МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе, качеству образования – первый проректор
______________ Т.А. Хагуров
подпись
«___» ___мая___ 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Б1.О.40 ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Направление подготовки/специальность	01.05.01 Фундаментальные математика и механика
Направленность (профиль) / специализация	Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг; Фундаментальная математика и ее приложения
Форма обучения	Очная
Квалификация	Математик. Механик. Преподаватель

Краснодар 2022

Рабочая программа дисциплины Б1.О.40 Обобщенные функции составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Программу составил(и):

С.В. Гайденко, зав. кафедрой Вычислительной математики и информатики, кандидат физико-математических наук, доцент

подпись

Рабочая программа дисциплины Б1.О.40 Обобщенные функции утверждена на заседании кафедры вычислительной математики и информатики
протокол № 14 «22» апреля 2022 г.
Заведующий кафедрой вычислительной математики и информатики

Гайденко С.В.
фамилия, инициалы

подпись

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета Математики и компьютерных наук
протокол № 5 «5» мая 2022 г.
Председатель УМК факультета Шмалько С.П.
фамилия, инициалы
подпись

Рецензенты:
Терещенко И.В., к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой общей математики Кубанского государственного технологического университета
Уртенов М.Х., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Кубанского государственного университета

1 Цели и задачи изучения дисциплины (модуля)

1.1 Цель освоения дисциплины

Сформировать у студентов представления о современных подходах к понятию функции и необходимости его расширения в математических моделях физических явлений и процессов.

1.2 Задачи дисциплины

Показать естественность понятия обобщенного решения дифференциальных задач, моделирующих физические процессы с негладкими данными, когда классическое решение может не существовать.

1.3 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина «Обобщенные функции» относится к обязательной части Блока 1 "Дисциплины (модули)" учебного плана, являющегося структурным элементом ООП ВО по специальности «Фундаментальная математика и механика». Студенты должны быть готовы использовать полученные в этой области знания, как при изучении смежных дисциплин, так и в профессиональной деятельности. Для полноценного понимания курса необходимы знания, умения и навыки, заложенные в курсах математического анализа, линейной алгебры, функционального анализа, дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, дисциплин специализаций.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся компетенции ОПК-1, ПК-1.

Код и наименование индикатора* достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	
ОПК-1.1 Знает актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики	**Знает** классические постановки задач алгебры, математического анализа, теории функций, функционального анализа, теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и для линейных уравнений в частных производных.
	Умеет исследовать корректность постановок задач фундаментальной математики.
	Владеет техникой исследования обобщенных аналогов классических задач фундаментальной математики.
ОПК-1.2 Осуществляет выбор методов решения задач фундаментальной математики	**Знает** традиционные приемы и технологии решения классических задач фундаментальной математики.
	Умеет применять интегральные преобразования к дифференциальным задачам с целью понижения размерности этих задач
	Владеет техникой обращения преобразований Фурье и Лапласа в пространствах основных и обобщенных функций.
ОПК-1.3 Владеет навыками формализации актуальных задач фундаментальной	**Знает** корректные классические и обобщенные постановки задач фундаментальной

Код и наименование индикатора* достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
математики и применения подходящих методов их решения	математики и математической физики.
	Умеет применять известные приемы аналитического и приближенного решения формализованных задач математики и математической физики.
	Владеет навыками алгоритмизации методов приближенного численного решения прикладных задач.
ПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики	
ПК-1.1 Знает основные понятия, идеи и методы фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач	**Знает** понятие корректности постановки краевой задачи по свободному члену дифференциального уравнения и по свободным членам в краевых и начальных условиях.
	Умеет оценивать нормы обобщенных решений классических дифференциальных задач через нормы свободных членов.
	Владеет навыками построения дискретных аналогов математических моделей задач механики и математической физики.
ПК-1.3 Самостоятельно и корректно решает стандартные задачи фундаментальной и прикладной математики	**Знает** о вычислительной неустойчивости операции численного дифференцирования, а также о возможной некорректности интегральных уравнений первого рода.
	Умеет выделить класс решений математической модели, соответствующий реальному поведению моделируемого явления.
	Владеет навыками представления классического или обобщенного решения функциональной задачи в аналитическом виде либо в приближенном виде.
ПК-1.4 Имеет навыки решения математических задач, соответствующих квалификации, возникающих при проведении научных и прикладных исследований	**Знает** пространства основных и обобщенных функций, операции, заданные на элементах этих пространств.
	Умеет применять интегральные преобразования Фурье и Лапласа как в пространствах регулярных функций, так и в пространствах обобщенных функций.
	Владеет навыками применения операционного исчисления к дифференциальным, интегральным уравнениям, а также к сверточным уравнениям для обобщенных функций.

Результаты обучения по дисциплине достигаются в рамках осуществления всех видов контактной и самостоятельной работы обучающихся в соответствии с утвержденным учебным планом.

Индикаторы достижения компетенций считаются сформированными при достижении соответствующих им результатов обучения.

2. Структура и содержание дисциплины

2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 2 зач. ед. (72 часа), их распределение по видам работ представлено в таблице

(для студентов ОФО)

Вид учебной работы		Всего часов	Семестры (часы)			
			10			
Контактная работа, в том числе:		**36,2**	**36,2**			
Аудиторные занятия (всего):		**30**	**30**			
Занятия лекционного типа		10	10			
Лабораторные занятия		20	20			
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)		-	-			
Иная контактная работа:		**6,2**	**6,2**			
Контроль самостоятельной работы (КСР)		6	6			
Промежуточная аттестация (ИКР)		0,2	0,2			
Самостоятельная работа, в том числе:		**35,8**	**35,8**			
Курсовая работа		-	-			
Проработка учебного (теоретического) материала		18	18			
Выполнение индивидуальных заданий (подготовка сообщений, презентаций)		12	12			
Реферат		-	-			
Подготовка к текущему контролю		5,8	5,8			
Контроль:						
Подготовка к экзамену		-	-			
Общая трудоемкость	**час.**	**72**	**72**			
	в том числе контактная работа	**36,2**	**36,2**			
	зач. ед	**2**	**2**			

2.2 Содержание дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы (темы) дисциплины, изучаемые в 10 семестре *(очная форма обучения)*

№	Наименование разделов (тем)	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	СРС
1.	Основные и обобщенные функции.	12	2	-	4	6
2.	Обобщенные производные, пространства С.Л.Соболева.	14	2	-	4	8
3.	Прямое произведение и свертка обобщенных функций.	14	2	-	4	8

4.	Обобщенные функции медленного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста.	14	2	-	4	8
5.	Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление).	11,8	2	-	4	5,8
	ИТОГО по разделам дисциплины	65,8	10	-	20	35,8
	Контроль самостоятельной работы (КСР)	6				
	Промежуточная аттестация (ИКР)	0,2				
	Подготовка к текущему контролю	5,8				
	Общая трудоемкость по дисциплине	72				

Примечание: Л – лекции, ПЗ – практические занятия / семинары, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента

2.3 Содержание разделов (тем) дисциплины

2.3.1 Занятия лекционного типа

№	Наименование раздела (темы)	Содержание раздела (темы)	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Основные и обобщенные функции.	Пространство основных функций D. Пространство обобщенных функций D'. Полнота пространства обобщенных функций D'. Носитель обобщенной функции. Сингулярные обобщенные функции. Формулы Сохоцкого. Линейная замена переменных в обобщенных функциях. Умножение обобщенных функций. Плотность бесконечно дифференцируемых финитных функций в пространствах интегрируемых функций.	ЛР: Текущий контроль усвоения теоретического материала проводится по отчетам студентов о их решениях задач, примеры которых приведены ниже.
2.	Обобщенные производные, пространства С.Л.Соболева.	Многомерная формула интегрирования по частям, ее эквивалентность формуле Гаусса-Остроградского. Определение и простейшие свойства обобщенных производных: Единственность, независимость от порядка дифференцирования, последовательное дифференцирование. Примеры обобщенных производных в пространствах С.Л. Соболева. Обобщенные производные и усреднения функций: перестановочность операций и сходимость в интегральных нормах производных от усреднений к обобщенным производным усредняемой функции. Связь обобщенных производных с конечноразностными отношениями: сходимость	ЛР: Текущий контроль усвоения теоретического материала проводится по отчетам студентов о их решениях задач, примеры которых приведены ниже.

		разностных отношений к обобщенным производным, достаточное условие существования первой обобщенной производной. Соболевские пространства со скалярным произведением и их свойства: полнота, сходимость усреднений в подобласти, инвариантность при невырожденной замене переменных. Теоремы о продолжении. Плотность гладких функций в пространствах С.Л. Соболева. След функции на гладкой гиперповерхности. Свойства следов: формула интегрирования по частям для функций из пространств С.Л. Соболева. Непрерывность следов при параллельном переносе поверхности. Теоремы о компактности вложений пространств С.Л. Соболева в пространства интегрируемых функций. Эквивалентные нормы в пространствах С.Л. Соболева. Непрерывность и непрерывная дифференцируемость функций из пространств С.Л. Соболева. Теоремы вложения в пространства гладких функций.	
3.	Прямое произведение и свертка обобщенных функций.	Определение прямого произведения. Коммутативность прямого произведения. Свойства прямого произведения. Свертка обобщенных функций. Свойства свертки. Существование свертки. Сверточная алгебра обобщенных функций D'_+. Уравнения в сверточной алгебре D'_+. Регуляризация обобщенных функций. Примеры сверток. Ньютонов потенциал.	Студенческий доклад о модели равновесия мембраны с максимально активным участием всех членов группы в обсуждении модели.
4.	Обобщенные функции медленного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста.	Пространство основных функций S. Пространство обобщенных функций S'. Примеры обобщенных функций медленного роста. Структура обобщенных функций с точечным носителем. Прямое произведение обобщенных функций медленного роста. Свертка обобщенных функций медленного роста. Преобразование Фурье основных функций из S. Преобразование Фурье обобщенных функций из S'. Свойства преобразования Фурье. Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем. Преобразование Фурье свертки.	ЛР: Текущий контроль усвоения теоретического материала проводится по отчетам студентов о их решениях задач, примеры которых приведены ниже.
5.	Преобразование Лапласа	Преобразование Лапласа локально интегрируемых функций. Преобразование	ЛР: Текущий

	обобщенных функций (операционное исчисление).	Лапласа обобщенных функций. Свойства преобразования Лапласа. Обратное преобразование Лапласа. Примеры применения.	контроль усвоения теоретического материала проводится по отчетам студентов о их решениях задач, примеры которых приведены ниже. Доклады студентов о модификациях метода Галёркина применительно к разным краевым задачам.

2.3.2 Занятия семинарского типа не предусмотрены

2.3.3 Лабораторные занятия

№	Наименование лабораторных работ	Форма текущего контроля
1	3	4
1.	Множества меры нуль. Решение задач по свойствам интеграла Лебега. Усреднение интегрируемых функций. Примеры усреднений. Многомерная формула интегрирования по частям, формулы Грина.	*Отчет по лабораторной работе:* решение задач у доски совместно с преподавателем, а также отчеты студентов по решению задач, предложенных в качестве самостоятельной работы.
2.	Примеры вычисления обобщенных производных функций нескольких переменных. Пространства С.Л. Соболева. Плотность гладких функций в пространствах С.Л. Соболева. Кусочно-линейные аппроксимации функций одного и двух независимых аргументов. След функции на гладкой гиперповерхности. Свойства следов. Нормы в пространствах С.Л. Соболева, порожденные эллиптическими дифференциальными операторами.	*Отчет по лабораторной работе:* решение задач у доски совместно с преподавателем, а также отчеты студентов по

		решению задач, предложенных в качестве самостоятельной работы.
3.	Классические и обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Нестационарные краевые задачи и их обобщенные решения.	*Отчет по лабораторной работе:* решение задач у доски совместно с преподавателем, а также отчеты студентов по решению задач, предложенных в качестве самостоятельной работы.
4.	Операторное уравнение в гильбертовом пространстве. Сведение его к вариационной задаче. Энергетические пространства самосопряженных эллиптических операторов.	*Отчет по лабораторной работе:* решение задач у доски совместно с преподавателем, а также отчеты студентов по решению задач, предложенных в качестве самостоятельной работы.
5.	Метод Ритца для самосопряженного эллиптического уравнения с граничными условиями Дирихле и Неймана. Метод конечных элементов. Структура матрицы Грамма для двумерного оператора Лапласа в прямоугольной области. Метод Галеркина для нестационарных краевых задач.	*Отчет по лабораторной работе:* решение задач у доски совместно с преподавателем, а также отчеты студентов по решению задач, предложенных в качестве самостоятельной работы.

Защита лабораторной работы (ЛР), выполнение курсового проекта (КП), курсовой работы (КР), расчетно-графического задания (РГЗ), написание реферата (Р), эссе (Э), коллоквиум (К), тестирование (Т) и т.д.

2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Курсовые работы не предусмотрены.

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	Изучение лекционного материала; Подготовка отчета по лабораторной работе; Подготовка к зачету.	Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов утвержденные кафедрой вычислительной математики и информатики, протокол № 14 от 14.06.2017 г.
2	Изучение лекционного материала; Подготовка отчета по лабораторной работе; Подготовка к зачету	Электронный вариант методического пособия с основными определениями, условиями задач и методическими рекомендациями по их решению.
3	Изучение лекционного материала; Подготовка отчета по лабораторной работе; Подготовка к зачету	Электронный конспект лекций.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:
– в печатной форме увеличенным шрифтом,
– в форме электронного документа,
– в форме аудиофайла,
– в печатной форме на языке Брайля.

Для лиц с нарушениями слуха:
– в печатной форме,
– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
– в печатной форме,
– в форме электронного документа,
– в форме аудиофайла.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

3. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины

Интерактивные технологии в 10-м семестре предусмотрены во всех лабораторных занятиях в объеме 20 часов.

Используемые интерактивные образовательные технологии	Количество часов
Дискуссия на тему: «Интеграл Лебега – необходимое расширение интеграла Римана для полноты пространств интегрируемых функций» с презентациями	4

примеров, интегрируемых по Лебегу, но не интегрируемых по Риману функций.	
Дискуссия на тему: «Способы усреднения интегрируемых функций. Аппроксимации интегрируемых функций бесконечно дифференцируемыми функциями».	2
Дискуссия о возможных предельно плотных последовательностях конечномерных подпространств в пространствах С.Л.Соболева.	2
Защита индивидуального проекта по аппроксимации финитными сплайнами скалярных функций и решений дифференциальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.	2
Тренинг по вычислению обобщенных производных функций от двух независимых переменных.	4
Защита индивидуального проекта аппроксимации кусочно-линейными непрерывными сплайнами функций из пространств Соболева С.Л. в плоских областях.	2
Тренинг по расчету скалярных произведений двумерных базисных финитных сплайнов в энергетических пространствах эллиптического оператора в дивергентной форме.	2
Компьютерная симуляция равновесия мембраны с закрепленной или свободной границей. Защита индивидуального проекта.	2

Текущий контроль качества подготовки осуществляется путем проверки теоретических знаний и практических навыков посредством

1) Привлечения студентов к активному обсуждению определений, новых для них результатов, к решению теоретических задач у доски,

2) Публичной защиты самостоятельно решенных задач,

3) Выступлений с докладами, подготовленными самостоятельно на основе предложенной преподавателем литературы.

4) Подготовки к зачету в конце семестра.

Информационные технологии, применяемые при изучении дисциплины: использование информационных ресурсов, доступных в информационно-телекоммуникационной сети Интернет.

Адаптивные образовательные технологии, применяемые при изучении дисциплины – для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины «Обобщенные решения краевых задач».

Оценочные средства включает контрольные материалы для проведения **текущего контроля** в форме решения приводимых ниже задач, *доклада-презентации по* *проблемным вопросам,* и **промежуточной аттестации** в форме теоретических вопросов и заданий к зачету.

Структура оценочных средств для текущей и промежуточной аттестации

№ п/п	Код и наименование индикатора (в соответствии с п. 1.4)	Результаты обучения (в соответствии с п. 1.4)	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	ОПК-1.1 Знает актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики	**Знает** классические постановки задач алгебры, математического анализа, теории функций, функционального анализа, теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и для линейных уравнений в частных производных. **Умеет** исследовать корректность постановок задач фундаментальной математики. **Владеет** техникой исследования обобщенных аналогов классических задач фундаментальной математики.	Задачи для самостоятельного решения: 1-7	Вопросы по лекционному курсу:1-4
2	ОПК-1.2 Осуществляет выбор методов решения задач фундаментальной математики	**Знает** традиционные приемы и технологии решения классических задач фундаментальной математики. **Умеет** применять интегральные преобразования к дифференциальным задачам с целью понижения размерности этих з **Владеет** техникой обращения преобразований Фурье и Лапласа в пространствах основных и	Задачи для самостоятельного решения: 8-15	Вопросы по лекционному курсу:5-9

		обобщенных функций.		
3	ОПК-1.3 Владеет навыками формализации актуальных задач фундаментальной математики и применения подходящих методов их решения	**Знает** корректные классические и обобщенные постановки задач фундаментальной математики и математической физики. **Умеет** применять известные приемы аналитического и приближенного решения формализованных задач математики и математической физики. **Владеет** навыками алгоритмизации методов приближенного численного решения прикладных задач.	Задачи для самостоятельного решения: 16-22	Вопросы по лекционному курсу:10-14
4	ПК-1.1 Знает основные понятия, идеи и методы фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач	**Знает** понятие корректности постановки краевой задачи по свободному члену дифференциального уравнения и по свободным членам в краевых и начальных условиях. **Умеет** оценивать нормы обобщенных решений классических дифференциальных задач через нормы свободных членов. **Владеет** навыками построения дискретных аналогов математических моделей задач	Задачи для самостоятельного решения: 23-28	Вопросы по лекционному курсу:15-19

		механики и математической физики.		
5	ПК-1.3 Самостоятельно и корректно решает стандартные задачи фундаментальной и прикладной математики	**Знает** о вычислительной неустойчивости операции численного дифференцирования, а также о возможной некорректности интегральных уравнений первого рода. **Умеет** выделить класс решений математической модели, соответствующий реальному поведению моделируемого явления. **Владеет** навыками представления классического или обобщенного решения функциональной задачи в аналитическом виде либо в приближенном виде.	Задачи для самостоятельного решения: 29-35	Вопросы по лекционному курсу:20-23
6	ПК-1.4 Имеет навыки решения математических задач, соответствующих квалификации, возникающих при проведении научных и прикладных исследований	**Знает** пространства основных и обобщенных функций, операции, заданные на элементах этих пространств. **Умеет** применять интегральные преобразования Фурье и Лапласа как в пространствах регулярных функций, так и в пространствах	Задачи для самостоятельного решения: 36-41	Вопросы по лекционному курсу:24-28

		обобщенных функций. **Владеет** навыками применения операционного исчисления к дифференциальным, интегральным уравнениям, а также к сверточным уравнениям для обобщенных функций.		

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что прямая на плоскости является множеством двумерной меры нуль.
2. Докажите, что $(n-1)$–мерная поверхность класса C^1 является множеством n–мерной меры нуль.
3. Докажите утверждение: E– множество n–мерной меры нуль тогда и только тогда, когда существует счетное покрытие этого множества кубами с конечным суммарным объёмом такое, что каждая точка множества E покрыта бесконечным числом кубов.
4. Основываясь на определении измеримой в области Q функции как предела почти всюду последовательности из $C(\overline{Q})$, докажите измеримость любой функции из $C(Q)$.
5. Докажите, что предел почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций есть функция измеримая.
6. Докажите, что если $f_k \in C(\overline{Q})$ и $f_k \uparrow f \geq 0$ почти всюду в области Q при $k \to \infty$, то $\sup\limits_k \int\limits_Q f_k(x)dx \geq 0$.
7. Покажите, что всякая собственно интегрируемая в области Q по Риману функция интегрируема и по Лебегу.
8. Покажите, что функция Дирихле интегрируема по Лебегу, но неинтегрируема по Риману.
9. Докажите теорему: всякая интегрируемая по Лебегу неотрицательная почти всюду в области Q функция $f(x)$ равна нулю почти всюду тогда и только тогда, когда $\int\limits_Q f(x)dx = 0$.
10. Покажите, что $C(\overline{Q})$ всюду плотно в $L_1(Q)$.
11. Покажите, что если область Q ограничена, то $L_1(Q)$– сепарабельное банахово пространство.
12. Покажите, что из всякой сходящейся в $L_1(Q)$ последовательности можно выделить сходящуюся почти всюду подпоследовательность.

13. При каких значениях α следующие функции принадлежат пространству $L_1(Q)$:

а) $f(x)=|x|^\alpha$, $Q=\{x\in R_n: |x|<1\}$;

б) $f(x)=|x|^\alpha$, $Q=\{x\in R_n: |x|>1\}$;

в) $f(x)=|x|^\alpha$, $Q=R_n$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{(1-|x|)^\alpha}$, $Q=\{x\in R_n: |x|<1\}$;

д) $f(x)=\dfrac{1}{(1-|x|)^\alpha}$, $Q=\{x\in R_n: |x|>1\}$?

14. Покажите, что если $f(x)\in L_1(Q)$, то $|f(x)|\in L_1(Q)$ и $\left|\int\limits_Q f(x)dx\right|\le\int\limits_Q |f(x)|dx$.

15. Пусть $f_k(x)\in C(\overline{Q})$, $\left|\int\limits_Q f_k(x)dx\right|\le const$ и $f_k\to f$ почти всюду в Q при $k\to\infty$. Верно ли равенство $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_Q f_k(x)dx=\int\limits_Q f(x)dx$?

16. Докажите непрерывность нормы.

17. Докажите, что всякая сходящаяся по норме последовательность в гильбертовом пространстве сходится также слабо к тому же предельному элементу.

18. Покажите, что последовательность $sin(kx), k=1,2,...$, сходится слабо к нулю в $L_2(0,2\pi)$, но не сходится в норме $L_2(0,2\pi)$.

19. Пусть последовательность элементов f_k гильбертова пространства сходится слабо к f при $k\to\infty$ и при этом $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k\|=\|f\|$. Покажите, что f_k сходится к f по норме.

20. Покажите, что $L_2(Q)$ линейное пространство.

21. Покажите, что если мера области Q конечна, то $L_2(Q)\subset L_1(Q)$, но обратное включение не имеет места.

22. Покажите, что если мера области Q конечна, то из сходимости последовательности f_k к f по норме пространства $L_2(Q)$ следует сходимость последовательности интегралов: $\int\limits_Q f_k(x)dx\to\int\limits_Q f(x)dx$.

23. Докажите, что для любых функций f и g из пространства $L_2(Q)$ выполнено неравенство Минковского

$$\left(\int\limits_Q \left(f(x)+g(x)\right)^2 dx\right)^{1/2}\le\left(\int\limits_Q f^2(x)dx\right)^{1/2}+\left(\int\limits_Q g^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

24. Докажите следствие теорем Б.Леви и Лебега: если $f_k(x)\in L_1(Q)$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_Q |f_k(x)|dx$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ абсолютно сходится почти всюду в Q, функция $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ принадлежит $L_1(Q)$ и $\int_Q f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_Q f_k(x)dx$.

25. Покажите, что если область Q ограничена, то $L_2(Q)$ – сепарабельное гильбертово пространство.

27. Используя операцию усреднения, докажите, что множество финитных функций $\dot{C}^{\infty}(Q)$ всюду плотно в $L_1(Q)$ и в $L_2(Q)$.

28. Пусть $f,g\in L_2(Q)$ и одна из этих функций финитна. Докажите «формулу интегрирования по частям» для разделённых разностей $\left(\delta_h^k f,g\right)_{L_2(Q)}=-\left(f,\delta_{-h}^k g\right)_{L_2(Q)}$.

29. Покажите ортогональность в $L_2(-1;1)$ ортогональность многочленов Лежандра $L_n(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^n\right]$.

30. Покажите ортогональность в $L_{2;\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1;1)$ ортогональность многочленов Чебышёва $T_n(x)=\cos\left[n(\arccos x)\right]$.

31. Пусть у функции $f(x)$ в области Q существует обобщенная производная $D^{\alpha}f(x)=F(x)$, а у функции $F(x)$ существует обобщенная производная $D^{\beta}F(x)=G(x)$. Покажите, что существует обобщенная производная $D^{\alpha+\beta}f(x)=G(x)$.

32. Покажите, что из существования обобщенной производной $D^{\alpha}f(x)$ не следует существования обобщенной производной $D^{\beta}f(x)$ при $\beta_i\le\alpha_i$, $i=1,\dots,n$, $|\beta|<|\alpha|$.

33. Докажите, что обобщенная производная финитной функции финитна.

34. Докажите, что $f(x_1,x_2)=sign(x_1)\notin H^1\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}<1\right)$.

35. Докажите, что $f(x_1,x_2)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\in H^1\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}<1\right)$.

36. Докажите, что если $f(x)\in H^1(a;b)$ и $f'(x)=0$ почти всюду, то $f(x)=const$.

37. Докажите формулу интегрировании по частям для функций из $H^1(Q)$, предполагая её справедливой для функций из $C^1(\bar{Q})$.

38. Покажите, что $H^1(Q) \not\subset C(Q)$ при $Q \subset R_2$.

39. Докажите, что функция $f(x)$ из $L_2(0;\pi)$ принадлежит $\overset{0}{H}{}^1(0;\pi)$ тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2$, где $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$.

40. Докажите, что для любой функции $f \in \overset{0}{H}{}^1(0;\pi)$ выполняется неравенство Стеклова $\int_0^{\pi} f^2(x)dx \le \int_0^{\pi} f'^2(x)dx$. Найдите функцию $f_1 \in \overset{0}{H}{}^1(0;\pi)$, для которой это неравенство превращается в равенство. Покажите, что если $f(x) \ne cf_1(x)$, где с – постоянная, то для функции $f(x)$ неравенство строгое.

41. Пусть $x = (x_1, x_2) = (r\cos\varphi; r\sin\varphi)$ и функция $f(x_1, x_2) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$ принадлежит $H^1(|x| < 1)$. Выразите через a_k и b_k интеграл $\int_0^{\pi}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + f^2\right)dx$.

Зачетно-экзаменационные материалы для промежуточной аттестации (зачет)

Вопросы по лекционному курсу

1. Функции, интегрируемые по Лебегу. Сравнение интегралов Римана и Лебега.
2. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.
3. Дифференцируемость интеграла Лебега по параметру. Теорема Фубини о сведении двойного интеграла к повторному и ее следствие о равенстве повторного интеграла двойному.
4. Гладкая (n-1) – мерная поверхность. Интеграл Лебега по (n-1) – мерной поверхности.
5. Линейные нормированные пространства. Понятия полноты, плотности, сепарабельности. Примеры функциональных банаховых пространств.
6. Гильбертово пространство. Ортогональные системы, коэффициенты и ряды Фурье, неравенство Бесселя.
7. Полные системы в гильбертовом пространстве. Изоморфизм и изометрия сепарабельных гильбертовых пространств.
8. Пространства $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$, их полнота. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега и непрерывность его в среднем.
9. Ядро усреднения и его свойства. Срезающая функция для области. Усреднения функций из $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$, их сходимость.
10. Классическая формула интегрирования по частям, ее эквивалентность формуле Гаусса-Остроградского. Определение обобщенной производной первого порядка.

11. Обобщенные производные произвольного порядка, их свойства: единственность, независимость от порядка дифференцирования, линейность операции дифференцирования. Обобщенная производная финитной функции.
12. Обобщенные производные функций $|x|$, $|x_1|$ и $sign(x_1)$ в n – мерном шаре.
13. Гильбертовы пространства $H^k(Q)$ и их простейшие свойства.
14. Обобщенные производные и средние функции. Сходимость усреднений в норме пространства H^k.
15. След функции из $H^1(Q)$ на гладкой (n-1) – мерной поверхности. Формула интегрирования по частям для функций из пространства $H^1(Q)$.
16. Теоремы вложения пространств $L_p(Q)$ друг в друга, вложения пространств $H^k(Q)$ в $C^l(\overline{Q})$.
17. Теоремы о продолжении. Плотность пространства гладких функций в пространствах $H^k(Q)$. Пространства $\overset{0}{H}{}^k(Q)$.
18. Эквивалентные нормировки пространств $H^1(Q)$ и $\overset{0}{H}{}^1(Q)$. Неравенство Стеклова В.А.
19. Классические и обобщенные решения краевых задач для линейного эллиптического уравнения второго порядка.
20. Доказательство корректности обобщенной постановки задачи Дирихле, основанное на теореме Рисса.
21. Доказательство корректности обобщенной постановки третьей краевой задачи для линейного эллиптического уравнения второго порядка, основанное на теореме Рисса.
22. Вариационная задача для квадратичного функционала в гильбертовом пространстве. Лемма о минимизирующей последовательности.
23. Последовательность Ритца, ее сходимость к элементу, реализующему минимум квадратичного функционала.
24. Вариационное доказательство разрешимости краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка.
25. Операторное уравнение в гильбертовом пространстве. Энергетическое пространство самосопряженного положительно определенного оператора.
26. Энергетическое пространство эллиптического оператора с граничными условиями Дирихле.
27. Энергетическое пространство эллиптического оператора с граничными условиями второго и третьего рода.
28. Естественные и главные граничные условия. Предельно плотные последовательности подпространств в пространствах $H^1(0;1)$ и $\overset{0}{H}{}^1(0;1)$. Метод конечных элементов.

Примерные задания к зачету

Задача 1. Докажите, что для любой функции $f(x)$ из пространства С.Л. Соболева $\overset{0}{H}{}^1(Q)$ справедливо неравенство В.А. Стеклова

$$\int_Q f^2(x)dx \le c\int_Q \left|\nabla f(x)\right|^2 dx,$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от f.

Задача 2. Используя теорему Рисса, покажите, что для эллиптического уравнения справедлива

Теорема. Если $a(x) \ge 0$ в Q и или $a(x) \not\equiv 0$ в Q, или $\sigma(x) \not\equiv 0$ на ∂Q, то для любых $f \in L_2(Q)$ и $\varphi \in L_2(\partial Q)$ существует единственное обобщенное решение $u(x)$ задачи

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{i,j}(x)u_{x_j}\right)_{x_i} + a(x)u = f(x), \qquad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x)u\right)\right|_{\partial Q} = \varphi(x).$$

При этом имеет место неравенство

$$\|u\|_{H^1(Q)} \le c\left(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}\right)$$

в котором постоянная $c > 0$ не зависят от f и φ.

Критерии оценивания результатов обучения

Критерии оценивания по зачету:

«зачтено»: студент владеет теоретическими знаниями по данному разделу, знает определения основных математических понятий по программе курса, допускает незначительные ошибки в формулировках основных результатов курса; студент умеет правильно объяснять теоретический материал, иллюстрируя его примерами, умеет решать большую часть задач из приведенного списка.

«не зачтено»: материал не усвоен или усвоен частично, студент затрудняется в формулировках определений и основных результатов курса, довольно ограниченный объем знаний программного материала.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

– в печатной форме увеличенным шрифтом,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на зачете;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в форме электронного документа.

5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

5.1 Основная литература:

1. Ильин, А.М. Уравнения математической физики: учебное пособие / А.М. Ильин. — Москва : Физматлит, 2009. — 192 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2181.

2. Петровский, И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений: учебник / И.Г. Петровский ; под ред. Олейник О.А.— Москва: Физматлит, 2009. — 136 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/59553.

3. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики: учебник / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. — Москва : Физматлит, 2000. — 400 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2363.

4. Владимиров, В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики: учебное пособие / В.С. Владимиров, А.А. Вашарин — Москва : Физматлит, 2001. — 288 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2364.

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах «Лань» и «Университетская библиотека ONLINE».

5.2 Дополнительная литература:

1. Тихонов, А.Н. Дифференциальные уравнения: учебник / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. — Москва : Физматлит, 2002. — 256 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/48171.

2. Лесин, В. В. Уравнения математической физики: учебное пособие / В. В. Лесин. - М. : КУРС : ИНФРА-М, 2017. - 240 с. - http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520539

5.3. Интернет-ресурсы, в том числе современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Электронно-библиотечные системы (ЭБС):

1. ЭБС «ЮРАЙТ» https://urait.ru/
2. ЭБС «УНИВЕРСИТЕТСКАЯ БИБЛИОТЕКА ОНЛАЙН» www.biblioclub.ru
3. ЭБС «BOOK.ru» https://www.book.ru
4. ЭБС «ZNANIUM.COM» www.znanium.com
5. ЭБС «ЛАНЬ» https://e.lanbook.com

Профессиональные базы данных:

1. Web of Science (WoS) http://webofscience.com/
2. Scopus http://www.scopus.com/
3. ScienceDirect www.sciencedirect.com
4. Журналы издательства Wiley https://onlinelibrary.wiley.com/
5. Научная электронная библиотека (НЭБ) http://www.elibrary.ru/
6. Полнотекстовые архивы ведущих западных научных журналов на Российской платформе научных журналов НЭИКОН http://archive.neicon.ru
7. Национальная электронная библиотека (доступ к Электронной библиотеке диссертаций Российской государственной библиотеки (РГБ) https://rusneb.ru/
8. Президентская библиотека им. Б.Н. Ельцина https://www.prlib.ru/
9. Электронная коллекция Оксфордского Российского Фонда https://ebookcentral.proquest.com/lib/kubanstate/home.action
10. Springer Journals https://link.springer.com/
11. Nature Journals https://www.nature.com/siteindex/index.html
12. Springer Nature Protocols and Methods https://experiments.springernature.com/sources/springer-protocols
13. Springer Materials http://materials.springer.com/
14. zbMath https://zbmath.org/
15. Nano Database https://nano.nature.com/
16. Springer eBooks: https://link.springer.com/
17. "Лекториум ТВ" http://www.lektorium.tv/
18. Университетская информационная система РОССИЯ http://uisrussia.msu.ru

Информационные справочные системы:

1. Консультант Плюс - справочная правовая система (доступ по локальной сети с компьютеров библиотеки)

Ресурсы свободного доступа:

1. Американская патентная база данных http://www.uspto.gov/patft/
2. Полные тексты канадских диссертаций http://www.nlc-bnc.ca/thesescanada/
3. КиберЛенинка (http://cyberleninka.ru/);
4. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации https://www.minobrnauki.gov.ru/;
5. Федеральный портал "Российское образование" http://www.edu.ru/;
6. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" http://window.edu.ru/;
7. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов http://school-collection.edu.ru/ .
8. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (http://fcior.edu.ru/);

9. Проект Государственного института русского языка имени А.С. Пушкина "Образование на русском" https://pushkininstitute.ru/;
10. Справочно-информационный портал "Русский язык" http://gramota.ru/;
11. Служба тематических толковых словарей http://www.glossary.ru/;
12. Словари и энциклопедии http://dic.academic.ru/;
13. Образовательный портал "Учеба" http://www.ucheba.com/;
14. Законопроект "Об образовании в Российской Федерации". Вопросы и ответы http://xn--273--84d1f.xn--p1ai/voprosy_i_otvety

Собственные электронные образовательные и информационные ресурсы КубГУ:

1. Среда модульного динамического обучения http://moodle.kubsu.ru
2. База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций http://mschool.kubsu.ru/
3. Библиотека информационных ресурсов кафедры информационных образовательных технологий http://mschool.kubsu.ru;
4. Электронный архив документов КубГУ http://docspace.kubsu.ru/
5. Электронные образовательные ресурсы кафедры информационных систем и технологий в образовании КубГУ и научно-методического журнала "ШКОЛЬНЫЕ ГОДЫ" http://icdau.kubsu.ru/

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Материал курса изложен в основном в литературных источниках, перечисленных в списке дополнительной литературы по причине их давнего издания. Автором данного курса написан расширенный конспект лекций, иллюстрированный практическими примерами. Электронный вариант этого текста доступен студентам. Изучение указанного текста с разбором примеров и решением приведенных там задач отнесено к самостоятельной работе по данному курсу.

Лекции и лабораторные занятия чередуются. Общение преподавателя и студентов в аудитории предполагает предварительную проработку конспекта студентами самостоятельно. Задача преподавателя состоит в расстановке акцентов и разъяснении смысла и необходимости введения обобщений классических понятий. Для полноценного восприятия новых объектов необходима иллюстрация их практического применения. Такими примерами являются задачи равновесия и движения мембраны, а также задача распространения тепла в трехмерном объеме. Это физические модели, для которых математические модели приводят к интегральным соотношениям, взятым за основу определения обобщенных решений дифференциальных задач. Приведенные примеры физических моделей свидетельствуют о естественности понятия обобщенного решения и о его первичности относительно понятия классического решения. Современные численные методы Ритца и Галеркина решения краевых задач для дифференциальных уравнений основаны на понятии обобщенного решения.

На лабораторных занятиях студентам предлагаются примеры для применения теории, изложенной на лекциях и в упомянутом конспекте. Обсуждение способов решения предлагаемых задач призвано активизировать познавательную деятельность студентов. Этому должна способствовать практическая направленность итоговых результатов

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

7. Материально-техническое обеспечение по дисциплине (модулю)

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) и оснащенность
1.	Лекционные занятия	Лекционная аудитория, специально оборудованная мультимедийными демонстрационными комплексами, учебной мебелью
2.	Лабораторные занятия	Помещение для проведения лабораторных занятий оснащенное учебной мебелью, персональными компьютерами с доступом к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации
3.	Групповые (индивидуальные) консультации	Помещение для проведения групповых (индивидуальных) консультаций, учебной мебелью, оснащенное презентационной техникой (проектор, экран, ноутбук) и соответствующим программным обеспечением
4.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Помещение для проведения текущей и промежуточной аттестации, оснащенное учебной мебелью, персональными компьютерами с доступом к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации
5.	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета

Для самостоятельной работы обучающихся предусмотрены помещения, укомплектованные специализированной мебелью, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

Наименование помещений для самостоятельной работы обучающихся	Оснащенность помещений для самостоятельной работы обучающихся	Перечень лицензионного программного обеспечения
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (читальный зал Научной библиотеки)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в	1. Microsoft Office Word Professional Plus. 2. Mathcad PTC Prime 3.0 3. Maple 18 4. MATLAB

	электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	Список свободно распространяемого программного обеспечения 1. Free Pascal 2. Lazarus 3. Microsoft Visual Studio Community
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (ауд. 301; 309)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	