

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе,  
качеству образования – первый  
проректор



Т.А. Хагуров

подпись

«27» мая 2022 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
Б1.О.22 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

Направление подготовки 01.03.01 Математика

Направленность (профиль) Преподавание математики и информатики  
Математическое моделирование

Форма обучения очная

Квалификация бакалавр

Краснодар 2022

Рабочая программа дисциплины Б1.О.22 Функциональный анализ составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 01.03.01 Математика

Программу составил(и):

М.В. Цалюк, доцент, канд. физ.-мат. наук, доцент  
И.О. Фамилия, должность, ученая степень, ученое звание

  
\_\_\_\_\_ подпись

В.Ю. Барсукова, зав. каф. ФАА, к. ф.-м. н., доцент  
И.О. Фамилия, должность, ученая степень, ученое звание

  
\_\_\_\_\_ подпись

Рабочая программа дисциплины Б1.О.22 Функциональный анализ утверждена на заседании кафедры функционального анализа и алгебры протокол № 9 от «13» апреля 2022г.  
Заведующий кафедрой Барсукова В.Ю.  
фамилия, инициалы

  
\_\_\_\_\_ подпись

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук протокол № 5 от «5» мая 2022г.  
Председатель УМК факультета Шмалько С.П.  
фамилия, инициалы

  
\_\_\_\_\_ подпись

Рецензенты:

Н.О. Чубырь, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики КубГТУ

А.В. Павлова, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования КубГУ

## 1 Цели и задачи изучения дисциплины (модуля)

### 1.1 Цель освоения дисциплины

Цели освоения дисциплины определены федеральным государственным стандартом высшего образования по направлению подготовки «Математика», в рамках которой преподается дисциплина.

Целями освоения дисциплины «Функциональный анализ» являются формирование у студентов базовых знаний по функциональному анализу, математической культуры, способностей к алгоритмическому и логическому мышлению; формирование и развитие личности студентов; овладение современным аппаратом функционального анализа для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

### 1.2 Задачи дисциплины

Реализация требований, установленных государственными образовательными стандартами высшего образования к уровню подготовки математиков в области функционального анализа.

Задачами изучения дисциплины являются:

1. Получение студентами основных теоретических знаний.
2. Развитие познавательной деятельности.
3. Приобретение практических навыков работы с понятиями и объектами функционального анализа.

### 1.3 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина «Функциональный анализ» относится к обязательной части Блока 1 "Дисциплины (модули)" учебного плана. В соответствии с рабочим учебным планом дисциплина изучается на 3 курсе по очной форме обучения. Вид промежуточной аттестации: экзамен.

Место курса в профессиональной подготовке бакалавра определяется ролью функционального анализа в формировании высококвалифицированного специалиста по направлению Математика. Данная дисциплина является основополагающей для дальнейшего изучения дисциплин высшей математики.

Для успешного освоения дисциплины обучающийся должен владеть знаниями, умениями и навыками по программам дисциплин «Математический анализ», «Алгебра», «Дифференциальная геометрия и топология», «Комплексный анализ».

### 1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций:

Код и наименование индикатора* достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
<b>ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности</b>	
ИОПК-1.1. Применяет базовые знания, полученные в области математических и(или) естественных наук	Знает основное содержание курса функционального анализа
	Умеет применить базовые знания по функциональному анализу в других областях математического знания
	Владет навыками применения полученных знаний в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания
ИОПК-1.2. Оценивает и формулирует акту-	Знает возможные сферы, их связи и приложения в дру-

Код и наименование индикатора* достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
альные и значимые проблемы фундаментальной математики	гих областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания; постановки классических задач
	Умеет формулировать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики в области функционального анализа
	Владеет навыками оценивания актуальности и значимости проблем функционального анализа
ИОПК-1.3. Анализирует и применяет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знает основные приемы и методы исследования функционального анализа
	Умеет классифицировать задачи, обосновывать выбор метода их решения
	Владеет навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний
<b>ПК-1 Способен решать актуальные и важные задачи фундаментальной и прикладной математики</b>	
ИПК-1.1. Знает основные понятия, идеи и методы фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач	Знает основные понятия, определения и свойства объектов функционального анализа;
	Умеет формулировать основные определения, идеи и метода классических разделов функционального анализа
	Владеет навыками формулирования и доказательства утверждений, методами их доказательства
ИПК-1.2. Умеет передавать результаты проведенных теоретических и прикладных исследований в виде конкретных предметных рекомендаций в терминах предметной области	Знает основные термины предметной области
	Умеет структурировать и записывать результаты исследований в области функционального анализа
	Владеет навыками оформления результатов исследований, использования основных терминов предметной области
ИПК-1.3. Имеет навыки решения математических задач, соответствующих квалификации, возникающих при проведении научных и прикладных исследований	Знает основные методы решения задач по функциональному анализу
	Умеет составить план решения задачи, подобрать соответствующий инструментарий для ее решения
	Владеет навыками решения классических задач функционального анализа

Результаты обучения по дисциплине достигаются в рамках осуществления всех видов контактной и самостоятельной работы обучающихся в соответствии с утвержденным учебным планом.

Индикаторы достижения компетенций считаются сформированными при достижении соответствующих им результатов обучения.

## 2. Структура и содержание дисциплины

### 2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 7 зачетных единиц (252 часа), их распределение по видам работ представлено в таблице

Виды работ	Всего часов	Форма обучения	
		очная	
		5 семестр (часы)	6 семестр (часы)
<b>Контактная работа, в том числе:</b>	<b>110,6</b>	<b>58,3</b>	<b>52,3</b>
<b>Аудиторные занятия (всего):</b>	<b>102</b>	<b>52</b>	<b>50</b>
занятия лекционного типа	36	18	18
лабораторные занятия	66	34	32
<b>Иная контактная работа:</b>	<b>8,6</b>	<b>6,3</b>	<b>2,3</b>

Контроль самостоятельной работы (КСР)	8	6	2
Промежуточная аттестация (ИКР)	0,6	0,3	0,3
<b>Самостоятельная работа, в том числе:</b>	<b>79</b>	<b>50</b>	<b>29</b>
Проработка учебного (теоретического) материала	41	28	13
Выполнение домашних заданий (решение задач)	26	16	10
Подготовка к текущему контролю	12	6	6
<b>Контроль:</b>	<b>62,4</b>	<b>35,7</b>	<b>26,7</b>
Подготовка к экзамену	62,4	35,7	26,7
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>час.</b>	<b>252</b>	<b>144</b>
	<b>в том числе контактная работа</b>	<b>110,6</b>	<b>58,3</b>
	<b>зач. ед</b>	<b>7</b>	<b>4</b>

## 2.2 Содержание дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины. Разделы (темы) дисциплины, изучаемые в **5 семестре** (очная форма обучения)

№	Наименование разделов (тем)	Количество часов			
		Всего	Аудиторная работа		Внеаудиторная работа СРС
			Л	ЛР	
1.	Мера и интеграл Лебега	28	2	12	14
2.	Банаховы пространства	21	4	8	9
3.	Гильбертовы пространства	19	4	6	9
4.	Линейные операторы	28	8	8	12
	<i>ИТОГО по разделам дисциплины</i>	96	18	34	44
	Контроль самостоятельной работы (КСР)	6	-	6	-
	Промежуточная аттестация (ИКР)	0,3	-	0,3	-
	Подготовка к текущему контролю	6	-	-	6
	Общая трудоемкость по дисциплине	108,3	18	40,3	50

Разделы (темы) дисциплины, изучаемые в **6 семестре** (очная форма обучения)

№	Наименование разделов (тем)	Количество часов			
		Всего	Аудиторная работа		Внеаудиторная работа СРС
			Л	ЛР	
5.	Принципы неподвижной точки	25	6	10	9
6.	Вполне непрерывные операторы	48	12	22	14
	<i>ИТОГО по разделам дисциплины</i>	73	18	32	23
	Контроль самостоятельной работы (КСР)	2	-	2	-
	Промежуточная аттестация (ИКР)	0,3	-	0,3	-
	Подготовка к текущему контролю	6	-	-	6
	Общая трудоемкость по дисциплине	81,3	18	34,3	29

Примечание: Л – лекции, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента

## 2.3 Содержание разделов (тем) дисциплины

### 2.3.1 Занятия лекционного типа

№	Наименование раздела (темы)	Содержание раздела (темы)	Форма текущего контроля
1.	Мера и интеграл Лебега	Мера. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Свойства: аддитивность, положительность, $\sigma$ -аддитивность, абсолютная непрерывность. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.	УО
2.	Банаховы пространства	Линейные и нормированные пространства. Примеры: $l_p^n$ , $l_p$ , $l_\infty$ , $C[a,b]$ , $L_p[a,b]$ . Топология. Теорема Бэра.	К
3.	Гильбертовы пространства	Конечномерные пространства. Гильбертовы пространства. Ряды Фурье.	К
4.	Линейные операторы	Линейные непрерывные операторы. Примеры. Норма оператора. Полнота пространства $L(X, Y)$ . Принцип равномерной ограниченности. Обратимость линейных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Хана – Банаха. Спектр линейного непрерывного оператора. Резольвента. Непустота спектра. Спектральный радиус. Линейный функционал в $H$ .	УО
5.	Принципы неподвижной точки	Принцип сжимающих отображений. Принцип Шаудера. Критерий Хаусдорфа. Теорема Арцеля. Применения. Интегральные уравнения.	УО
6.	Вполне непрерывные операторы	Вполне непрерывные операторы. Пример вполне непрерывного оператора в $L_2[a,b]$ . Сопряженные операторы. Конечномерные операторы. Представление вполне непрерывного оператора в виде суммы конечномерного и малого по норме. Теория Фредгольма. Спектр вполне непрерывного оператора. Теорема Гильберта. Теорема Гильберта-Шмидта.	УО

Примечания: коллоквиум (К), устный опрос (УО).

### 2.3.2 Занятия семинарского типа (практические / семинарские занятия/ лабораторные работы)

№	Наименование раздела (темы)	Тематика занятий/работ	Форма текущего контроля
1.	Мера и интеграл Лебега	Множества. Операции над множествами. $\sigma$ -кольцо. Аддитивные, $\sigma$ -аддитивные функции. Внешняя мера, мера Лебега. Типы сходимости. Интеграл Лебега и его свойства. Предельный переход под знаком интеграла	Проверка домашнего задания, контрольная работа
2.	Линейные нормированные и гильбертовы пространства	Линейные пространства. Сходимость. Пространства со скалярным произведением. Проекция вектора на подпространство	Проверка домашнего задания, контрольная работа
3.	Линейные непрерывные операторы	Линейные отображения. Операции над ними. Оценка и вычисление нормы операторов	Самостоятельная работа
4.	Принципы неподвижной точки	Принцип сжимающих отображений. Его применение к скалярным уравнениям, к системам алгебраических уравнений, к дифференциальным и интегральным уравнениям	Проверка домашнего задания, контрольная работа
5.	Спектр и резольвента непрерывных линейных операторов	Обратные операторы и их свойства. Спектр линейных непрерывных операторов. Оценка спектрального радиуса и нахождение спектра	Проверка домашнего задания
6.	Интегральные уравнения	Уравнения с вырожденным ядром. Нахождение характеристических чисел и собственных функций интегрального уравнения. Теоремы Фредгольма. Интегральные уравнения с симметричным ядром	Проверка домашнего задания, контрольная работа

При изучении дисциплины могут применяться электронное обучение, дистанционные образовательные технологии в соответствии с ФГОС ВО.

### 2.3.3 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Курсовые работы не предусмотрены.

### 2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
1	Проработка учебного (теоретического) материала	1. Методические указания для подготовки к занятиям лекционного и семинарского типа. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5 от 05 мая 2022 г. 2. Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5 от 05 мая 2022 г. 3. Методические указания по использованию интерактивных методов обучения. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5т от 05 мая 2022 г.
2	Выполнение домашних заданий (решение задач)	1. Методические указания для подготовки к занятиям лекционного и семинарского типа. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5 от 05 мая 2022 г. 2. Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5 от 05 мая 2022 г. 3. Методические указания по использованию интерактивных методов обучения. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5т от 05 мая 2022 г.
3	Подготовка к текущему контролю (контрольная работа и др.)	1. Методические указания для подговки к занятиям лекционного и семинарского типа. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5 от 05 мая 2022 г. 2. Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5 от 05 мая 2022 г. 3. Методические указания по использованию интерактивных методов обучения. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5т от 05 мая 2022 г. 4. Методические указания по подготовке эссе, рефератов, курсовых работ. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5т от 05 мая 2022 г.
4	Промежуточная аттестация (зачет, экзамен)	1. Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5 от 05 мая 2022 г. 2. Методические указания по использованию интерактивных методов обучения. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5т от 05 мая 2022 г.

5	Коллоквиум	1. Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5 от 05 мая 2022 г. 2. Методические указания по использованию интерактивных методов обучения. Утверждены на заседании Совета факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «КубГУ». Протокол № 5т от 05 мая 2022 г.
---	------------	--

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

### 3. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины (модуля)

В ходе изучения дисциплины предусмотрено использование следующих образовательных технологий: лекции, практические занятия, самостоятельная работа студентов.

Компетентностный подход в рамках преподавания дисциплины реализуется в использовании интерактивных технологий и активных методов в сочетании с внеаудиторной работой.

Информационные технологии, применяемые при изучении дисциплины: использование информационных ресурсов, доступных в информационно-телекоммуникационной сети Интернет.

Адаптивные образовательные технологии, применяемые при изучении дисциплины – для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

### 1. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины «Функциональный анализ».

Оценочные средства включает контрольные материалы для проведения **текущего контроля** в форме коллоквиума, самостоятельных и контрольных работ, а также вопросы для устного опроса, и **промежуточной аттестации** в форме вопросов и заданий к экзамену.

#### Структура оценочных средств для текущей и промежуточной аттестации

№ п/п	Код и наименование индикатора (в соответствии с п. 1.4)	Результаты обучения (в соответствии с п. 1.4)	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация



1	ИОПК-1.1. Применяет базовые знания, полученные в области математических и(или) естественных наук	<p>Знает основное содержание курса функционального анализа</p> <p>Умеет применить базовые знания по функциональному анализу в других областях математического знания</p> <p>Владеет навыками применения полученных знаний в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания</p>	<p>Вопросы для устного опроса по темам: «Мера и интеграл Лебега», «Линейные операторы», «Принципы неподвижной точки», «Вполне непрерывные операторы»</p> <p>Вопросы к коллоквиуму 1-17</p> <p>Контрольные работы 1-4</p> <p>Самостоятельная работа</p>	<p>Вопрос на экзамене</p> <p>1-36 (5 семестр)</p> <p>1-27 (6 семестр);</p> <p>Задачи на экзамен</p>
2	ИОПК-1.2. Оценивает и формулирует актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики	<p>Знает возможные сферы, их связи и приложения в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания; постановки классических задач</p> <p>Умеет формулировать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики в области функционального анализа</p> <p>Владеет навыками оценивания актуальности и значимости проблем функционального анализа</p>	<p>Вопросы для устного опроса по темам: «Мера и интеграл Лебега», «Линейные операторы», «Принципы неподвижной точки», «Вполне непрерывные операторы»</p> <p>Вопросы к коллоквиуму 1-17</p>	<p>Вопрос на экзамене</p> <p>1-36 (5 семестр)</p> <p>1-27 (6 семестр)</p>
3	ИОПК-1.3. Анализирует и применяет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	<p>Знает основные приемы и методы исследования функционального анализа</p> <p>Умеет классифицировать задачи, обосновывать выбор метода их решения</p> <p>Владеет навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний</p>	<p>Вопросы для устного опроса по темам: «Мера и интеграл Лебега», «Линейные операторы», «Принципы неподвижной точки», «Вполне непрерывные операторы»</p> <p>Вопросы к коллоквиуму 1-17</p> <p>Контрольные работы 1-4</p> <p>Самостоятельная работа</p>	<p>Вопрос на экзамене</p> <p>1-36 (5 семестр)</p> <p>1-27 (6 семестр);</p> <p>Задачи на экзамен</p>
4	ИПК-1.1. Знает основные понятия, идеи и методы фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач	<p>Знает основные понятия, определения и свойства объектов функционального анализа;</p> <p>Умеет формулировать основные определения, идеи и метода классических разделов функционального анализа</p> <p>Владеет навыками формулирования и доказательства утверждений, методами их доказательства</p>	<p>Вопросы для устного опроса по темам: «Мера и интеграл Лебега», «Линейные операторы», «Принципы неподвижной точки», «Вполне непрерывные операторы»</p> <p>Вопросы к коллоквиуму 1-17</p> <p>Контрольные работы 1-4</p> <p>Самостоятельная работа</p>	<p>Вопрос на экзамене</p> <p>1-36 (5 семестр)</p> <p>1-27 (6 семестр);</p> <p>Задачи на экзамен</p>
5	ИПК-1.2. Умеет передавать результаты прове-	Знает основные термины предметной области	Вопросы для устного опроса по темам: «Мера и интеграл	Вопрос на экзамене

	денных теоретических и прикладных исследований в виде конкретных предметных рекомендаций в терминах предметной области	Умеет структурировать и записывать результаты исследований в области функционального анализа Владеет навыками оформления результатов исследований, использования основных терминов предметной области	Лебега», «Линейные операторы», «Принципы неподвижной точки», «Вполне непрерывные операторы» Вопросы к коллоквиуму 1-17	1-36 (5 семестр) 1-27 (6 семестр)
6	ИПК-1.3. Имеет навыки решения математических задач, соответствующих квалификации, возникающих при проведении научных и прикладных исследований	Знает основные методы решения задач по функциональному анализу Умеет составить план решения задачи, подобрать соответствующий инструментарий для ее решения Владеет навыками решения классических задач функционального анализа	Вопросы для устного опроса по темам: «Мера и интеграл Лебега», «Линейные операторы», «Принципы неподвижной точки», «Вполне непрерывные операторы» Вопросы к коллоквиуму 1-17 Контрольные работы 1-4 Самостоятельная работа	Вопрос на экзамене 1-36 (5 семестр) 1-27 (6 семестр); Задачи на экзамен

**Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы**

***Примерный перечень вопросов и заданий***

***1. Вопросы для устного опроса по теме:***

**а) «Мера и интеграл Лебега»**

1. Измеримые множества.
2. Измеримые функции.
3. Определение интеграла Лебега
4. Свойства интеграла Лебега.

**б) «Линейные операторы»**

1. Непрерывные линейные операторы.
2. Пространство линейных операторов.
3. Норма линейного непрерывного оператора.
4. Принцип равномерной ограниченности.

**с) «Принципы неподвижной точки»**

1. Принцип сжатых отображений.
2. Теорема Хаусдорфа.
3. Теорема Арцеля.
4. Принцип Шаудера.

**д) «Вполне непрерывные операторы»**

1. Вполне непрерывные операторы и их свойства.
2. Вполне непрерывность интегрального оператора.
3. Сопряженные операторы в  $H$ .
4. Свойства  $A^*$ .
5. Вполне непрерывность сопряженного оператора.
6. Сопряженный к интегральному оператору.
7. Первая теорема Фредгольма.
8. Вторая теорема Фредгольма.
9. Третья теорема Фредгольма.

## 2. Вопросы к коллоквиуму по теме «Банаховы пространства. Гильбертовы пространства»

1. Линейные пространства.
2. Нормированные пространства.
3. Пространства  $l_p^n$  и  $l_p$ .
4. Топология нормированных пространств.
5. Теорема о вложенных шарах.
6. Теорема Бэра.
7. Конечномерные пространства.
8. Пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского.
9. Теорема о диагоналях параллелограмма.
10. Теорема Пифагора.
11. Теорема о проекции.
12. Линейная зависимость и независимость.
13. ОНС. Процесс ортогонализации.
14. Ряд Фурье.
15. Частичная сумма ряда Фурье.
16. Сходимость ряда Фурье.
17. Теорема Фишера-Рисса.

## 3. Образцы самостоятельных и контрольных работ

### 5 семестр

#### Контрольная работа № 1 на тему «Мера и интеграл Лебега»

1. Найти меру Лебега следующих множеств:

а)  $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{3^{n-1}} \right)$ ,

б)  $M = \{-1; -0,9; -0,8\}$ .

2. Будут ли следующие функции простыми:

а)  $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \in Q, \\ 0, & x \in R \setminus Q, \end{cases}$

б)  $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x-1}, & x \in [2, \infty) \cap Q, \\ \sin x, & x \in [2, \infty) \setminus Q \end{cases}$ .

3. Суммируема ли функция? Вычислить, если возможно, интеграл Лебега от следующих функций по данным множествам:

а)  $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0;1], \\ -3, & x \in [2;3], \end{cases}$

б)  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1] \cap Q, \\ -3, & x \in [0;1] \setminus Q, \end{cases} \quad x \in [0;1]$

в)  $f(x) = \frac{1}{2^n}, x \in [n; n+1), x \in [1; +\infty)$

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \in K, \\ 1+x, & x \in [0;0,5] \setminus K, \quad x \in [0;1] \\ -x^3, & x \in (0,5;1] \setminus K \end{cases}$$

$$\text{д) } f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0; \pi/2] \setminus Q, \\ \cos x, & x \in (\pi/2; \pi] \setminus Q, \quad x \in [0; \pi] \\ x^2 - 3x, & x \in [0; \pi] \cap Q \end{cases}$$

$$\text{е) } f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [0;1] \cap Q, \\ \cos x, & x \in (1;2] \cap Q, \quad x \in [0;2] \\ x^2 - 2, & x \in [0;2] \setminus Q \end{cases}$$

**Контрольная работа № 2 на тему «Банаховы пространства. Гильбертовы пространства»**

1. Проверить, образует ли  $V$  линейное подпространство пространства  $X$ :

$$X = R^3, \quad V = \{x \in R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

2. Является ли функция  $\varphi(x) = 2|x_1 + x_2|$  нормой в пространстве  $R^2$ .

3. Сходятся ли последовательности в указанных пространствах. В случае сходимости указать предел.

$$\text{а) } l_2, \quad x_k = \left( 0, 0, \dots, 0, \frac{1}{k}, 0, \dots \right);$$

$$\text{б) } C[0,1], \quad x_k(t) = t^k.$$

4. Найти проекцию вектора на подпространство и расстояние от вектора до подпространства

$$\text{а) } l_2, \quad a = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right) \text{ на подпространство}$$

$$M = \{x \in l_2 : x = (0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\};$$

$$\text{б) } l_2^3, \quad a = (1, 2, 1) \text{ на подпространство } M = \{x \in l_2^3 : x_1 - x_2 = 0\}.$$

**Самостоятельная работа № 1 на тему «Линейные операторы»**

1. Проверить линейность операторов:

$$\text{а) } A : R^3 \rightarrow R^3, \quad Ax = (x_1^2, x_1 + x_3, x_3^2);$$

$$\text{б) } A : C[0,1] \rightarrow C[0,1], \quad (Ax)(t) = x^2(t).$$

2. Оценить норму следующих операторов:

$$\text{а) } A : l_1^2 \rightarrow l_1^2, \quad Ax = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A : C[0,1] \rightarrow C[0,1], \quad (Ax)(t) = t^2 x(t).$$

**6 семестр**

**Контрольная работа № 3 по теме «Принципы неподвижной точки»**

1. Является ли оператор сжатием на  $R^1$ :

а)  $Ax = \sin(0,5x) + 2$ ;    б)  $Ax = \sqrt[5]{x} - 1$ .

2. Доказать, что уравнение имеет решение и указать число итераций, необходимых для достижения точности 0,01:

$$x^5 + 2x^4 - 20x + 3 = 0.$$

3. Доказать, используя ПСО, что система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x_1 = 0,3x_1 - 0,5x_2 + 3 \\ x_2 = 0,5x_2 - 0,4x_1 - 2. \end{cases} \text{ Найти } x^{(2)}.$$

4. Показать, что уравнение имеет единственное непрерывное на  $[0,1]$  решение:

$$3x(t) - \sin(2x(t)) + t = 0.$$

5. С помощью ПСО определить при каких  $\lambda$  уравнение имеет единственное непрерывное на  $[0,1]$  решение и найти его методом последовательных приближений:

$$x(t) = \lambda \int_0^1 t^2 x(s) ds + t^2.$$

**Контрольная работа № 4 на тему «Вполне непрерывные операторы»**

1. Найти спектр и спектральный радиус оператора  $A$ :

а)  $A: l_\infty \rightarrow l_\infty, Ax = (x_1 + x_2, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ ;

б)  $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], (Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds$ .

2. Найти решение уравнения при заданных  $f$ :

$$x(t) = \int_0^{0,5\pi} \sin(t-s)x(s) ds + f(t),$$

$$f(t) = \cos t; \sin t; 3\cos t - 2\sin t.$$

3. Найти характеристические значения, и собственные функции уравнения:

$$x(t) = \mu \int_0^1 (ts^2 + t^2s)x(s) ds.$$

4. Разрешимо ли уравнение при заданных  $f$  и любых параметрах  $\lambda$

$$x(t) = \lambda \int_{-1}^1 ((ts)^4 + 1)x(s) ds + f(t), \quad f(t) = t; e^{-t^2} \sin t; 1 + t^2.$$

**Зачетно-экзаменационные материалы для промежуточной аттестации (экзамен)**

**5 семестр**

1. Измеримые множества.
2. Измеримые функции.
3. Интеграл Лебега (корректность).
4. Свойства интеграла Лебега.
5.  $\sigma$  – аддитивность интеграла Лебега.
6. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
7. Теорема Леви.
8. Лемма Фату.
9. Теорема Лебега.
10. Пространство  $L^2(A)$ .

11. Линейные пространства.
12. Нормированные пространства.
13. Пространства  $l_p^n$  и  $l_p$ .
14. Топология нормированных пространств.
15. Теорема о вложенных шарах.
16. Теорема Бэра.
17. Конечномерные пространства.
18. Пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского.
19. Теорема о диагоналях параллелограмма.
20. Теорема Пифагора.
21. Теорема о проекции.
22. Линейная зависимость и независимость.
23. ОНС. Процесс ортогонализации.
24. Ряд Фурье.
25. Частичная сумма ряда Фурье.
26. Сходимость ряда Фурье.
27. Теорема Фишера-Рисса.
28. Непрерывные линейные операторы.
29. Непрерывность интегрального оператора.
30. Пространство линейных операторов.
31.  $L(X, Y)$ .
32. Принцип равномерной ограниченности.
33. Теорема Банаха – Штейнгауза.
34. Теорема Хана – Банаха.
35. Следствия теоремы Хана-Банаха.
36. Общий вид функционала в  $H$ .

### 6 семестр

1. Принцип сжатых отображений.
2. Теорема Хаусдорфа.
3. Теорема Арцеля.
4. Принцип Шаудера.
5. Теорема Банаха.
6. Операторы с малой нормой.
7. Обратимость близких операторов.
8. Спектр оператора и его свойства. Примеры.
9. Резольвента оператора и её свойства. Теорема о непустоте спектра.
10. Спектральный радиус оператора и формула для его вычисления. Спектральный радиус оператора Вольтерра.
11. Вполне непрерывные операторы и их свойства.
12. Вполне непрерывность предельного оператора.
13. Вполне непрерывность интегрального оператора.
14. Сопряженные операторы в  $H$ .
15. Свойство  $A^*$ .
16. Вполне непрерывность сопряженного оператора.
17. Сопряженный интегральный оператор.
18. Замкнутость  $\text{Im}(I - A)$ .
19. Конечномерные операторы.
20. Аппроксимация вполне непрерывных операторов конечномерными.
21. Первая теорема Фредгольма.
22. Вторая теорема Фредгольма.

23. Третья теорема Фредгольма.
24. Теорема о спектре вполне непрерывного оператора.
25. Самосопряженные операторы и их свойства.
26. Существование ненулевого собственного числа у вполне непрерывного самосопряженного оператора.
27. Теорема Гильберта–Шмидта.

### Критерии оценивания результатов обучения

Оценка	Критерии оценивания по экзамену
Высокий уровень «5» (отлично)	оценку «отлично» заслуживает студент, показавший всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач; освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал без пробелов; выполнивший все задания, предусмотренные учебным планом на высоком качественном уровне; практические навыки профессионального применения освоенных знаний сформированы.
Средний уровень «4» (хорошо)	оценку «хорошо» заслуживает студент, твердо знающий материал, грамотно и по существу излагающий его, умеющий применять полученные знания на практике, но допускающий в ответе или в решении задач некоторые неточности, т.е. практически полностью освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не оценены максимальным числом баллов, в основном сформировал практические навыки.
Пороговый уровень «3» (удовлетворительно)	оценку «удовлетворительно» заслуживает студент, показавший разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеющий основными разделами учебной программы в некотором объеме, необходимом для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации, то есть частично с пробелами освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, многие учебные задания либо не выполнил, либо они оценены числом баллов близким к минимальному, некоторые практические навыки не сформированы.
Минимальный уровень «2» (неудовлетворительно)	оценку «неудовлетворительно» заслуживает студент, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач, то есть не освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не выполнил, практические навыки не сформированы.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

## **5. Перечень учебной литературы, информационных ресурсов и технологий**

### **5.1. Учебная литература**

#### **Основная литература:**

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 570 с.  
<https://e.lanbook.com/book/2206>
2. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 88 с.  
<https://e.lanbook.com/book/59471>
3. Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2009. — 272 с.  
<https://e.lanbook.com/book/245>
4. Цалюк З. Б. Функциональный анализ: [учебное пособие] / З. Б. Цалюк, М. В. Цалюк; Фак. математики и компьютерных наук Кубанского гос. ун-та. – Краснодар: [Факультет математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета]: [Просвещение-Юг], 2014. – 79 с.
5. Пуляев В.Ф., Цалюк З.Б. Сборник задач по функциональному анализу. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная хаотическая механика», 2010. – 150 с.

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются электронные версии источников, изданных сотрудниками кафедры, а также издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах «Лань» и «Библиоклуб».

#### **Дополнительная литература:**

1. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. - Изд. 2-е, перераб. - Москва: Наука, 1965. - 520 с.  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459769>
2. Вулих, Б.З. Введение в функциональный анализ / Б.З. Вулих. - Москва: Гос. изд-во физико-математической лит., 1958. - 351 с.  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233615>



3. Данфорд, Н. Линейные операторы / Н. Данфорд, Д.Т. Шварц; под ред. А.Г. Костюченко; пер. с англ. Б.С. Митягина, Л.И. Головин. - Москва: Издательство иностранной литературы, 1962. - Т. 1. Общая теория. - 895 с.  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=456617>
4. Филимоненкова Н.В. Сборник задач по функциональному анализу [Электронный ресурс]: учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2015. — 240 с.  
<https://e.lanbook.com/book/65041>
5. Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. — Электрон. дан. — Москва: Физматлит, 2005. — 240 с.  
<https://e.lanbook.com/book/2342>

## **5.2. Периодическая литература**

По данному предмету в процессе обучения периодическая литература не используются.

## **5.3. Интернет-ресурсы, в том числе современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

### **Электронно-библиотечные системы (ЭБС):**

1. ЭБС «ЮРАЙТ» <https://urait.ru/>
2. ЭБС «УНИВЕРСИТЕТСКАЯ БИБЛИОТЕКА ОНЛАЙН» [www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)
3. ЭБС «BOOK.ru» <https://www.book.ru>
4. ЭБС «ZNANIUM.COM» [www.znanium.com](http://www.znanium.com)
5. ЭБС «ЛАНЬ» <https://e.lanbook.com>

### **Собственные электронные образовательные и информационные ресурсы**

#### **КубГУ:**

1. База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций <http://mschool.kubsu.ru/>

## **6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной систематизированный материал, лабораторных занятий, в ходе которых студентами приобретаются и закрепляются основные практически навыки решения различных задач, в том числе с применением полученных теоретических знаний, а также групповых консультаций.

Важнейшим этапом курса является самостоятельная работа по дисциплине. Самостоятельная работа студентов является неотъемлемой частью процесса подготовки. Под самостоятельной работой понимается часть учебной планируемой работы, которая выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа направлена на усвоение системы научных и профессиональных знаний, формирования умений и навыков, приобретение опыта самостоятельной творческой деятельности. СРС помогает формировать культуру мышления студентов, расширять познавательную деятельность.

Виды самостоятельной работы по курсу:

- а) по целям: подготовка к лекциям, к практическим занятиям, к контрольной работе, к коллоквиуму; подготовка научного доклада и выполнение заданий по НИР.

б) по характеру работы: изучение литературы, конспекта лекций; поиск литературы в библиотеке; конспектирование рекомендуемой для самостоятельного изучения научной литературы; решение задач, тестов.

Тематическое планирование самостоятельной работы студентов

Раздел	Тема	Содержание вопросов темы	Вид работы
1	Мера и интеграл Лебега	Мера. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Свойства. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.	Поиск необходимой информации (см. список литературы). Решение задач. Подготовка к контрольной работе.
2	Банаховы пространства	Линейные и нормированные пространства. Сходимость. Полные пространства. Пополнение пространств.	Поиск необходимой информации. Изучение лекционного материала. Конспектирование. Подготовка к контрольной работе.
3	Гильбертовы пространства	Конечномерные пространства. Гильбертовы пространства. Проекция элемента на подпространство. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Ряды Фурье.	Повторение лекционного материала, ознакомление с материалом учебников. Подготовка к контрольной работе.
4	Линейные операторы	Линейные непрерывные операторы. Норма оператора. Полнота пространства $L(X, Y)$ . Принцип равномерной ограниченности. Обратимость линейных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Хана-Банаха. Спектр линейного непрерывного оператора. Резольвента. Непустота спектра. Спектральный радиус. Линейный функционал в гильбертовом пространстве, в других пространствах.	Поиск необходимой информации. Изучение материала, конспектирование. Подготовка к самостоятельной работе.
5	Принципы неподвижной точки	Принцип сжимающих отображений. Принцип Шаудера. Критерий Хаусдорфа. Теорема Арцеля. Применения принципов неподвижной точки. Интегральные уравнения.	Изучение лекционного материала и материала учебников. Подготовка к контрольной работе.
6	Вполне непрерывные операторы	Вполне непрерывные операторы. Сопряженные операторы. Конечномерные операторы. Представление вполне непрерывного оператора в виде суммы конечномерного и малого по норме. Теория Фредгольма. Спектр вполне непрерывного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта. Теория Фредгольма для интегральных уравнений	Поиск необходимой информации, проработка материала. Решение задач. Подготовка к контрольной работе.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта

между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

## 7. Материально-техническое обеспечение по дисциплине (модулю)

Наименование специальных помещений	Оснащенность специальных помещений	Перечень лицензионного программного обеспечения
Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа: 302Н, 303Н, 308Н, 505а, 507а	Мебель: учебная мебель Технические средства обучения: экран, проектор Оборудование: комбинированная (белая маркерная и меловая) доска	Microsoft Windows Microsoft Office Professional Plus
Учебные аудитории для проведения занятий семинарского типа: 307Н, 310Н, 312Н, 314Н, 318Н	Мебель: учебная мебель Оборудование: комбинированная (белая маркерная и меловая) доска	нет
Учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций: 314Н	Мебель: учебная мебель Оборудование: комбинированная (белая маркерная и меловая) доска	нет
Учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации: 302Н, 303Н, 307Н, 308Н, 310Н, 312Н, 314Н, 318Н, 506а, 507а	Мебель: учебная мебель Оборудование: комбинированная (белая маркерная и меловая) доска	нет

Для самостоятельной работы обучающихся предусмотрены помещения, укомплектованные специализированной мебелью, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

Наименование помещений для самостоятельной работы обучающихся	Оснащенность помещений для самостоятельной работы обучающихся	Перечень лицензионного программного обеспечения
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (читальный зал Научной библиотеки)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	Microsoft Windows Microsoft Office Professional Plus
Помещение для самостоятельной работы обучающихся: 301Н, 309Н, 320Н	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-	Microsoft Windows Microsoft Office Professional Plus

	образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	
--	--	--