

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Кафедра теории функций



ТВЕРЖДАЮ:

ректор по научной работе и  
инновациям

подпись

Шарафан М.В.

«  » мая 2022 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ФАКУЛЬТАТИВНОЙ  
ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**2.1.3.1(Ф) ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МЕРЫ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

Научная специальность: 01.01.01 Вещественный, комплексный и  
функциональный анализ

Форма обучения очная

Краснодар 2022

Рабочая программа дисциплины 2.1.3.1(Ф) Геометрическая теория меры и ее приложения составлена в соответствии с Федеральными государственными требованиями к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов, утвержденными приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 20 октября 2021 г. № 951.

Программу составил(и):  
Е.А. Щербаков, профессор,  
д-р физ.-мат. наук, доцент



Рабочая программа государственной итоговой аттестации утверждена на заседании кафедры теории функций протокол № 9 от «12» апреля 2022 г.  
Заведующий кафедрой Голуб М. В.



Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук протокол № 5 «5» мая 2022 г.  
Председатель УМК факультета/института Шмалько С. П.



## 1. Цель изучения дисциплины

Главная цель курса – освоение основных методов современной геометрической теории меры, составляющей основу современных вариационных методов.

## 2. Задачи дисциплины

1. Формирование знаний о логическом обосновании теории меры с помощью аксиоматической теории множеств.

1. Формирование знаний о взаимосвязи между различными мерами в многообразии мер и роли меры Бореля среди них.

2. Формирование знаний о теоремах покрытия, вопросах дифференцируемости мер и представлениях линейных непрерывных функционалов.

3. Формирование знаний о тонких свойствах функций.

4. Формирование знаний о мерах Хаусдорфа, размерностях Хаусдорфа, их свойствах.

5. Формирование знаний о структуре фракталов.

6. Формирование знаний о спрямляемых множествах

7. Формирование знаний о теории варифолдов, потоков и их применениях к решению экстремальных задач.

## 3. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры

Дисциплина «Геометрическая теория меры и её приложения» относится к Образовательному компоненту «Дисциплины (модули)» программы аспирантуры.

Программа рассчитана на аспирантов, прослушавших курсы: современные вопросы теории функций; вещественный, комплексный и функциональный анализ (кандидатский экзамен) и курс математического анализа, включающий дифференциальное и интегральное исчисление, а также курсы линейной алгебры.

Знания, полученные в этом курсе, необходимы для проведения научно-исследовательской работы и успешной сдачи государственной итоговой аттестации.

## 4. Требования к результатам освоения дисциплины

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся *специальных компетенций (СК)*

№ п.п.	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
1.	ПК-1: способность к системному мышлению и грамотному использованию основных принципов, концепций и методов вещественного, комплексного и функционального анализа	<b>Знать</b> основные понятия и гипотезы для предметной области и исследуемых моделей. В том числе: математические понятия дисциплины и формулировки всех утверждений и теорем; <b>Уметь</b> ориентироваться в современных методах и подходах, применяемых для изучения рассматриваемых процессов и явлений, грамотно использовать и развивать математическую теорию и физико-математические модели, лежащие в их основе. В том числе: применять знания на практике; <b>Владеть</b> навыками применения классических и современных методов анализа математических

№ п.п.	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
		моделей формализованных материальных объектов и процессов.
2	ПК-2: готовность к постановке профессиональных задач в области научно-исследовательской и практической деятельности, подбору, развитию и совершенствованию методов их решения на базе современных достижений в области вещественного, комплексного и функционального анализа	<p><b>Знать</b> нормативные документы для составления заявок, грантов, проектов НИР</p> <p>В том числе: основные положения аксиоматической теории Цермело-Френкеля;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-определения и геометрические свойства элементарных функций комплексного переменного;</li> <li>-определения спрямляемых множеств и теоремы о критериях спрямляемости. Элементы теории функций с ограниченным изменением;</li> <li>-определения и свойства различных интегралов, определяемых для суммируемых функций;</li> <li>-теоремы рекуррентности и трансфинитной рекуррентности;</li> <li>-теоремы о построении для заданной системы множеств минимального сигма кольца;</li> <li>-теоремы о структуре минимальных колец и монотонных классов;</li> <li>-теоремы о произведении мер;</li> <li>-теоремы Лузина и Егорова;</li> <li>-теоремы о связи между борелевскими и суслинскими множествами;</li> <li>-теоремы о дифференцируемости</li> </ul> <p><b>Уметь</b> использовать и совершенствовать методы и программное обеспечения для расчета исследуемых характеристик объектов и процессов на базе современных достижений в области механики, прикладной математики и ИТ</p> <p>В том числе: ориентироваться в постановках задач;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-понять поставленную задачу;</li> <li>-формулировать результат;</li> <li>-строго доказать утверждение;</li> <li>-на основе анализа увидеть и корректно сформулировать результат;</li> <li>-грамотно пользоваться языком предметной области.</li> </ul> <p><b>Владеть</b> методами планирования, подготовки, проведения НИР, анализа полученных данных, формулировки выводов и рекомендаций по профилю 01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ. В том числе: проблемно-задачной формой представления математических знаний.</p>

### 5. Структура дисциплины по очной форме обучения.

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 2 зач.ед. (72 часа), их распределение по видам работ представлено в таблице:

Вид учебной работы		Всего (часов)	Семестры (часы)
			4
<b>Контактная работа, в том числе:</b>		<b>18</b>	<b>18</b>
<b>аудиторная по видам учебных занятий (всего)</b>		<b>18</b>	<b>18</b>
<b>в том числе:</b>			
– лекции		-	-
– практические		18	18
– лабораторные		-	-
<b>Иная контактная работа:</b>			
Промежуточная аттестация			зачет
<b>Самостоятельная работа, в том числе:</b>		<b>54</b>	<b>54</b>
Проработка учебного (теоретического) материала		20	20
Выполнение индивидуальных заданий (подготовка сообщений, презентаций)		20	20
Реферат		4	4
Подготовка к текущему контролю		10	10
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>час.</b>	<b>72</b>	<b>72</b>
	<b>зач. ед</b>	<b>2</b>	<b>2</b>

## 6. Содержание дисциплины по очной форме обучения

По итогам изучаемой дисциплины аспиранты (обучающиеся) сдают зачет.

Дисциплина изучается на 2 курсе, в 4 семестре по учебному плану очной формы обучения.

№ п/п	Тема. Основные вопросы	Семестр	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа
1.	Теория множеств. Ординалы. Кардинальные числа. Мощность множеств.	4		2		6
2.	Полукольца. Сигма кольца. Монотонные классы.			2		6
3.	Суслинские и борелевские множества.			2		4
4.	Регулярные меры Бореля. Меры Радона			2		6
5.	Измеримые функции. Теоремы Егорова и Лузина. Интегралы. Теорема Фубини			2		4
6.	Дифференцирование мер Радона			2		4

№ п/п	Тема. Основные вопросы	Семестр	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа
7.	Мера Хаусдорфа			2		6
8.	Липшецевы функции и спрямляемые множества			2		6
9.	Формулы площади и коплощади.					4
10.	BV-функции и множества конечного периметра			2		4
11.	Теория варифолдов					4
			-	18	-	54

## 7. Образовательные технологии

Активные и интерактивные формы: лекции: проблемная лекция, лекция – пресс-конференция (могут применяться презентации); практические занятия: мозговой штурм, занятие – конференция (с применением презентаций), разбор практических задач, контрольные работы, активизация творческой деятельности, регламентированная дискуссия; для воплощения образовательных форм могут быть использованы компьютерные технологии.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

## 8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы Основная учебная литература

1) Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. Том 1 [Электронный ресурс] : учебник / Г.М. Фихтенгольц. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 448 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/65055> . — Загл. с экрана.

2) Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. том 2-й [Электронный ресурс] : учебник / Г.М. Фихтенгольц. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. — 464 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/411> . — Загл. с экрана.

3) Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной [Электронный ресурс] : учебник / И.П. Натансон. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. — 560 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/284> . — Загл. с экрана.

4) Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 272 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/245> . — Загл. с экрана.

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах «Лань» и «Юрайт».

### Дополнительная учебная литература

1) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1977. - Т. 1. А - Г. - 576 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454588>

2) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1979. - Т. 2. Д - Коо. - 552 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454589> .

3) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1982. - Т. 3. Коо - Од. - 592 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454590>.

4) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1984. - Т. 4. Ок - Сло. - 608 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454591>

5) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1985. - Т. 5. Слу - Я. - 624 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454592>

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной систематизированный материал и поднимаются проблемные вопросы; практических занятий, на которых широко используются активные и интерактивные образовательные технологии; лабораторных, в процессе проведения которых обучающиеся отрабатывают навыки решения конкретных научных задач.

Важнейшими составляющими курса являются такие виды занятий, как мозговой штурм и занятие – конференция, на которых по максимуму осуществляется активизация творческой деятельности обучающихся; а также самостоятельная работа аспирантов, такая как разбор лекций, работа с литературой, отработка навыков решения практических задач, подготовка к занятиям-конференциям. В процессе самостоятельной работы обучающимися активно используются информационные справочные системы.

Текущий контроль осуществляется преподавателем, ведущим практические занятия на основе дискуссии с аспирантами, дающей представление о динамике роста знаний аспирантов и их научном потенциале; учета активности аспиранта на занятиях типа «мозговой штурм» и оценке выступления обучающегося на занятии-конференции. Контроль также осуществляется путем проведения контрольных работ.

Итоговый контроль осуществляется в форме зачета.

Для аспиранта большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала, проводимая научным руководителем.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

### **10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине позволяют:

- обеспечить взаимодействие между участниками образовательного процесса, в том числе синхронное и (или) асинхронное взаимодействие посредством сети "Интернет";
- фиксировать ход образовательного процесса, результатов промежуточной аттестации по дисциплине и результатов освоения образовательной программы;
- организовать процесс образования путем визуализации изучаемой информации посредством использования презентаций, учебных фильмов;
- контролировать результаты обучения на основе компьютерного тестирования.

#### **Перечень программного обеспечения**

– Офисный пакет приложений Microsoft Office.

#### **Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем**

1. Справочно-правовая система «Консультант Плюс» (<http://www.consultant.ru>)
2. Электронная библиотечная система eLIBRARY.RU (<http://www.elibrary.ru/>) и т.д.

– Могут использоваться иные информационно-поисковые системы сети Интернет.

### **11. Материально-техническое оснащение.**

Наименование специальных помещений	Оснащенность специальных помещений	Перечень лицензионного программного обеспечения
Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа	Мебель: учебная мебель Технические средства обучения: экран, проектор, компьютер	Microsoft Windows Microsoft Office Professional Plus
Учебные аудитории для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Мебель: учебная мебель	

Для самостоятельной работы обучающихся предусмотрены помещения, укомплектованные специализированной мебелью, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

Наименование помещений для самостоятельной работы обучающихся	Оснащенность помещений для самостоятельной работы обучающихся	Перечень лицензионного программного обеспечения
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (читальный зал Научной библиотеки)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (ауд. _____)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы	



	Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	
--	--	--

## **12. Оценочные средства по дисциплине**

Для проведения промежуточной аттестации (представляется отдельным документом в формате приложения к РПД)

## ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО, ПРОМЕЖУТОЧНОГО И ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности в процессе освоения программы аспирантуры

### 1.1. Опрос на занятии

Перечень примерных контрольных вопросов

1. Привести пример неизмеримого множества. А) по Жордану. Б) по Лебегу.
2. Можно ли утверждать, что граница измеримого множества всегда измерима?
3. Можно ли утверждать, что множество с измеримой границей обязательно измеримо?
4. Вычислить  $n$ -мерную меру шара радиуса  $R$  в  $R^n$ .
5. Вычислить Хаусдорфову размерность стандартного канторова множества.

### 1.2. Тестовые задания

1. Доказать теорему Безиковича о покрытиях
2. Построить двумерную область, граница которой имеет положительную двумерную меру Лебега
3. Доказать, что снежинка Коха не является локально спрямляемой кривой.
4. Доказать, что система измеримых по Борелю подмножеств числовой прямой имеет мощность континуума.
5. Построить, используя процедуру построения множества Кантора, множество положительной меры.
6. Пусть  $A$  - множество чисел, содержащих бесконечно много 5 в своих десятичных разложениях. Доказать, что  $A$  - борелевское множество.
7. Доказать теорему Егорова: если последовательность функций сходится всюду на множестве  $D$ , борелевское множество конечной меры, то найдутся борелевские множества, сколь угодно мало отличающиеся по мере от множества  $D$ , на которых имеет место равномерная сходимость исходной последовательности функций.
8. Доказать, что размерность Хаусдорфа канторовой пыли равна 1. Докажите, что размерность Хаусдорфа множества Кантора равна логарифму двух, поделённому на логарифм трёх.
9. Покажите, что существует компактное подмножество  $[0,1]$  1-мера Хаусдорфа которого равна единице, а размерность Хаусдорфа которого равна нулю.
10. Докажите, что регулярное 1-множество обладает почти всюду касательной, а у иррегулярного множества касательные отсутствуют почти всюду.
11. Построить нигде не связное регулярное 1- множество.
12. Доказать теорему Радемахера о дифференцируемости локально липшецевых отображений.
13. Вычислить меру Хаусдорфа спрямляемой кривой.
14. Доказать, что спрямляемая кривая является регулярным 1-множеством.
15. Доказать, что иррегулярное 1-множество не содержит дуг.
16. Доказать теорему Федерера о приближении аппроксимативно дифференцируемых функций липшецевыми функциями, дифференцируемыми функциями.
17. Счётная  $m$  - спрямляемостью и свойство слабо аппроксимативного касательного пространства. Доказать теорему о связи между ними.
18. Получить формулы площади и ко-площади.
19. Доказать теорему о следах для BV- функций

20. Доказать теорему ди - Джорджи об  $(n-1)$  - спрямляемости приведённой границы множества, характеристическая функция которого является BV- функцией.
21. Доказать теорему о необходимом и достаточном условии сходимости варифоидов.
22. Доказать изопериметрическое неравенство для варифоидов.
23. Доказать теорему Федерера - Флеминга о компактности спрямляемых потоков.

### 1.3. Примерные темы докладов

1. Логическое обоснование теории меры с помощью аксиоматической теории множеств.
2. Взаимосвязь между различными мерами в многообразии мер и роли меры Бореля среди них.
3. Теоремы покрытия и вопросы дифференцируемости мер и представлений линейных непрерывных функционалов.
4. Понятие ёмкости множества и тонкие свойства функций.
5. Мера Хаусдорфа, размерность Хаусдорфа, их свойствах.
6. Фракталы. Структура фракталов.
7. Спрямяемые множества. Структура спрямяемых множеств.
8. Теория варифоидов, потоков и их применениях к решению экстремальных задач.

### 2. Промежуточная аттестация

#### 2.1. Вопросы к зачету

1. Теория множеств. Ординалы. Кардинальные числа. Мощность множеств.
2. Полукольца. Сигма кольца. Монотонные классы.
3. Суслинские и борелевские множества.
4. Регулярные меры Бореля. Меры Радона
5. Измеримые функции. Теоремы Егорова и Лузина. Интегралы. Теорема Фубини
6. Дифференцирование мер Радона
7. Мера Хаусдорфа
8. Липшецевы функции и спрямяемые множества
9. Формулы площади и коплощади.
10. BV-функции и множества конечного периметра
11. Теория варифоидов

Ответ аспиранта на зачете оценивается следующим образом.

Критерии оценивания	Количество баллов
Ответ грамотный, логично изложенный, существенные неточности отсутствуют. Проявлена достаточная научная и образовательнокультурная эрудиция.	зачет
В ответе значительные пробелы в фундаментальных знаниях, допускаются существенные ошибки.	незачет

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и опыта деятельности в процессе освоения образовательной программы

Контроль освоения дисциплины «Геометрическая теория меры и ее приложения» на этапах текущей промежуточной аттестации проводится в соответствии с действующим Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.