МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе, качеству образования – первый проректор
________________ Т.А. Хагуров
подпись
«_____» ____мая________ 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Б1.О.25 УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Направление подготовки/специальность	02.03.01 Математика
Направленность (профиль) / специализация	Алгебра, теория чисел и дискретный анализ; Вычислительные, программные, информационные системы и компьютерные технологии; Математическое и компьютерное моделирование
Форма обучения	Очная
Квалификация	Бакалавр

Краснодар 2022

Рабочая программа дисциплины Б1.О.25 Уравнения в частных производных составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Программу составил(и):

С.В. Гайденко, зав. кафедрой Вычислительной математики и информатики, кандидат физико-математических наук, доцент

подпись

Рабочая программа дисциплины Б1.О.25 Уравнения в частных производных утверждена на заседании кафедры вычислительной математики и информатики
протокол № 14 «22» апреля 2022 г.
Заведующий кафедрой вычислительной математики и информатики

Гайденко С.В.
фамилия, инициалы

подпись

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета Математики и компьютерных наук
протокол № 5 «5» мая 2022 г.
Председатель УМК факультета Шмалько С.П.
фамилия, инициалы
подпись

Рецензенты:
Терещенко И.В., к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой общей математики Кубанского государственного технологического университета
Уртенов М.Х., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Кубанского государственного университета

1 Цели и задачи изучения дисциплины (модуля)

1.1 Цель освоения дисциплины

Дать студентам представление о применении достижений современной математики к исследованию реальных объектов, математические модели которых приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных; продемонстрировать исследование корректности типичных задач математической физики.

1.2 Задачи дисциплины

Пробудить интерес студентов к научной деятельности, показать возможность практического применения математического образования.

1.3 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина Уравнения в частных производных относится к обязательной части Блока 1 "Дисциплины (модули)" учебного плана. В соответствии с рабочим учебным планом дисциплина изучается на 3 курсе по очной форме обучения. Вид промежуточной аттестации: экзамен. Для полноценного понимания курса «Уравнения в частных производных» необходимы знания, умения и навыки, заложенные в курсах математического анализа, линейной алгебры, аналитической геометрии, комплексного анализа, функционального анализа и дифференциальных уравнений. Дисциплина является предшествующей для курсов «Численные методы» и «Теоретическая механика». Студенты должны быть готовы использовать полученные в этой области знания, как при продолжении образования в магистратуре и в аспирантуре, так и в профессиональной деятельности.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций: ОПК-1, ПК-3.

Код и наименование индикатора* достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	
ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.	**Знает** классификацию квазилинейных уравнений второго порядка и корректные постановки основных краевых задач для каждого типа уравнений
	Умеет приводить к каноническому виду линейные уравнения с двумя переменными, интегрировать их, когда это возможно; строить решения простейших уравнений с постоянными коэффициентами методами разделения переменных и теории потенциалов
	Владеет техникой преобразований дифференциальных уравнений в результате невырожденной замены независимых переменных
ИОПК-1.2. Владеет фундаментальными знаниями,	**Знает** место курса уравнений в частных производных в структуре отечественного

Код и наименование индикатора* достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
полученными в области математических и (или) естественных наук.	математического образования
	Умеет объяснить идеи исследования математической корректности классических дифференциальных задач для линейных уравнений второго порядка в частных производных
	Владеет навыками доказательства теорем единственности и исследования устойчивости решений краевых задач для волнового уравнения, уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа.
ПК-3 Способен математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики	
ИПК-3.1 Демонстрирует навыки доказательства теорем существования и единственности решения классических задач линейной алгебры, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории уравнений математической физики	**Знает** корректные постановки граничных задач для линейных уравнений эллиптического типа, задачи Коши и смешанных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов.
	Умеет строить решения указанных краевых задач методами теории потенциала и методом разделения переменных.
	Владеет техническими приемами доказательства корректности указанных дифференциальных задач.
ИПК-3.2 Демонстрирует навыки доказательств устойчивости решений дифференциальных задач в классической и обобщенной постановках	**Знает** понятие устойчивости решения линейной дифференциальной задачи по свободному члену уравнения и по граничным и начальным условиям
	Умеет доказывать принципы максимума для решения однородного уравнения теплопроводности и для гармонических функций
	Владеет техникой исследования устойчивости решения волнового уравнения с помощью интеграла энергии.

Результаты обучения по дисциплине достигаются в рамках осуществления всех видов контактной и самостоятельной работы обучающихся в соответствии с утвержденным учебным планом.

Индикаторы достижения компетенций считаются сформированными при достижении соответствующих им результатов обучения.

2. Структура и содержание дисциплины

2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц (144 часа), их распределение по видам работ представлено в таблице *(для студентов ОФО)*

Вид учебной работы	Всего	Семестры

	часов	(часы)			
		5			
Контактная работа, в том числе:					
Аудиторные занятия (всего):	**52**	**52**			
Занятия лекционного типа	18	18			
Лабораторные занятия	34	34			
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)	-	-			
Иная контактная работа:	**4,3**	**4,3**			
Контроль самостоятельной работы (КСР)	4	4			
Промежуточная аттестация (ИКР)	0,3	0,3			
Самостоятельная работа, в том числе:	**52**	**52**			
Курсовая работа	-	-			
Проработка учебного (теоретического) материала	28	28			
Выполнение индивидуальных заданий (подготовка домашних заданий)	12	12			
Реферат	-	-			
Подготовка к текущему контролю	12	12			
Контроль:					
Подготовка к экзамену	35,7	35,7			
Общая трудоемкость	**144**	**144**			
в том числе контактная работа	**56,3**	**56,3**			
зач. ед	**4**	**4**			

2.2 Содержание дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы (темы) дисциплины, изучаемые в 5 семестре *(очная форма)*

№	Наименование разделов (тем)	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	СРС
1	2	3	4	5	6	7
1.	Введение в теорию уравнений с частными производными.	22	4	-	8	12
2.	Волновое уравнение.	27	4	-	8	12
3.	Одномерное уравнение теплопроводности.	24	4	-	6	12
4.	Уравнения с оператором Лапласа.	23	4	-	8	10
5.	Теория потенциала для оператора Лапласа.	12	2	-	4	6
	ИТОГО по разделам дисциплины		18		34	52
	Контроль самостоятельной работы (КСР)	4				
	Промежуточная аттестация (ИКР)	0,3				
	Подготовка к текущему контролю	12				
	Общая трудоемкость по дисциплине	144				

Примечание: Л – лекции, ПЗ – практические занятия / семинары, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента

2.3 Содержание разделов (тем) дисциплины
2.3.1 Занятия лекционного типа

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Введение в теорию уравнений с частными производными.	Классификация квазилинейных уравнений второго порядка. Характеристики дифференциальных уравнений, теорема Ковалевской. Приведение к каноническому виду уравнений с двумя независимыми переменными.	ЛР: практическое использование теории на лабораторных занятиях при приведении к каноническому виду уравнений всех трех типов.
2.	Волновое уравнение.	Задача Коши для уравнения колебаний струны, формула Даламбера для однородного уравнения, понятие обобщенного решения. Метод распространяющихся волн для полуограниченной струны. Формулы Кирхгофа и Пуассона решений задачи Коши для волнового уравнения при трех и двух пространственных переменных, анализ качественного поведения решений. Построение решений смешанных задач для уравнения колебаний струны методом разделения переменных.	ЛР: непосредственным дифференцированием проверить, что добавление интегрального слагаемого в формулу Даламбера дает решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности; практическое использование схемы метода Фурье при решении конкретных примеров.
3.	Одномерное уравнение теплопроводности.	Постановка задачи Коши и смешанных задач для уравнения теплопроводности. Принцип максимума, единственность и устойчивость решения первой смешанной задачи. Построение решений смешанных задач с одной пространственной переменной методом разделения переменных.	ЛР: непосредственным дифференцированием проверить, что интегральная формула Пуассона дает решение уравнения теплопроводности; практическое использование схемы метода Фурье при

			решении конкретных примеров.
4.	Уравнения с оператором Лапласа.	Уравнения эллиптического типа. Классическая постановка граничных задач. Гармонические функции. Ньютонов и логарифмический потенциалы. Свойства минимума и максимума гармонических функций, единственность решения внутренней задачи Дирихле. Формула Пуассона для гармонических функций, ее следствия: теоремы Лиувилля и Гарнака, теорема об устранимой особенности. Метод Фурье для уравнения Пуассона в полярных координатах. Представление решений первой и второй граничных задач в круге, вне круга и в кольце.	ЛР: решение теоретических задач на основе свойств гармонических функций; практическое использование схемы метода Фурье при решении конкретных примеров построения гармонических функций в круговых областях.
5.	Теория потенциала для оператора Лапласа.	Фундаментальное решение оператора Лапласа, Ньютонов и логарифмический потенциалы. Объёмный потенциал. Поверхностные потенциалы. Сведение краевых задач для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям.	ЛР: выписывание интегральных уравнений, к которым сводятся задачи Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в круговых областях.

Защита лабораторной работы (ЛР).

2.3.2 Занятия семинарского типа не предусмотрены.

2.3.3 Лабораторные занятия

№	Наименование раздела	Тематика практических занятий	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Введение в теорию уравнений с частными производными.	Приведение к каноническому виду уравнений с двумя независимыми переменными. Интегрирование некоторых уравнений, нахождение их общих решений.	*Контрольная работа*.
2.	Волновое уравнение.	Метод распространяющихся волн для полуограниченной струны. Построение решений смешанных задач для уравнения колебаний струны методом разделения переменных. Решение первой смешанной задачи для волнового уравнения, когда начальное возмущение близко к одной из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля, явление резонанса.	*Отчет по лабораторной работе:* практическое использование схемы метода Фурье при решении конкретных примеров. *Контрольная работа* по методу Фурье для нестационарных

			уравнений.
3.	Одномерное уравнение теплопроводности.	Построение решений смешанных задач для однородного и неоднородного уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной методом разделения переменных в случае нулевых граничных условий. Сведение неоднородных граничных условий к однородным.	*Отчет по лабораторной работе:* практическое использование схемы метода Фурье при решении конкретных примеров.
4.	Уравнения с оператором Лапласа.	Уравнения эллиптического типа. Классическая постановка граничных задач. Гармонические функции. Ньютонов и логарифмический потенциалы. Свойства минимума и максимума гармонических функций, единственность решения внутренней задачи Дирихле. Формула Пуассона для гармонических функций, ее следствия: теоремы Лиувилля и Гарнака, теорема об устранимой особенности. Вывод оператора Лапласа в полярных координатах. Метод Фурье для уравнения Пуассона в полярных координатах. Представление решений первой и второй граничных задач в круге, вне круга и в кольце.	*Отчет по лабораторной работе:* практическое использование схемы метода Фурье при решении конкретных примеров построения гармонических функций в круговых областях. *Контрольная работа* по методу Фурье для уравнения Лапласа в полярных координатах.
5.	Теория потенциала для оператора Лапласа.	Фундаментальное решение оператора Лапласа, Ньютонов и логарифмический потенциалы. Объёмный потенциал. Поверхностные потенциалы. Сведение краевых задач для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям.	*Отчет по лабораторной работе:* выписывание интегральных уравнений, к которым сводятся задачи Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в круговых областях.

2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Курсовые работы не предусмотрены.

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы

1	Изучение лекционного материала; Подготовка отчета по лабораторной работе; Подготовка к экзаменам.	Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов утвержденные кафедрой вычислительной математики и информатики, протокол № 14 от 14.06.2017 г.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:
– в печатной форме увеличенным шрифтом,
– в форме электронного документа,
– в форме аудиофайла,
– в печатной форме на языке Брайля.

Для лиц с нарушениями слуха:
– в печатной форме,
– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
– в печатной форме,
– в форме электронного документа,
– в форме аудиофайла.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

3. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины (модуля)

Сочетание традиционных образовательных технологий в форме лекций и лабораторных работ, предполагающих активное участие студентов в решении конкретных задач по схемам, подробно изложенным на лекциях. Публичная защита каждым студентом выданного ему индивидуального задания по контролируемой самостоятельной работе.

Проведение контрольных мероприятий в форме отчетов преподавателю по выполненным лабораторным работам, а также традиционные контрольные работы, результаты которых учитываются на экзамене.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

Информационные технологии, применяемые при изучении дисциплины: использование информационных ресурсов, доступных в информационно-телекоммуникационной сети Интернет.

Адаптивные образовательные технологии, применяемые при изучении дисциплины – для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущей аттестации

Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины «Уравнения в частных производных».

Оценочные средства включает контрольные материалы для проведения **текущего контроля** в форме отчетов по выполненным лабораторным заданиям и **промежуточной аттестации** в форме вопросов и заданий к экзамену.

Текущий контроль качества подготовки осуществляется путем проверки теоретических знаний и практических навыков посредством

1) Проверки и приема текущих семестровых заданий и лабораторных работ. Проведение контрольных мероприятий в форме отчетов преподавателю по выполненным лабораторным работам с публичной защитой во время лабораторных занятий. Контрольные работы по приведению уравнений к каноническому виду и по методу Фурье для уравнений всех типов.

2) Подготовки к экзамену в конце семестра.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

Структура оценочных средств для текущей и промежуточной аттестации

№ п/п	Код и наименование индикатора (в соответствии с п. 1.4)	Результаты обучения (в соответствии с п. 1.4)	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	ИОПК-1.1. Демонстрирует навыки выполнения стандартных действий, решения типовых задач с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых математических и естественнонаучных дисциплин.	**Знает** классификацию квазилинейных уравнений второго порядка и корректные постановки основных краевых задач для каждого типа уравнений **Умеет** приводить к каноническому виду линейные уравнения с двумя переменными, интегрировать их, когда это возможно; строить решения простейших уравнений с постоянными коэффициентами методами разделения переменных и теории потенциалов **Владеет** техникой преобразований дифференциальных уравнений в результате	*Лабораторные работы по темам: Введение в теорию уравнений с частными производными; Волновое уравнение; Одномерное уравнение теплопроводности; Уравнения с оператором Лапласа; Теория потенциала для оператора Лапласа.*	*Вопросы на экзамене 1-3* *Задания к экзаменационным билетам 1-3, 5.*

		невырожденной замены независимых переменных		
2	ИОПК-1.2. Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	**Знает** место курса уравнений в частных производных в структуре отечественного математического образования **Умеет** объяснить идеи исследования математической корректности классических дифференциальных задач для линейных уравнений второго порядка в частных производных **Владеет** навыками доказательства теорем единственности и исследования устойчивости решений краевых задач для волнового уравнения, уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа.	*Лабораторные работы по темам: Введение в теорию уравнений с частными производными; Волновое уравнение; Одномерное уравнение теплопроводности; Уравнения с оператором Лапласа; Теория потенциала для оператора Лапласа.*	*Вопросы на экзамене 4-6; 10-11; 17-18. Задания к экзаменационным билетам 4; 6-10.*
3	ИПК-3.1 Демонстрирует навыки доказательства теорем существования и единственности решения классических задач линейной алгебры, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории уравнений	**Знает** корректные постановки граничных задач для линейных уравнений эллиптического типа, задачи Коши и смешанных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов. **Умеет** строить решения	*Лабораторные работы по темам: Введение в теорию уравнений с частными производными; Волновое уравнение; Одномерное уравнение теплопроводности; Уравнения с оператором Лапласа; Теория потенциала*	*Вопросы на экзамене 7-9; 12-15. Задания к экзаменационным билетам 5; 11-12.*

	математической физики	указанных краевых задач методами теории потенциала и методом разделения переменных. **Владеет** техническими приемами доказательства корректности указанных дифференциальных задач.	*для оператора Лапласа.*	
4	ИПК-3.2 Демонстрирует навыки доказательств устойчивости решений дифференциальных задач в классической и обобщенной постановках	**Знает** понятие устойчивости решения линейной дифференциальной задачи по свободному члену уравнения и по граничным и начальным условиям **Умеет** доказывать принципы максимума для решения однородного уравнения теплопроводности и для гармонических функций **Владеет** техникой исследования устойчивости решения волнового уравнения с помощью интеграла энергии.	*Лабораторные работы по темам: Введение в теорию уравнений с частными производными; Волновое уравнение; Одномерное уравнение теплопроводности; Уравнения с оператором Лапласа; Теория потенциала для оператора Лапласа.*	*Вопросы на экзамене 16-20. Задания к экзаменационным билетам 13-16.*

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Все контрольные вопросы и темы текущих лабораторных заданий указаны выше в таблице «Структура оценочных средств для текущей и промежуточной аттестации»

Примерные задания для самостоятельной работы

№	Задания
1.	Привести к каноническому виду уравнение с постоянными коэффициентами $a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-f\left(x,y,u\right)=0$. Подобрать ненулевые коэффициенты так, чтобы получились уравнения всех трех типов.
2.	Привести к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения уравнения $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=u.$
3.	Придумать и привести к каноническому виду уравнение с переменными коэффициентами в каждой из областей, где сохраняется тип рассматриваемого уравнения. Например, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.
4.	В полуполосе $D=\left\{\left(x;t\right):0<x<l;t>0\right\}$ для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=t\cdot\sin\frac{2\pi x}{l}$ решить смешанную задачу с граничными условиями $u\left(0;t\right)=0;\ u\left(l;t\right)=l\,t$ и с начальными условиями $u\left(x;0\right)=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}\left(x;0\right)=x+\sin\frac{3\pi}{l}x$.
5.	Вывести выражение оператора Лапласа в полярных, цилиндрических и в сферических координатах. На плоскости и в трехмерном пространстве найти все гармонические функции, которые не зависят от угловых переменных.
6.	Придумать пример и найти точки экстремума гармонической функции *u(x,y)* в замкнутой области. Например, $u=xy,\quad x^2+y^2\le 1$, либо $u=x^2-y^2,\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1$.
7.	В круге $x^2+y^2=r^2<R^2$, а также вне этого круга решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа с полиномиальной граничной функцией $g\left(x,y\right)$. Например, граничная функция $g\left(x,y\right)=xy^2$. Во внешней задаче учесть условие ограниченности решения. Реализовать ту же схему для задачи Неймана, учесть при этом необходимое условие для граничной функции.
8.	В круге $x^2+y^2=r^2<R^2$ решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона с полиномиальными свободным членом $f\left(x,y\right)$ и граничной функцией $g\left(x,y\right)$. Рассмотреть примеры многочленов первой-второй степени.
9.	Вычислить потенциал простого слоя $u\left(x,y\right)$ масс, распределенных по окружности $x^2+y^2=R^2$ с плотностью $\mu\left(x,y\right)=1$. Найти потенциал двойного слоя $u\left(x,y\right)$ зарядов, распределенных по окружности $x^2+y^2=R^2$ с плотностью $\mu\left(x,y\right)=x$.
10.	Привести первую краевую задачу для уравнения теплопроводности

	$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)$ в прямоугольнике $0<t<T, 0<x<1,$ с неоднородными граничными условиями на боковых сторонах $u(0,t)=\alpha(t), \quad u(1,t)=\beta(t), 0\le t\le T,$ к первой краевой задаче, но уже с однородными краевыми условиями на боковых сторонах. Построить частное решение неоднородного уравнения теплопроводности для $f(x,t)=\sin(nx)\cdot f_n(t)$, где $f_n(x)-$ заданная функция.
11.	Решить задачу Коши: $$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+5\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;\ u(x;0)=\sin x;\ \frac{\partial u}{\partial y}(x;0)=x.$$
12.	Методом характеристик найти общее решение уравнения $$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\sin(x+y).$$
13.	Непосредственной проверкой убедиться в том, что функция $U(x,t)=\frac{1}{(t-t_0)^{n/2}}\exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}{4(t-t_0)}\right]$, где $y_1,...,y_n-$ действительные параметры, при $t>t_0$ является решением однородного уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0$.
14.	Непосредственной проверкой показать, что формула Кирхгофа $u(x_1,x_2,x_3,t)=\frac{1}{4\pi}tM(\psi)+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[tM(\varphi)\right]$ дает решение задачи Коши для однородного волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0$ с достаточно гладкими начальными функциями: $u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)$. Здесь $M(\mu)=\int\limits_{\lvert y\rvert=1}\mu(x_1+ty_1,x_2+ty_2,x_3+ty_3)\,dS_y$, а $\mu(x_1,x_2,x_3)$ – заданная в пространстве R^3 функция с непрерывными частными производными второго прядка.
15	Вывести из формулы Кирхгофа принцип Гюйгенса: соответствующая задаче Коши для однородного волнового уравнения волна в точке (x_1,x_2,x_3,t) пространства R^4 однозначно определяется значениями $\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial\nu},\psi$ на сфере $\sum_{i=1}^{3}(z_i-x_i)^2=t^2$ радиуса t с центром в точке (x_1,x_2,x_3).
16	В предположении, что φ и ψ зависят только от двух пространственных переменных x_1 и x_2, вывести из формулы Кирхгофа формулу Пуассона

	$u\left(x_1,x_2,t\right)=$ $=\frac{1}{2\pi}\int\limits_K \frac{\psi\left(y_1,y_2\right)dy_1dy_2}{\sqrt{t^2+\left(y_1-x_1\right)^2+\left(y_2-x_2\right)^2}}+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_K \frac{\varphi\left(y_1,y_2\right)dy_1dy_2}{\sqrt{t^2+\left(y_1-x_1\right)^2+\left(y_2-x_2\right)^2}}$, где K – круг $\left(y_1-x_1\right)^2+\left(y_2-x_2\right)^2\le t^2$.

4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Теоретический экзамен в конце семестра.

Вопросы к экзамену по лекционному курсу

1. Классификация квазилинейных уравнений второго порядка. Классические краевые задачи для уравнений всех трех типов.
2. Характеристики линейных уравнений, их роль в приведении уравнения к каноническому виду.
3. Задача Коши для общего линейного дифференциального уравнения второго порядка. Теорема Ковалевской. Пример Адамара.
4. Интеграл энергии для решения волнового уравнения, единственность решения в характеристическом конусе.
5. Задача Коши для волнового уравнения. Вывод формулы Даламбера для однородного уравнения колебаний струны. Понятие обобщенного решения, предложенное С.Л.Соболевым.
6. Распространение вдоль струны волн, вызванных начальными возмущениями. Передний и задний фронты волны.
7. Формулы Пуассона и Кирхгофа решений задачи Коши для двух и трехмерного волнового уравнения, диффузия волн.
8. Метод Фурье в случае одной пространственной переменной для однородного и для неоднородного волнового уравнения с граничными условиями первого и второго рода.
9. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Интегральное представление решения формулой Пуассона.
10. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Единственность решения первой смешанной задачи и непрерывная зависимость его от граничной и начальной функций.
11. Задача Коши для уравнения теплопроводности, единственность решения в классе ограниченных функций.
12. Метод Фурье в случае одной пространственной переменной для однородного и для неоднородного уравнения теплопроводности. Функция Грина первой смешанной задачи.
13. Задача на собственные значения для эллиптического дивергентного оператора в ограниченной области. Доказательство самосопряженности оператора, оценка снизу порожденной им квадратичной формы.
14. Задача на собственные значения для эллиптического дивергентного оператора в ограниченной области. Свойства собственных значений и собственных функций.
15. Общая схема метода Фурье решения смешанных задач для уравнений гиперболического и параболического типов с эллиптической частью дивергентного вида.
16. Формула интегрирования по частям, первая и вторая формулы Грина, теорема об интегральном представлении гладкой функции.
17. Гармонические функции, их основные свойства: теоремы о среднем, принцип максимума, теорема об устранимой особенности.
18. Внутренние и внешние граничные задачи для гармонических функций. Условия регулярности на бесконечности. Фундаментальное решение как пример нарушения единственности в классе нерегулярных функций.

19. Понятие о функции Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области.

20. Метод Фурье для уравнения Лапласа в полярных координатах.

Примерный билет к экзамену
Билет № 1
по курсу «Уравнения в частных производных» для направления бакалавриата «Математика и компьютерные науки»

1. Классификация квазилинейных уравнений второго порядка. Классические краевые задачи для уравнений всех трех типов.

2. Непосредственной проверкой показать, что формула Кирхгофа $u\left(x_1,x_2,x_3,t\right)=\frac{1}{4\pi}tM\left(\psi\right)+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[tM\left(\varphi\right)\right]$ дает решение задачи Коши для однородного волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^{\,2}}=0$, $u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\left(x,0\right)=\psi\left(x\right)$. Здесь $M\left(\mu\right)=\int\limits_{|y|=1}\mu\left(x_1+ty_1,x_2+ty_2,x_3+ty_3\right)dS_y$.

Критерии оценивания результатов обучения

Оценка	*Критерии оценивания по экзамену*
Высокий уровень «5» (отлично)	*оценку «отлично» заслуживает студент, освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал без пробелов; выполнивший все задания, предусмотренные учебным планом на высоком качественном уровне; практические навыки профессионального применения освоенных знаний сформированы.*
Средний уровень «4» (хорошо)	*оценку «хорошо» заслуживает студент, практически полностью освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не оценены максимальным числом баллов, в основном сформировал практические навыки.*
Пороговый уровень «3» (удовлетворите льно)	*оценку «удовлетворительно» заслуживает студент, частично с пробелами освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, многие учебные задания либо не выполнил, либо они оценены числом баллов близким к минимальному, некоторые практические навыки не сформированы.*
Минимальный уровень «2» (неудовлетвори тельно)	*оценку «неудовлетворительно» заслуживает студент, не освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не выполнил, практические навыки не сформированы.*

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:
– в печатной форме увеличенным шрифтом,
– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:
– в печатной форме,
– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
– в печатной форме,
– в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

5.1 Основная литература:

1. Ильин А.М., Уравнения математической физики, издательство «Физматлит»,2009, 192 стр., http://e.lanbook.com/view, электронные ресурсы библиотеки КубГУ.
2. Владимиров В.С., Жаринов В.В., Уравнения математической физики, издательство «Лань»,2000, 400 стр., http://e.lanbook.com/view, электронные ресурсы библиотеки КубГУ.

5.2 Дополнительная литература:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, издательство «Наука», любое издание.
2. Петровский И.Г., Лекции об уравнениях с частными производными, «Физматлит», «Наука», любое издание.
3. Михайлов В.П., Дифференциальные уравнения в частных производных, издательство «Наука»,1983, 424 стр.

5.2. Периодическая литература

Использование периодической литературы не предусмотрено

5.3. Интернет-ресурсы, в том числе современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Электронно-библиотечные системы (ЭБС):

1. ЭБС «ЮРАЙТ» https://urait.ru/
2. ЭБС «УНИВЕРСИТЕТСКАЯ БИБЛИОТЕКА ОНЛАЙН» www.biblioclub.ru
3. ЭБС «BOOK.ru» https://www.book.ru
4. ЭБС «ZNANIUM.COM» www.znanium.com
5. ЭБС «ЛАНЬ» https://e.lanbook.com

Профессиональные базы данных:

1. Web of Science (WoS) http://webofscience.com/
2. Scopus http://www.scopus.com/
3. ScienceDirect www.sciencedirect.com
4. Журналы издательства Wiley https://onlinelibrary.wiley.com/
5. Научная электронная библиотека (НЭБ) http://www.elibrary.ru/
6. Полнотекстовые архивы ведущих западных научных журналов на Российской платформе научных журналов НЭИКОН http://archive.neicon.ru

7. Национальная электронная библиотека (доступ к Электронной библиотеке диссертаций Российской государственной библиотеки (РГБ) https://rusneb.ru/
8. Президентская библиотека им. Б.Н. Ельцина https://www.prlib.ru/
9. Электронная коллекция Оксфордского Российского Фонда https://ebookcentral.proquest.com/lib/kubanstate/home.action
10. Springer Journals https://link.springer.com/
11. Nature Journals https://www.nature.com/siteindex/index.html
12. Springer Nature Protocols and Methods https://experiments.springernature.com/sources/springer-protocols
13. Springer Materials http://materials.springer.com/
14. zbMath https://zbmath.org/
15. Nano Database https://nano.nature.com/
16. Springer eBooks: https://link.springer.com/
17. "Лекториум ТВ" http://www.lektorium.tv/
18. Университетская информационная система РОССИЯ http://uisrussia.msu.ru

Информационные справочные системы:

1. Консультант Плюс - справочная правовая система (доступ по локальной сети с компьютеров библиотеки)

Ресурсы свободного доступа:

1. Американская патентная база данных http://www.uspto.gov/patft/
2. Полные тексты канадских диссертаций http://www.nlc-bnc.ca/thesescanada/
3. КиберЛенинка (http://cyberleninka.ru/);
4. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации https://www.minobrnauki.gov.ru/;
5. Федеральный портал "Российское образование" http://www.edu.ru/;
6. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" http://window.edu.ru/;
7. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов http://school-collection.edu.ru/ .
8. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (http://fcior.edu.ru/);
9. Проект Государственного института русского языка имени А.С. Пушкина "Образование на русском" https://pushkininstitute.ru/;
10. Справочно-информационный портал "Русский язык" http://gramota.ru/;
11. Служба тематических толковых словарей http://www.glossary.ru/;
12. Словари и энциклопедии http://dic.academic.ru/;
13. Образовательный портал "Учеба" http://www.ucheba.com/;
14. Законопроект "Об образовании в Российской Федерации". Вопросы и ответы http://xn--273--84d1f.xn--p1ai/voprosy_i_otvety

Собственные электронные образовательные и информационные ресурсы КубГУ:

1. Среда модульного динамического обучения http://moodle.kubsu.ru
2. База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций http://mschool.kubsu.ru/
3. Электронный архив документов КубГУ http://docspace.kubsu.ru/

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Лекции и лабораторные занятия проводятся еженедельно. Общение преподавателя и студентов на лабораторных занятиях предполагает предварительную проработку студентами конспекта лекций. Задача преподавателя состоит в расстановке акцентов и разъяснении смысла и необходимости введения ключевых понятий теории уравнений в частных производных. Для полноценного восприятия новых объектов необходима иллюстрация их практического применения. Такими примерами в курсе являются дифференциальные задачи для простейших уравнений математической физики, представляющих каждый из трех типов классификации.

В данном ознакомительном курсе показаны способы понижения размерности дифференциальной задачи с помощью разделения переменных, либо сведения посредством теории потенциала дифференциальных задач в области к интегральным уравнениям на границе этой области. Решение задач меньшей размерности возможно специальными численными методами, что соответствует специализации кафедры.

На лабораторных занятиях студентам предлагаются примеры для применения теории, изложенной на лекциях. Обсуждение способов решения предлагаемых задач призвано активизировать познавательную деятельность студентов. Этому должна способствовать практическая направленность итоговых результатов.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

7. Материально-техническое обеспечение по дисциплине (модулю)

Наименование специальных помещений	Оснащенность специальных помещений	Перечень лицензионного программного обеспечения
Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа	Лекционная аудитория, оборудованная обычной доской. Ауд. 303 Н, 308 Н, 505 Н, 507 Н.	
Учебные аудитории для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, оборудованная обычной доской. Ауд. 302 Н,303Н, 308 Н, 505 Н, 507 Н.	
Групповые (индивидуальные) консультации	Учебная аудитория для проведения индивидуальных и групповых консультаций. Ауд. 302 Н,303Н, 308 Н, 505 Н, 507 Н.	
Текущий контроль, промежуточная аттестация	Учебная аудитория для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации. Ауд. 302 Н,303Н, 308 Н, 505 Н, 507	

	Н.	

Для самостоятельной работы обучающихся предусмотрены помещения, укомплектованные специализированной мебелью, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

Наименование помещений для самостоятельной работы обучающихся	Оснащенность помещений для самостоятельной работы обучающихся	Перечень лицензионного программного обеспечения
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (читальный зал Научной библиотеки)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (ауд. 302)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование,	

	обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	