостью почти всюду.	Проверка домашних заданий, ответы у доски
3.	Теория интегрирования по мере	Интеграл Лебега. Его свойства. Теорема об интегрируемости монотонной функции. Описание класса функций с обобщёнными производными	Проверка домашних заданий, ответы у доски

### 2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Не предусмотрены

### 2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	Общая теория меры	Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Физматлит, 2006
2	Классы измеримых функций	Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Физматлит, 2006
3	Теория интегрирования по мере	Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Физматлит, 2006

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла,
- в печатной форме на языке Брайля.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

### 3. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины

#### (модуля)

В ходе изучения дисциплины предусмотрено использование следующих образовательных технологий: лекции, практические занятия, подготовка письменных аналитических работ, самостоятельная работа студентов.

Компетентностный подход в рамках преподавания дисциплины реализуется в использовании интерактивных технологий и активных методов (проектных методик, разбора конкретных ситуаций) в сочетании с внеаудиторной работой.

Информационные технологии, применяемые при изучении дисциплины: использование информационных ресурсов, доступных в информационно-телекоммуникационной сети Интернет.

Адаптивные образовательные технологии, применяемые при изучении дисциплины – для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

#### **4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

Оценочные средства включает контрольные материалы для проведения **текущего контроля** в форме *тестовых заданий, разноуровневых заданий, отчетов по индивидуальным и расчетно-графическим заданиям* и **промежуточной аттестации** в форме вопросов и заданий к зачету.

**Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы**

##### **Фонд оценочных средств для проведения текущей аттестации**

1. Пусть  $\varphi$  – неотрицательная аддитивная функция, заданная на полукольце множеств  $\mathcal{P}$ . Доказать, что  $\varphi$  можно и притом единственным образом, продолжить до аддитивной функции на кольце  $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ , порождённом на  $\mathcal{P}$ . Если функция  $\varphi$  была  $\sigma$ -аддитивна на  $\mathcal{P}$ , то продолженная на  $\mathcal{R}(\mathcal{P})$  функция будет  $\sigma$ -аддитивной, т.е. будет мерой, если  $\varphi(\emptyset) = 0$ .

2. Доказать, что все ограниченные борелевские множества измеримы.

3. Доказать, что каждое множество положительной меры имеет мощность континуума.

4. Доказать, что для любых множеств  $A, B \subset \mathbb{R}$  справедливо следующее включение:

$$\partial(A \cup B) \subset \partial(A) \cup \partial(B)$$

$\partial X$  – граница множества  $X$ .

5. Посчитать меру Хаусдорфа канторова множества.

#### **Вопросы для подготовки к зачёту**

1. Определение измеримых по Жордану множеств. Необходимые и достаточные условия измеримости множеств по Жордану. Привести пример не измеримого по Жордану множества.

2. Построить в системе аксиом ZFC систему омега натуральных чисел.

Характеристические свойства системы омега натуральных чисел и аксиомы Пеано системы  $\mathbb{N}$  натуральных чисел.

3. Упорядоченные и вполне упорядоченные множества. Теорема о сравнении трансфинитов. Теорема С.Н. Бернштейна.

4. Система борелевских множеств. Построение системы борелевских множеств. Мощность системы борелевских множеств.

5. Мера Бореля на системе борелевских множеств. Множество Кантора, его мощность. Теорема о существовании множеств, не измеримых по Борелю. Полные меры,

пополнение меры Бореля.

6. Полукольца, кольца, сигма- кольца. Теорема о существовании минимального сигма кольца для заданной системы множеств.
7. Внешняя мера Лебега множеств в конечно - мерных евклидовых пространствах, её счётная полуаддитивность. Класс измеримых по Лебегу множеств. Сравнение конструкций Жордана и Лебега построения системы измеримых множеств. Конструкция Каратеодори построения системы мю- измеримых множеств.
8. Общее определение меры. Регулярные меры. Регулярные меры Бореля. Мера Радона. Примеры мер.
9. Критерий Каратеодори наличия борелевского свойства у меры.
10. Мера Хаусдорфа. Теорема о регулярности меры Хаусдорфа.
11. Элементарные свойства меры Хаусдорфа. Понятие размерности Хаусдорфа, её свойства.
12. Теорема о непрерывности меры на кольце (прямая и обратная).
13. Измеримые функции. Необходимое и достаточное условие измеримости функции по Борелю.
14. Теорема Егорова о почти равномерной сходимости последовательности измеримых функций. Связь со сходимостью почти всюду.
15. Теорема Н.Н. Лузина о связи между измеримыми и непрерывными функциями.
16. Монотонные функции и меры Лебега - Стильеса.
17. Функции с ограниченным изменением и их свойства.
18. Сходимость измеримых функций по мере. Связь со сходимостью почти всюду.
19. Лемма Рисса о невидимых справа (слева) точках.
20. Теорема о дифференцируемости монотонной функции.
21. Интеграл Лебега. Его свойства.
22. Теорема об интегрируемости монотонной функции.
23. Теорема о точках Лебега.
24. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Лебега о производной абсолютно непрерывной функции.
25. Понятие обобщённой производной локально интегрируемой функции. Описание класса функций с обобщёнными производными.

Пример экзаменационного билета.

1. Элементарные свойства меры Хаусдорфа. Понятие размерности Хаусдорфа.
2. В каких топологических пространствах, определённых на  $\mathbb{R}$ , система открытых множеств представляет собой кольцо.  
Чему равен предел последовательности  $\{1/n\}$  в таких пространствах?

## **5. Перечень учебной литературы, информационных ресурсов и технологий**

### **5.1. Учебная литература**

1. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2009. — 572 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2206>
2. Натансон, И. П. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебник / И. П. Натансон. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2008. – 560 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/284>
3. Геворкян, П.С. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебное пособие / П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2016. — 176 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/91142>
4. Миллер, Б.М. Теория случайных процессов в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Б.М. Миллер, А.Р. Панков. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2007.



## 5.2. Дополнительная литература

1. Малыхин, Константин Владимирович (КубГУ). Избранные главы комплексного анализа [Текст] : учебное пособие / К. В. Малыхин, Н. М. Черных ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Кубанский гос. ун-т. - Краснодар : [Кубанский государственный университет], 2014. - 122 с. : ил. - Библиогр.: с. 121. – ISBN 9785820910685 : 34.21. (20 шт.)
2. Пендин, Вадим Владимирович. Комплексный количественный анализ информации в инженерной геологии [Текст] : учебное пособие для студентов вузов / В. В. Пендин ; Рос. гос. геологоразведочный ун-т им. Серго Орджоникидзе (РГГРУ). - М. : Книжный дом "Университет", 2009. - 349 с. : ил.- Библиогр. : с. 324-349. - ISBN 9785982275165. (25 шт.)

## 5.3. Периодические издания:

Не предусмотрены.

## 5.4. Интернет-ресурсы, в том числе современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Электронная библиотечная система издательства "Лань" – <http://e.lanbook.com/>
2. Электронная библиотечная система "Юрайт" – <http://www.biblio-online.ru>

## 6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

– *Общие рекомендации по самостоятельной работе обучающихся.*

*Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.*

*Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:*

*Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 5 апреля 2017 года №301). Письмо Министерства образования Российской Федерации №14-55-99бн/15 от 27 ноября 2002 г. "Об активизации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений".*

*Положение о самостоятельной работе студентов (утверждено приказом № 272 КубГУ от 03 марта 2016 г.).*

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

## 7. Материально-техническое обеспечение по дисциплине (модулю)

Наименование специальных помещений	Оснащенность специальных помещений	Перечень лицензионного программного обеспечения
Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа	Мебель: учебная мебель Технические средства обучения: экран, проектор, компьютер	Microsoft Office
Учебные аудитории для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Мебель: учебная мебель Технические средства обучения: Компьютеры	Microsoft Office

Для самостоятельной работы обучающихся предусмотрены помещения, укомплектованные специализированной мебелью, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

Наименование помещений для самостоятельной работы обучающихся	Оснащенность помещений для самостоятельной работы обучающихся	Перечень лицензионного программного обеспечения
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (читальный зал Научной библиотеки)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (ИС 6, ИС 7)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	