МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе, качеству образования – первый проректор
_____________ Т.А. Хагуров
подпись
«28» _____________ 2021 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.33.03 Математический анализ

Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Специализация: Фундаментальная математика и ее приложения

Форма обучения: очная

Квалификация: Математик. Механик. Преподаватель

Краснодар 2021

Рабочая программа дисциплины Б1.О.16 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Программу составил(и):
Щербаков Е.А., профессор, д.ф.-м.н., доцент

Рабочая программа дисциплины Б1.О.16 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ утверждена на заседании кафедры ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ
протокол № 8 «20» апреля 2021 г.
Заведующий кафедрой Голуб М.В.

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук
протокол № 3 «12» мая 2021 г.
Председатель УМК факультета/института Шмалько С. П.

Рецензенты:

Гусаков Валерий Александрович, канд. физ. – мат. наук,
директор ООО «Просвещение – Юг»

Засядко Ольга Владимировна, доцент кафедры информационных образовательных технологий, канд. физ. - мат. наук, доцент

1 Цели и задачи изучения дисциплины.

1.1 Цель освоения дисциплины.

Привитие навыков математического метода исследования научных проблем во взаимосвязи с порождающими их задачами с различным содержательным наполнением. Создание основательной теоретической базы для углублённого изучения специальных теорий, возникающих в самой математике, а также в её приложениях в механике, математической физике, экономике и социальных науках.

1.2 Задачи дисциплины.

Сформировать на примерах геометрии, теории множеств понятие об аксиоматическом методе. Продемонстрировать его возможности в конструктивной теории действительных чисел. Дать введение в топологию вещественной прямой, пространства R^n , основываясь на понятиях окрестности точки и сходимости последовательности точек. Дать введение в теорию непрерывных отображений, гомеоморфизмов, разветвлённых и неразветвленных накрытий. Дать введение в теорию и приложения дифференцируемых отображений, дифференциальных форм. Дать введение в теорию дифференцируемых многообразий, их расслоений. Дать введение в теорию меры в органической связи между собой классических мер. Дать введение в теорию интегрирования в пространстве $R^n, n \geq 1$.

Дать представление о теории интегрирования на поверхностях. Дать представление о теории интегрирования на многообразиях, общей теореме Стокса, её связи с классическими теоремами векторного анализа. Дать введение в теорию гомологий и когомологий. Дать представление о векторных полях, производной Ли, теореме де Рама. Дать представление об интегральных и дискретных преобразованиях функций, их свойствах и применениях. Дать представление о теории обобщённых функций Л. Шварца и теории функций с обобщёнными производными С.Л. Соболева и их применениях.

1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы.

Дисциплина «Математический анализ» относится к блоку Б.1 обязательной части учебного плана по направлению подготовки 01.05.01.

На начальной стадии для изучения дисциплины требуются глубокие знания школьного курса математики. По мере продвижения при изучении материала требуются глубокое понимание изучаемых параллельно курсов линейной алгебры, алгебры, общей топологии и дифференциальной геометрии, дифференциальных уравнений и теории функций комплексной переменной.

Результаты теории математического анализа и её метолы используются при изучении курсов теории функций комплексной переменной, дифференциальных уравнений, теории вероятностей, дифференциальной геометрии, функционального анализа, вычислительных методов.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций:

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	
ИОПК-1.1. Способен находить, формулировать и решать актуальные и	Знает постановку основных задач математическог анализа

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине
значимые проблемы фундаментальной математики и механики	Умеет подбирать методы исследования приклады х задач и задач математического анализа
	Владеет методами исследования основных задач математического анализа его приложений в математической физике.
ОПК-2 Способен создавать, анализировать и реализовывать новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	
ИОПК-2.1. Знает математические модели стандартных задач в области профессиональной деятельности	Знает основные модели математической физики
	Умеет находить метод исследования задач математической физики и владение основными из этих методов.

Результаты обучения по дисциплине достигаются в рамках осуществления всех видов контактной и самостоятельной работы обучающихся в соответствии с утвержденным учебным планом.

Индикаторы достижения компетенций считаются сформированными при достижении соответствующих им результатов обучения.

2. Структура и содержание дисциплины

2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 36 зачетных единиц (864 часа), их распределение по видам работ представлено в таблице

Виды работ		Всего часов	Форма обучения			
			очная		очно-заочная	заочная
			1 семестр (часы)	2 семестр (часы)	3 семестр (часы)	4 курс (часы)
Контактная работа, в том числе:		**496**				
Аудиторные занятия (всего):						
занятия лекционного типа		232	52	48	68	64
лабораторные занятия		264	68	64	68	64
Иная контактная работа:		**18**				
Контроль самостоятельной работы (КСР)		16	4	4	4	4
Промежуточная аттестация (ИКР)		2	0.5	0.5	0.5	0.5
Самостоятельная работа, в том числе:		**153.2**				
Контрольная работа						
Самостоятельное изучение разделов, самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к лабораторным и практическим занятиям, коллоквиумам и т. д.)		153.2	37.8	45.8	30.8	38.8
Подготовка к текущему контролю		–	–			
Контроль:		**196.8**	**53.7**	**53.7**	**44.7**	**44.7**
Подготовка к экзамену		_	_			
Общая трудоемкость	**час.**	**864**	**216**	**216**	**216**	**216**
	в том числе контактная работа	**496**	**120**	**112**	**136**	**128**
	зач. ед	**36**	**36**			

2.2 Содержание дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины. Разделы дисциплины, изучаемые в первом семестре *(очная форма)*

№	Наименование разделов	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	СРС
1	2	3	4	5	6	7
1.	Аксиоматический метод. Теория множеств.	36	2	-	16	10
2.	Конструктивная и аксиоматическая теория действительных чисел.	28	2	-	10	10
3.	Топология вещественной прямой.	36	16	-	18	7
4.	Топология многомерных пространств.	32	14	-	10	8
5.	Отображения конечно - мерных пространств. Непрерывные отображения	34,8	18	-	14	2,8
	ИТОГО по разделам дисциплины в 1-м семестре	157.8	52	-	68	37,8

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы (темы) дисциплины, изучаемые во втором семестре (*очная форма обучения*)

№	Наименование разделов	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	СРС
		3	4	5	6	7
6.	Локальные и глобальные свойства непрерывных функций вещественной переменной. Пространство непрерывных функций	24	8	-	8	8
7.	Дифференцируемые отображения.	34	12	-	12	10
8.	Основы геометрического анализа.	38	10	-	20	8
9.	Исследование экстремумов функций многих переменных.	26	8	-	8	10
10.	Первообразная и неопределённый интеграл. Правила вычисления неопределённого интеграла.	35,8	10	-	16	9,8
	ИТОГО по разделам дисциплины в 1-м семестре	157.8	48	-	64	45,8

Разделы дисциплины, изучаемые в третьем семестре *(очная форма)*

№	Наименование разделов	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	СРС
		3	4	5	6	7

11.	Интегрирование функций вещественной переменной.	36	14	-	14	8
12.	Теория меры и интегрирование функций многих переменных.	38	14	-	14	10
13.	Дифференциальные формы. Интегрирование дифференциальных форм.	50	20	-	20	10
14.	Элементы векторного анализа.	42,8	20	-	20	2,8
	ИТОГО по разделам дисциплины в третьем семестре	166.8	68	-	68	30,8

Разделы дисциплины, изучаемые в четвёртом семестре *(очная форма)*

№	Наименование разделов	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	СРС
		3	4	5	6	7
15.	Интегрирование дифференциальных форм на многообразиях.	48	14	-	14	20
16	Функциональные ряды.	38	14	-	14	10
17.	Интегральные преобразования функций.	60	20	-	20	20
18.	Теория распределений Л. Шварца и пространства С.Л. Соболева.	56,8	20	-	20	16,8
	ИТОГО по разделам дисциплины в четвёртомм семестре	166.8	64	-	64	38,8
	ИТОГО по разделам дисциплины					

2.3 Содержание разделов дисциплины:

2.3.1 Занятия лекционного типа.

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Аксиоматический метод. Теория множеств	Аксиоматический метод. Сравнение аксиоматик. Множество натуральных чисел, аксиоматика Пеано. Система аксиом ZFC теории множеств. Понятие отображения множеств. Конструктивное построений системы чисел фон Неймана. Сравнение аксиом Пеано и теорем о числах фон Неймана.	Опрос на занятиях
2.	Конструктивная и аксиоматическая теория действительных чисел.	Кольцо целых чисел. Поле рациональных чисел. О разрешимости алгебраических уравнений в различных числовых множествах. Конструктивная теория Дедекинда и аксиоматическая теория Гильберта действительных чисел. Сравнения бесконечных множеств. Границы и грани множеств. О разрешимости алгебраических уравнений в поле действительных чисел. Поле комплексных чисел.	Опрос на занятиях
3.	Топология вещественной прямой.	Системы окрестностей точек на вещественной прямой, системы открытых и замкнутых множеств, предельные, граничные точки множеств, компактные множества на числовой прямой, компактификация числовой прямой, теоремы о вложенных отрезках и	Опрос на занятиях

		покрытиях числовых множеств. Числовые последовательности и подпоследовательности, хаусдорфовы пространства. Принципы вычисления пределов последовательностей, числовые ряды, сходимость числовых рядов и последовательностей.	
4.	Топология многомерных пространств	Метрическая структура в многомерном пространстве. Открытые и замкнутые множества в многомерном. Компактные множества, компактификация многомерных пространств по Александрову.	Опрос на занятиях
5.	Отображения конечно – мерных пространств. Непрерывные отображения	Отображения конечномерных пространств и действительнозначные функции многих переменных. Различные определения предела функции в точке, их эквивалентность. Непрерывные в точке и на множестве отображения. Колебание функции на множестве и в точке, связь с непрерывностью.	Опрос на занятиях
6.	Локальные и глобальные свойства непрерывных функций. Пространство непрерывных функций.	Классификация точек разрыва функций одной вещественной переменной. Пространство непрерывных на отрезке функций, критерий компактности. Непрерывные на компакте функции. Теоремы о промежуточных значениях отображений на линейно – связных множествах. Теоремы о достижении верхней и нижней граней непрерывными функциями, заданными на компакте.	Опрос на занятиях
7.	Дифференцируемые отображения	Дифференцируемые отображения и их дифференциалы. Частные производные функций многих переменных. Разложение дифференциала функции многих переменных по базисным дифференциалам. Матрица Якоби отображения. Геометрический смысл дифференциала отображения. Инвариантность дифференциала функции. Цепное правило дифференцирования отображений. Дифференциалы и производные высшего порядка для функций вещественной переменной. Теоремы Лагранжа для функций вещественной переменной и отображений. Экстремумы функций вещественной переменной. Формула Тейлора, остаточный член в разложении функции по формуле Тейлора. Правила Лопиталя раскрытия неопределённостей. Выпуклые функции. Исследование графиков функций. Классические неравенства.	Опрос на занятиях
8.	Основы геометрического анализа.	Формула Тейлора для функций многих переменных. Экстремумы функций многих переменных. Касательная плоскость к графику функций многих переменных. Теорема о неявной функции для отображений. Теорема об обратном отображении. Локальное приведение отображения к	Опрос на занятиях

		каноническому виду (теорема о ранге).	
9.	Исследование экстремумов функций многих переменных.	Функционально независимые системы функций. Поверхности в многомерном пространстве их касательные пространства. Необходимые и достаточные условия существования условного экстремума функции многих переменных.	Опрос на занятиях
10.	Первообразная и интеграл. Правила вычисления неопределённого интеграла.	Интегрирование функций по частям. Интегрирование функций с помощью замены переменной. Интегрирование рациональных и трансцендентных функций.	Опрос на занятиях
11.	Интегрирование функций вещественной переменной.	Проблема нахождения первообразной для произвольной непрерывной функции, её физическая интерпретация. Определение интеграла Римана для функций одной переменной. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.	Опрос на занятиях
12.	Теория меры и интегрирование функций многих переменных	Система множеств в многомерном пространстве, измеримых по Жордану. И функций многих переменных по измеримому по Жордану множеству. Измеримость множества и интегрируемость по Риману его характеристической функции. Необходимые и достаточные условия интегрируемости Дарбу, Дюбуа-Реймона, Лебега. Класс интегрируемых по Риману функций. Кратные и повторные интегралы.	Опрос на занятиях
13.	Дифференциальные формы. Интегрирование дифференциальных форм.	Поверхности в многомерном пространстве. Край поверхности, ориентируемые поверхности. Поверхностные и криволинейные интегралы как интегралы от дифференциальных форм. Основные формулы анализа.	Опрос на занятиях
14.	Элементы векторного анализа.	Векторные поля и формы в трёхмерном пространстве. Дифференциальные операторы теории поля. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах. Потенциальные поля. Векторный потенциал поля. Точные и замкнутые формы. Не инвариантность операций дивергенции и ротора при произвольных (не ортогональных) преобразованиях. Инвариантная форма системы уравнений Максвелла.	Опрос на занятиях
15.	Интегрирование дифференциальных форм на многообразиях	Тензорные пространства пространств и форм. Внешние произведения пространств и кососимметрические формы. Произведения кососимметрических форм. Внешний дифференциал форм. Дифференцируемые многообразия, их касательные и кокасательные расслоения. Разбиение единицы. Интегрирование дифференциальных на многообразии. Теорема Стокса. Векторные поля. Скобка векторных полей, тождество Якоби. Интегральные кривые векторных полей и однопараметрические группы локальных преобразований. Внутреннее произведение векторных полей и дифференциальных форм.	Опрос на занятиях

		Производная Ли дифференциальной формы вдоль векторного поля, формулы Картана, критерий Пуанкаре точности замкнутой формы. Группы гомологий и когомологий де Рама на многообразии. Теорема де Рама.	
16.	Функциональные ряды	Функциональные ряды, типы сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов. Ряды Фурье. Полные и замкнутые системы функций. Суммы Фейера. Полнота системы тригонометрических функций в пространстве функций, интегрируемых с квадратом на отрезке. Проблема Лузина. Оценки скорости сходимости тригонометрических рядов.	Опрос на занятиях
17.	Интегральные преобразования функций.	Несобственные интегралы, зависящие от параметра, дифференцирование интегралов по параметру. Преобразование Фурье. Интеграл Фурье. Условие Дини сходимости интеграла Фурье. Взаимосвязь дифференциальных свойств функций и их преобразований Фурье. Пространство быстро убывающих функций и преобразование Фурье. Формула обращения преобразования Фурье. Теорема Котельникова. Приложение преобразования Фурье в математической физике.	Опрос на занятиях
18.	Теория распределений Л. Шварца и пространства С.Л. Соболева.	Пространство бесконечно дифференцируемых функций с ограниченным носителем, его топология, распределения на нём, их сходимость. Пространство бесконечно дифференцируемых функций с произвольными носителями, его сопряжённое пространство распределений с ограниченными носителями. Топологическое пространство быстро убывающих функций, его сопряжённое пространство обобщённых функций умеренного роста. Преобразование Фурье обобщённых функций умеренного роста. Образы Фурье распределений с ограниченными носителями. Формула обращения преобразования Фурье. Связь между распределениями и функциями, обладающими соболевскими производными. Преобразование Лапласа функций и обобщённых функций и его свойства, связь с преобразованием Фурье.	Опрос на занятиях

2.3.2 Занятия семинарского типа.

Занятия семинарского типа – не предусмотрены

2.3.3 Лабораторные занятия.

№	Наименование раздела	Тематика практических занятий (семинаров)	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Аксиоматический	Аксиоматический метод. Сравнение аксиоматик.	Решение

	метод. Теория множеств	Множество натуральных чисел, аксиоматика Пеано. Система аксиом ZFC теории множеств. Понятие отображения множеств. Конструктивное построений системы чисел фон Неймана. Сравнение аксиом Пеано и теорем о числах фон Неймана. 3	задач
2.	Конструктивная и аксиоматическая теория действительных чисел.	Кольцо целых чисел. Поле рациональных чисел. О разрешимости алгебраических уравнений в различных числовых множествах. Конструктивная теория Дедекинда и аксиоматическая теория Гильберта действительных чисел. Сравнения бесконечных множеств. Границы и грани множеств. О разрешимости алгебраических уравнений в поле действительных чисел. Поле комплексных чисел.	Решение задач
3.	Топология вещественной прямой.	Системы окрестностей точек на вещественной прямой, системы открытых и замкнутых множеств, предельные, граничные точки множеств, компактные множества на числовой прямой, компактификация числовой прямой, теоремы о вложенных отрезках и покрытиях числовых множеств. Числовые последовательности и подпоследовательности, хаусдорфовы пространства. Принципы вычисления пределов последовательностей, числовые ряды, сходимость числовых рядов и последовательностей.	Решение задач
4.	Топология многомерных пространств	Метрическая структура в многомерном пространстве. Открытые и замкнутые множества в многомерном. Компактные множества, компактификация многомерных пространств по Александрову.	Решение задач
5.	Отображения конечно – мерных пространств. Непрерывные отображения	Отображения конечномерных пространств и действительнозначные функции многих переменных. Различные определения предела функции в точке, их эквивалентность. Непрерывные в точке и на множестве отображения. Колебание функции на множестве и в точке, связь с непрерывностью.	Решение задач
6.	Локальные и глобальные свойства непрерывных функций. Пространство непрерывных функций.	Классификация точек разрыва функций одной вещественной переменной. Пространство непрерывных на отрезке функций, критерий компактности. Непрерывные на компакте функции. Теоремы о промежуточных значениях отображений на линейно – связных множествах. Теоремы о достижении верхней и нижней граней непрерывными функциями, заданными на компакте.	Решение задач
7.	Дифференцируемые отображения	Дифференцируемые отображения и их дифференциалы. Частные производные функций многих переменных. Разложение дифференциала функции многих переменных по базисным дифференциалам. Матрица Якоби отображения. Геометрический смысл дифференциала отображения. Инвариантность дифференциала функции. Цепное правило дифференцирования отображений. Дифференциалы и производные высшего порядка для	Решение задач

		функций вещественной переменной. Теоремы Лагранжа для функций вещественной переменной и отображений. Экстремумы функций вещественной переменной. Формула Тейлора, остаточный член в разложении функции по формуле Тейлора. Правила Лопиталя раскрытия неопределённостей. Выпуклые функции. Исследование графиков функций. Классические неравенства.	
8.	Основы геометрического анализа.	Формула Тейлора для функций многих переменных. Экстремумы функций многих переменных. Касательная плоскость к графику функций многих переменных. Теорема о неявной функции для отображений. Теорема об обратном отображении. Локальное приведение отображения к каноническому виду (теорема о ранге).	Решение задач
9.	Исследование экстремумов функций многих переменных.	Функционально независимые системы функций. Поверхности в многомерном пространстве их касательные пространства. Необходимые и достаточные условия существования условного экстремума функции многих переменных.	Решение задач
10.	Первообразная и интеграл. Правила вычисления неопределённого интеграла.	Интегрирование функций по частям. Интегрирование функций с помощью замены переменной. Интегрирование рациональных и трансцендентных функций	Решение задач
11.	Интегрирование функций вещественной переменной.	Проблема нахождения первообразной для произвольной непрерывной функции, её физическая интерпретация. Определение интеграла Римана для функций одной переменной. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.	Решение задач
12.	Теория меры и интегрирование функций многих переменных	Система множеств в многомерном пространстве, измеримых по Жордану. И функций многих переменных по измеримому по Жордану множеству. Измеримость множества и интегрируемость по Риману его характеристической функции. Необходимые и достаточные условия интегрируемости Дарбу, Дюбуа-Реймона, Лебега. Класс интегрируемых по Риману функций. Кратные и повторные интегралы.	Решение задач
13.	Дифференциальные формы. Интегрирование дифференциальных форм.	Поверхности в многомерном пространстве. Край поверхности, ориентируемые поверхности. Поверхностные и криволинейные интегралы как интегралы от дифференциальных форм. Основные формулы анализа.	Решение задач
14.	Элементы векторного анализа	Векторные поля и формы в трёхмерном пространстве. Дифференциальные операторы теории поля. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах. Потенциальные поля. Векторный потенциал поля. Точные и замкнутые формы. Не инвариантность операций дивергенции и ротора при произвольных (не ортогональных) преобразованиях.	Решение задач

		Инвариантная форма системы уравнений Максвелла.	
15.	Интегрирование дифференциальных форм на многообразиях	Тензорные пространства пространств и форм. Внешние произведения пространств и кососимметрические формы. Произведения кососимметрических форм. Внешний дифференциал форм. Дифференцируемые многообразия, их касательные и кокасательные расслоения. Разбиение единицы. Интегрирование дифференциальных на многообразии. Теорема Стокса. Векторные поля. Скобка векторных полей, тождество Якоби. Интегральные кривые векторных полей и однопараметрические группы локальных преобразований. Внутреннее произведение векторных полей и дифференциальных форм. Производная Ли дифференциальной формы вдоль векторного поля, формулы Картана, критерий Пуанкаре точности замкнутой формы. Группы гомологий и когомологий де Рама на многообразии. Теорема де Рама.	Решение задач
16.	Функциональные ряды	Функциональные ряды, типы сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов. Ряды Фурье. Полные и замкнутые системы функций. Суммы Фейера. Полнота системы тригонометрических функций в пространстве функций, интегрируемых с квадратом на отрезке. Проблема Лузина. Оценки скорости сходимости тригонометрических рядов.	Решение задач
17.	Интегральные преобразования функций.	Несобственные интегралы, зависящие от параметра, дифференцирование интегралов по параметру. Преобразование Фурье. Интеграл Фурье. Условие Дини сходимости интеграла Фурье. Взаимосвязь дифференциальных свойств функций и их преобразований Фурье. Пространство быстро убывающих функций и преобразование Фурье. Формула обращения преобразования Фурье. Теорема Котельникова. Приложение преобразования Фурье в математической физике.	Решение задач
18.	Теория распределений Л. Шварца и пространства С.Л. Соболева.	Пространство бесконечно дифференцируемых функций с ограниченным носителем, его топология, распределения на нём, их сходимость. Пространство бесконечно дифференцируемых функций с произвольными носителями, его сопряжённое пространство распределений с ограниченными носителями. Топологическое пространство быстро убывающих функций, его сопряжённое пространство обобщённых функций умеренного роста. Преобразование Фурье обобщённых функций умеренного роста. Образы Фурье распределений с ограниченными носителями. Формула обращения преобразования Фурье. Связь между распределениями и функциями, обладающими соболевскими производными. Преобразование Лапласа функций и обобщённых функций и его	Решение задач

		свойства, связь с преобразованием Фурье.	

2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Курсовые работы – не предусмотрены

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	Проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий	*Например: Методические указания по организации самостоятельной работы по дисциплине «Физика», утвержденные кафедрой ____________, протокол № __ от ______ г.*
2	Подготовка к лабораторным занятиям	*Методические рекомендации по решению задач, утвержденные кафедрой _______, протокол № _от __*
3	Подготовка к коллоквиуму	*г.*
4	Выполнение расчетно-графических заданий и контрольных работ	*Например: Методические указания по организации самостоятельной работы по дисциплине «Физика», утвержденные кафедрой ____________, протокол № __ от ______ г.*

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

– в печатной форме увеличенным шрифтом,

– в форме электронного документа,

Для лиц с нарушениями слуха:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа,

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

3. Образовательные технологии.

При изучении данного курса используются как традиционные лекции и лаборатор- ные занятия, так и современные интерактивные образовательные технологии.

Цель лабораторных занятий – научить студента применять полученные на лекциях теоретические знания к решению и исследованию конкретных задач.

К образовательным технологиям также относятся интерактивные методы обучения. Интерактивность подачи материала по дисциплине «Математический анализ» предполагает не только взаимодействия вида «преподаватель - студент» и «сту- дент - преподаватель», но и «студент - студент». Все эти виды взаимодействия хорошо до- стигаются при изложении материала, в ходе дискуссий. Также используются занятия- визуализации и доклады студентов.

4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины “Математический анализ”.

Оценочные средства включает контрольные материалы для проведения **текущего контроля** в форме *лабораторных работ, контрольных работ* и **промежуточной аттестации** в форме вопросов и заданий к коллоквиуму, зачету и экзамену

Контрольная работа

Тип 1

1. Исследовать функцию f и построить её график,

$$f(x) = arcCos\left(\frac{3}{2} - Sin\,x\right).$$

2. Доказать, что преобразование f^*Лежандра функции f,

$$f^*(t) = \sup_{x\in I}\big(t - f(x)\big)$$

является инволютивным.

3.Материальнаяя точка движется по гиперболе $y = 10/x$ так, что абсцисса её координаты увеличивается со скоростью 1. Какова скорость зменения её ординаты в точке $(5,2)$?

4. Закон $x = x(t)$, $y = y(t)$ движения материальной точки, выпущенной из начала координат под углом α к горизонтальной оси x со скоростью v_0 имеет вид

$$x = x(t) = v_0 t \sin\alpha\,, \quad y(t) = v_0 t \cos\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Здесь g – ускорение силы тяжести. Найти координаты приземления точки, а также вычислить величину скорости и её направление в каждый момент времени.

Структура оценочных средств для текущей и промежуточной аттестации

№ п/п	Код и наименование индикатора (в соответствии с п. 1.4)	Результаты обучения (в соответствии с п. 1.4)	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	ИОПК-1.1. Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	Знает теорию дифференциальных форм на многообразиях, Знает теорию обобщённых функций	*Лабораторная работа №6, Контрльные работы Тип6-Тип8*	*Экзамен 3 семестра, вопросы 41-5Экзамен 4 семестра, вопросы 1-63*
2	ИОПК-2.1. Знает математические модели стандартных задач в области профессиональной деятельности	Умеет применять их к исследованию электромагнитных полей, к исследованию уравнений гидродинмики	*Лабораторная работа №6 Контрольные работы Тип6-Тип8*	*Экзамен 3 семестра, вопросы 41-5Экзамен 4 семестра, вопросы 1-63*

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Примерный перечень вопросов и заданий

Контрольная работа

Тип 2

1. Пусть $M -$ точка, принадлежащая гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

пересекающей ось Ox в точке A и $S_M -$ площадь области, ограниченной отрезкамиOA, OM и дугой $AM.$ Пусть $x_M, y_M -$ координаты точки $M.$ Доказать, что

$$x_M = a\cosh\frac{2S_M}{ab}, y_M = b\sinh\frac{2S_M}{ab}$$

2.Рассмотрим параболу $2py = x^2$ и точку M, принадлежащую ей. ПустьT – точка пересечения касательной к параболе в этой точке с осью Ox и $F -$ фокус параболы.

2а. Доказать, что длина $arcOM$дуги OMпараболы определяется формулой

$$arcOM = \frac{x\sqrt{x^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}\right)$$

2б. Доказать, что

$$arcOM = MT^2 + \frac{p}{2}\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}\right)$$

2в.Допустим, что парабола катится без скольжения вдоль оси Ox . Доказать, что координаты X, Y её фокуса связаны между собой уравнением цепной линии

$$Y = \frac{p}{2}\cosh\frac{2X}{p}$$

Указание к решению задачи 2в. Пусть T' - точка на оси Ox, в которую переходит точка T , $F' -$ новое положение фокуса параболы. Тогда $T'M'$ =TM, OM= $O'M'$. В этих обозначениях получаем

$$X = OM' - T'M' = OM - TM, Y = TF$$

Контрольная работа

Тип 3

1. Пусть $f\colon F \to R, \bar{F} = F -$ векторно- значная функция. Доказать, что существует функция

$$g\colon R^n \to R,$$

такая что сужение g на F совпадает с f.

2. Пусть $E \subset R^n -$замкнутое множество. Доказать, что функция $f\colon E \to R$ непрерывна тогда и только тогда, когда её график Γ_f,

$$\Gamma_f := \{(x, y) | x \in E, y = f(x)\}$$

представляет собой компактное множество.

3.Предположим, что $f \in C^2(0, \infty)$, f'' ограничена на $(0, \infty)$ и $f(x) \to 0, x \to \infty$. Доказать, что $f'(x) \to 0$, когда $x \to \infty$.

Указание: воспользоваться формулой Тейлора

$$f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x) - f(x)] + hf''(\xi)$$

Для любого $h > 0$.

4. Доказать теорему Кельвина.

Теорема. Если функция $V = V(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

то ему удовлетворяет и функция

$$\frac{1}{r} V\left(k^2 \frac{x}{r^2}, k^2 \frac{y}{r^2}, k^2 \frac{z}{r^2}\right).$$

Контрольная работа

Тип 4.

1.Пусть x_0 — некритическая точка гладкой функции $F: U \to R, U$ — окрестность точки $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$

Доказать, что в некоторой окрестности точки x_0 можно ввести координаты

$$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$$

Такие, что множество $\{x \in U | F(x) = F(x_0)\}$ в новых координатах будет определяться условием $\{\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) | \xi^n = 0\}$.

2.Доказать, что из всех четырёхугольников с заданными сторонами наибольшую площадь имеет тот, который может быть вписан в окружность.

3.Найти площадь части поверхности геликоида $z = carc \tanh \frac{y}{x}$, расположенной между цилиндрами

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ и } x^2 + y^2 = b^2, 0 < a < b.$$

4.Вычислить момент инерции однородной пластины, ограниченной осью OX и дугой циклоиды $x = a(t - \sin t), x = a(t - \cos t)$ относительно оси OX.

Контрольная работа

Тип 5.

1. Привести пример замкнутой дифференциальной формы, заданной на касательном расслоении не односвязной плоской области, интеграл от которой по некоторой замкнутой кривой в ней не равен нулю.

2.Доказать потенциальность гравитационного и электростатического полей.

3.Доказать, что функция

$$u(x) = x^n \int_0^\pi \cos(x \cos\varphi) \sin^{2n}(\varphi) d\varphi$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0.$$

4. Доказать, что функция

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

удовлетворяет уравнению Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

В чём состоит принципиальная разница между задачами 4 и 5?

Контрольная работа
Тип6

1. Пусть $M - n -$ мерное замкнутое многообразие. Допустим, что оно связно и ориентировано. Пусть $t\colon |K| \to M - C^\infty -$ триангуляция M. Здесь$|K| -$ полиэдр симплициального комплекса K .

Доказать, что на каждом $n -$ симплексе комплекса K можно ввести ориентацию, индуцированную ориентацией многообразия M.

2. Обозначим через $C_p(M)$ −группу $k -$ мерных цепей многообразия M, а через ∂ оператор взятия границы цепи. Пусть $H_p(M) -$ группа гомологий многообразия M.

Доказать, что $H_p(M) = ker\partial_p / Im\partial_{p+1}$

3.Пусть $t \to h_t \in C^\infty(M, N) -$ семейство отображений многообразия M в многообразие N. Доказать, что для любой формы $\omega \in \Omega(N)$ справедлива следующая форма гомотетии

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_t^*\omega)(x) = dh_t^*(i_x\omega)(x) + h_t^*(i_x d\omega)(x),$$

Контрольная работа
Тип7

1.Пусть X −векторное поле на C^∞многообразииM. Доказать, что для любой дифференцируемой на M функции f имеет место равенство

$$Xf(x) = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_t^* f)(x) - f(x)}{t}.$$

Здесь $\varphi_t^* f = f \circ \varphi_t, \{\varphi_t\}$ −однопараметрическая группа преобразований, порождённая полем X.

2. Вычислить

$$H^*_{deR}(R^2\backslash\{0\})$$

3.Пусть X, Y − векторные поля многообразии M, $\{\varphi_t\}$ −однопараметрическая группа преобразований, порождённая полем X. Доказать, что

$$\lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_{-t})_* Y - Y}{t} f = [X, Y] f$$

Здесь $[X, Y]$ − скобка Пуассона полей X, Y.

4.Пусть ω −замкнутая форма на S^2, такая что

$$\int_{S^2} \omega = 0.$$

Доказать, что форма ω является точной.

5. Пусть X −векторное поле на C^∞многообразии M, $\{\varphi_t\}$ −однопараметрическая группа преобразований, порождённая полем X. ω − дифференциальная форма на M, L_X − алгебраическая производная Ли формы. Доказать, что

$$L_X\omega = \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_t^*)\,\omega - \omega}{t}.$$

Контрольная работа

Тип8

1. Пусть

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 1, 0 \le |x| < a \\ |x| > a \end{Bmatrix}$$

Доказать, что

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xs \frac{\sin as}{s} ds$$

2.Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-x^2}$, дифференцируя это преобразование по параметру и находя решение получающегося при этом дифференциального уравнения. Убедиться в законности дифференцирования по параметру и интегрирования по частям.

3. Установить, в каких точках сходится ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos kx}{k^\alpha}, \alpha > 0$$

4.Доказать, что функционал $vp\,\frac{1}{x}$, определённый формулой

$$\left(vp\,\frac{1}{x}\right)(\varphi) \coloneqq v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx$$

является непрерывным функционалом на $\mathfrak{D}$.

4.Доказать, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{sin\,\lambda x}{x} = \delta.$$

Здесь предел понимается в смысле пространства $\mathfrak{D}'$.

Лабораторная работа

Тип 1

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln tg(\frac{\pi}{4} + ax)}{\sin bx}$$

2.Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin ax - \sin bx}$$

3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin\frac{\pi n}{4}$$

4. Исследовать ходимость ряда

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

5. Исследовать ходимость ряда

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2}$$

Лабораторная работа

Тип 2

1. Исследовать и построить график функции

$$y = \frac{x^4}{(x+1)^3},\ y = \frac{e^x}{1+x},\ y = x^{2/3}e^{-x}$$

2.Под какими углами пересекаются кривые $y = x^2$ и $x = y^2$?

3 При каком выборе параметра n кривая $y = arctg(nx)$ пересекает ось Ox под углом большим, чем 89°

Лабораторная работа
Тип 3

1. Вычислить интеграл

$$\int tg^5 x dx$$

2. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 a^x dx, \ \int_0^{\pi/2} \sin x dx$$

3.Найти длины дуг следующих кривых:

а) y=ln(cosx), $0 \le x \le a < \dfrac{\pi}{2}$

б) $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t$

4. Указать первые пять членов в формуле Тейлора для функции

$$y = e^{2x - x^2}$$

5. Найти координаты центра тяжести плоской пластины, ограниченной параболами $ax = y^2$ и $ay = x^2$ ($a > 0$).

6. В шар радиуса R вписать цилиндр наибольшего объема.

Лабораторная работа
Тип 4

1. Определить область сходимости ряда

a. $\sum_1^\infty \dfrac{n}{x^n}$

b. $\sum_1^\infty \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$

c. $\sum_1^\infty \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$

2.Исследовать последовательность на равномерную сходимость

d. $f_n(x) = x^n, \ 0 \le x \le \dfrac{1}{2}$

e. $f_n(x) = x^n, \ 0 \le x \le 1$

f. $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n+x}$, $0\le x\le 1$

g. $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$,$0\le x\le 2$

3.Исследовать характер сходимости

h. $\sum_1^\infty x^n$, $|x|<q, q<1$

i. $\sum_1^\infty x^n$, $|x|<1$

j. $\sum_1^\infty \dfrac{x^n}{n!}$, $x\in(0,+\infty)$

k. $\sum_1^\infty (1-x)x^n$, $0\le x\le 1$

l. $\sum_1^\infty \dfrac{nx}{1+n^5x^2}$

Лабораторная работа

Тип 5

1. Пусть $f: M\to N -$ гладкое отображение гладких многообразий, $f_*(p): T_pM\to T_{f(p)}N$- касательное отображение. Пусть $\omega - k$ форма на $N, \omega\in\Omega^k(N)$

Пусть

$$(f^*\,\omega)(p)(\xi_1,\dots,\xi_k)=\omega\big(f(p)\big)(f_*\xi_1,\dots,f_*\xi_k),\xi_1,\dots,\xi_k\in T_pM$$

Доказать, что

1.1. $f^* -$ линейное отображение.

1.2. $f^*(\omega_1\wedge\omega_2)=f^*\omega_1\wedge f^*\omega_2$

1.3 $d\circ f^*=f^*\circ d$

1.4.$(f_1\wedge f_2)^*=f_1^*\wedge f_2^*$

2.Пусть $\varphi: M\to N -$ диффеоморфизм гладких ориентированных $n-$ мерных многообразий и $\omega - n -$ дифференциальная форма на N.

Доказать, что

$$\int_{\varphi:(M)}\omega=\varepsilon\int_M \varphi^*\omega$$

ε равно единице при сохранении ориентации, минус единице$-$ в противном случае.

Зачетно-экзаменационные материалы для промежуточной аттестации (экзамен/зачет)

1 семестр

1. Множество натуральных чисел. Аксиоматика Пеано.
2. Построение кольца целых чисел. Разрешимость уравнения a + x = b в кольце целых чисел
3. Поле рациональных чисел. Разрешимость уравнения ax = b в поле рациональных чисел.

4. О неразрешимости уравнения $x2 = 2$ в поле рациональных чисел. Структура множеств $\{p \in Q \mid p2 < 2\}$, $\{p \in Q \mid p2 > 2\}$.
5. Сечения рациональных чисел. Равенство сечений. Отношение порядка во множестве сечений. Сечение O*.
6. Сумма сечений. Свойства суммы сечений.
7. О разрешимости уравнения $\alpha + \beta = O^*$ во множестве сечений.
8. О разрешимости уравнения $\alpha + \gamma = \beta$ во множестве сечений.
9. Определение произведения сечений.
10. Теорема о плотности рациональных сечений во множестве сечений (доказательство). Теорема Дедекинда (формулировка).
11. Границы и грани множеств. Ограниченные множества. Примеры.
12. Теорема о существовании верхней грани ограниченного сверху множества.
13. Теорема о существовании нижней грани ограниченного снизу множества.
14. Теорема о существовании решения уравнения $yk = x$ в поле вещественных чисел.
15. Аксиоматика Гильберта вещественных чисел.
16. Счётные множества. Теорема о счётности системы счётных множеств.
17. Несчётные множества. Несчётность множества вещественных чисел. Континуальность континуума континуумов.
18. Определение ε-окрестности точки на числовой прямой. Понятие открытости множества.
19. Свойства системы открытых множеств.
20. Принцип двойственности в теории множеств.
21. Замкнутые множества, их свойства.
22. Теорема о покрытиях отрезка интервалами. Определение компактного множества.
23. Функции, отображения множеств. Инъективные, сюръективные, биективные отображения. Понятие числовой последовательности, стационарные последовательности.
24. Понятие монотонной функции вещественной переменной, принимающей вещественные значения. Понятие подпоследовательности заданной последовательности. Примеры.
25. Понятие предела числовой последовательности на языке (ε,δ). Последовательности бесконечно большие и бесконечно малые.
26. Окрестность точки на числовой прямой. Определение предела числовой последовательности на языке окрестностей.
27. Понятие метрического пространства. Определение предела числовой последовательности на языке метрик.
28. Необходимое условие сходимости числовой последовательности.
29. Теорема о вложенных отрезках.
30. Фундаментальные последовательности. Необходимое и достаточное условие сходимости числовой последовательности.
31. Предельная точка множества. Замкнутые множества как множества, содержащие свои предельные точки. Эквивалентность различных определений замкнутых множеств.
32. Компактные множества. Эквивалентность их определений с помощью покрытий и с помощью предельных точек на R.
33. Замыкание множества. Замкнутость замыкания множества.
34. Граничные точки множества. Замкнутость границы множества.
35. Структура открытых множеств на числовой прямой.
36. Точка прикосновения множества. Изолированные точки множеств.
37. Теоремы о сходимости монотонных последовательностей.

38. Верхний и нижний пределы последовательности. Частичные пределы числовой последовательности.
39. Теорема о выделении сходящейся подпоследовательности у ограниченной последовательности.
40. Принципы вычисления пределов.
41. Расширение числовой прямой, её компактификация.
42. Некоторые специальные пределы.
43. Понятие числового ряда. Частичные суммы ряда. Сумма ряда. Вычисление суммы ряда, составленного из членов убывающей геометрической прогрессии.
44. Необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд.
45. Принцип сравнения рядов. Признаки сходимости числовых рядов Даламбера, Коши.
46. Признак сходимости Дирихле числовых рядов.
47. Признак сходимости Абеля числовых рядов.
48. Предел функции в точке. Определения Гейне и Коши, их эквивалентность.
49. Непрерывность функции в точке. Непрерывность функции на множестве.
50. Теорема о непрерывных функциях, заданных на компакте.
51. Теорема об открытости прообраза открытого множества при отображении непрерывной функцией.
52. Теорема о замкнутости образа замкнутого множества при отображении непрерывной функцией.
53. Теорема о компактности образа компактного множества при отображении непрерывной функцией.
54. Лемма о локальном поведении функции в окрестности точки непрерывности.
55. Лемма о промежуточных значениях непрерывных функций.
56. Теорема об обратной функции для монотонной непрерывной функции.

2 семестр

1. Кольцо непрерывных на метрике АСК функций.
2. Определение равномерно непрерывных функций на множестве. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной в каждой точке отрезка.
3. Понятие колебания функции на множестве. Теорема о равномерной непрерывности функции, заданной на отрезке.
4. Понятие метрического пространства. Определение пространства $C[a,b]$ функций, непрерывных на отрезке.
5. Теорема о замкнутости пространства $C[a,b]$.
6. Критерий компактности множества непрерывных функций, заданных на отрезке $[a,b]$.
7. Точки разрыва вещественнозначных функций вещественной переменной. Классификация точек разрыва. Пример функции, множество точек разрыва которой имеет мощность континуума.
8. Классификация точек разрыва функций. Оценка мощности множества точек разрыва монотонной функции.
9. Евклидова структура в пространстве R^n. Структура нормированного пространства в R^n. Структура метрического пространства в R^n. Связи между ними.
10. Нормированные пространства. Нормированное пространство $C[a,b]$.
11. ε-окрестность в пространстве R^n. Топологическое пространство R^n.
12. Предельная точка множества из R^n. Замкнутые множества в R^n. Связь между открытыми и замкнутыми множествами в R^n.

13. Граничная точка множества. Связные множества. Граница множества.
14. Понятие предела последовательности точек в пространстве R^n. Координатные числовые последовательности. Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности точек в R^n.
15. Фундаментальные последовательности в R^n. Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности точек из R^n.
16. Компактные множества в R^n. Необходимое и достаточное условие компактности множеств из R^n.
17. Теорема о выделении конечного покрытия из открытого покрытия куба.
18. Определение предела отображения в точке. Определение непрерывного отображения в точке. Повторные пределы. Связь между пределом функции в точке и повторным пределом.
19. Замкнутые пути и замкнутые кривые в n-мерном пространстве.
20. Специальные классы отображений. Отображение проектирования. Его свойства.
21. Специальные классы отображений. Линейное отображение. Ограниченность и непрерывность линейного отображения из R^n в R^m.
22. Локальные свойства отображений.
23. Колебание функции на множестве. Колебание функции в точке. Примеры и контрпримеры.
24. Колебание функции в точке и непрерывность функции в точке. Теорема о связи между ними.
25. Теорема о равномерной непрерывности отображения, непрерывного на компакте.
26. Линейно связные множества, области. Теорема о промежуточном значении для функций многих переменных.
27. Теорема о достижении верхней и нижней грани значений функцией многих переменных, заданной на компакте.
28. Класс отображений, дифференцируемых в точке. Дифференциал отображения в точке. Недифференцируемость функции $y^{2/3}$ в нуле и её дифференцируемость в произвольной точке, отличной от нуля.
29. Дифференцируемые отображения. Теорема о дифференцируемости функций многих переменных, представляющих дифференцируемые отображения.
30. Дифференцируемые функции многих переменных. Частные производные функций многих переменных.
31. Необходимое условие дифференцируемости отображения в точке.
32. Дифференцируемые вещественнозначные функции вещественной переменной. Производная функции в точке. Геометрический смысл производной функции в точке.
33. Дифференцируемые вещественнозначные функции вещественной переменной. Геометрический смысл дифференциала функции в точке.
34. Производная и дифференциал функции вещественной переменной. Связь между ними.
35. Касательное пространство $T_{\overline{x_0}}R^n$ в точке $\overline{x_0}$ к R^n. Касательный вектор к параметрической кривой в многомерном пространстве. Касательный вектор к параметрической поверхности. Связь с геометрическим определением касательного вектора.
36. Базисные дифференциалы. Разложение по базисным дифференциалам функций многих переменных.
37. Цепное правило дифференцирования, его геометрический смысл.
38. Правило дифференцирования композиции вещественнозначных функций вещественной переменной.

39. Производные высшего порядка вещественнозначных функций.
40. Доказать, что дифференциал вещественнозначной функции даёт наилучшее приближение линейными функциями.
41. Правило Лейбница дифференцирования произведения вещественнозначных функций.
42. Экстремум вещественнозначной функции вещественной переменной.
43. Теорема Ролля.
44. Первая теорема Лагранжа о конечных приращениях.
45. Вторая теорема Лагранжа о конечных приращениях (теорема Коши).
46. Третья теорема Лагранжа о конечных приращениях для отображений.
47. Правила Лопиталя раскрытия неопределённостей.
48. Многочлен Тейлора. Остаточный член в представлении вещественнозначной функции вещественной переменной с помощью многочлена Тейлора.
49. Общее представление остаточного члена $l_n(x_0, x)$ (n+1) раз непрерывно дифференцируемой в окрестности x_0 функции.
50. Частное представление Лагранжа остаточного члена (n+1) раз дифференцируемой в окрестности x_0 функции.
51. Представление остаточного члена n раз дифференцируемой в точке функцией в форме Пеано.
52. Ряд Тейлора. Теоремы единственности для аналитической в вещественном смысле функции.
53. Правила исследования графиков функций.
54. Выпуклые на интервале функции. Монотонность производной выпуклой дифференцируемой функции. Необходимое и достаточное условие выпуклости дифференцируемой функции.
55. Необходимое и достаточное условие выпуклости дважды дифференцируемой на интервале функции.
56. Неравенство Иенсена.
57. Среднее арифметическое и среднее геометрическое. Связь между ними.
58. Неравенство Юнга.
59. Неравенство Гёльдера.
60. Неравенство Минковского.
61. Теорема о дифференцируемости функции, обратной к дифференцируемой функции.
62. Теорема Лагранжа о конечных приращениях для функций многих переменных.
63. Точные дифференциальные формы первого порядка. Исследование дифференциальной формы $\omega' = ydx + dy$.
64. Теорема о совпадении смешанных производных второго порядка.
65. Теорема о дифференцируемости функции в точке, обладающей в ней непрерывными частными производными.
66. Точные дифференциалы вещественнозначной функции вещественной переменной. Первообразная и интеграл функции.
67. Проблема отыскания первообразной непрерывной на интервале функции. Определённый интеграл функции вещественной переменной.
68. Класс интегрируемых по Риману функций. Простейшие свойства определённого интеграла.
69. Аддитивность определённого интеграла.
70. Интеграл с переменным верхним пределом для непрерывной функции. Его дифференцируемость по верхнему пределу.
71. Формула Ньютона-Лейбница.

72. Принципы интегрирования функций. Интегрирование по частям.
73. Теорема о разложении рациональной дроби на рациональные дроби.
74. Интегрирование рациональных дробей.
75. Способы интегрирования функций сведением их к рациональным дробям.
76. Метод интегрирования Остроградского.
77. Понятие об эллиптических и гиперэллиптических интегралах.

3 семестр

1. Спрямляемые кривые. Теорема о существовании не спрямляемой кривой спрямляемой кривой.

2.Формула для вычисления длины непрерывно дифференцируемой

3. Естественная параметризация регулярной кривой

4. Свойство изометричности дифференциала естественного параметрического представления

5. Эквивалентность длины дуги и длины стягивающей её хорды для регулярных кривых.

6. Мотивация к определению и определение криволинейного интеграла 1 рода.

7. Различие между криволинейным интегралом первого рода по отрезку и интегралом Римана по этому отрезку

8 Формула для вычисления криволинейного интеграла 1 рода с помощью интеграла Римана по отрезку.

9. Пример вычисления криволинейного интеграла 1 рода по кривой, представляющей собой кратное накрытие отрезка.

10. Непрерывно дифференцируемые кривые без самопересечений и их касательное расслоение. Метрика касательного расслоения кривой

11. Теорема о топологической эквивалентности касательного расслоения кривой и касательного расслоения её параметрической области для кривой без самопересечений.

12. Решение задачи с неизвестной границей о движении материальной точки вдоль тела непрерывно дифференцируемой кривой с заданным распределением скоростей

13. Мотивация к изучению несобственного интеграла Римана.

14. Пример вычисления несобственного интеграла Римана

15.Необходимое и достаточное условие существования несобственного интеграла Римана (критерий Коши).

16. Несобственный интеграл Римана с переменным верхним пределом. Дифференцируемость

по верхнему пределу.

17. Пример вычисления несобственного интеграла Римана с помощью несобственного интеграла, зависящего от параметра.

18. Интеграл Римана, зависящий от параметра. Теорема о непрерывной зависимости интеграла от параметра.

19. Теорема о непрерывной зависимости интеграла от параметра и локальное представление непрерывно дифференцируемой функции.

20. Теорема о локальном представлении непрерывно дифференцируемой функции многих переменных

21. Теорема о дифференцируемости интеграла Римана, зависящего от параметра, по параметру

22. Теорема о дифференцируемости функций многих переменных с непрерывными частными производными.

23. Теорема о дифференцируемости интеграла Римана по параметру, содержащемуся в пределах интегрирования и под знаком интеграла

24. Теорема о замене порядка интегрирования в повторном интеграле

25. Первая теорема о среднем для интеграла Римана.

26. Лемма Абеля о суммах произведений конечных последовательностей

27. Вторая теорема о среднем для интеграла Римана

28. Третья теорема о среднем для интеграла Римана

29. Равномерная сходимость несобственных интегралов. Критерий равномерной сходимости

30. Теорема Абеля – Дирихле о сходимости несобственных интегралов.

31. Принцип Вейерштрасса о равномерной сходимости несобственных интегралов. Оценка качества критерия.

32. Теорема о дифференцируемости несобственного интеграла по параметру.

33. Теорема о замене порядка интегрирования для несобственных интегралов Римана. Сравнение с теоремой Фубини для интегралов Римана.

34. Определение кратного интеграла Римана

35. Теорема об интегрируемости непрерывных функций многих переменных, заданных на измеримом по Жордану множестве.

36. Множества нулевой внешней меры Лебега в многомерных пространствах. Критерий Лебега интегрируемости ограниченной функции, заданной на измеримом по Жордану множестве.

37. Кольцо интегрируемых по Риману функций многих переменных.

38. Касательное расслоение прямоугольника и дифференциальные формы второго порядка на нём

39. Интеграл от дифференциальной формы второго порядка на касательном расслоении прямоугольника, измеримой по Жордану области

40.Теорема о вычислении двукратного интеграла с помощью повторных.

41. Касательное расслоение непрерывно дифференцируемых кривых и дифференциальные формы первого порядка. Элементарная работа силы вдоль криволинейного пути

42. Работа силы вдоль кривой и интеграл от дифференциальной формы первого порядка, заданной на касательном расслоении кривой.

43.Теорема о связи между интегралами от дифференциальных форм, заданных на касательных расслоениях кривых и криволинейными интегралами второго рода.

44. Вычисление интеграла от дифференциальной формы, заданной на касательном расслоении кривой с помощью интеграла Римана по отрезку.

45. Сравнение криволинейных интегралов первого и второго родов с интегралом Римана по отрезку

46. Внешнее произведение дифференциальных форм первого порядка, его свойства.

Внешний дифференциал дифференциальных форм нулевого, первого и второго порядков.

47. Дифференциальная форма второго порядка на касательном расслоении измеримой по Жордану плоской области, её представление с помощью базисных дифференциальных форм второго порядка.

48.Поверхностный интеграл второго рода от дифференциальной формы второго порядка, заданной на касательном расслоении параметрической поверхности. Его свойства и физический смысл.

49. Ориентируемые поверхности. Ориентируемость регулярной поверхности.

50. Поверхностный интеграл первого рода. Его физический смысл. Сравнение с поверхностным интегралом второго рода.

51. Формула Грина. Её связь с общей теоремой Стокса.

52. Формула Гаусса- Остроградского. Её связь с общей теоремой Стокса.

53.Классическая теорема Стокса. Её связь с общей теоремой Стокса.

54. Замена переменных в интегралах от дифференциальных форм. Оператор φ^*соответствия между дифференциальными формами, определяемый оператором $d\varphi$ соответствия между касательными пространствами.

55. Теорема о перестановочности операторов φ^*, d.

56. Теорема Брауэра о существовании неподвижной точки для дифференцируемых отображений круга на себя.

4 семестр

1. Касательные векторы к $n -$ пространству как линейные операторы на C^∞

2. Ростки функций на многообразии. Касательные векторы к многообразию. Теорема об изоморфизме

$$T_m M \cong \left(\widetilde{\mathfrak{F}}_{\mathrm{m}}/\mathfrak{F}_{\mathrm{m}}^2\right)^*$$

3. Теорема о представлении касательного вектора с помощью базисных касательных векторов

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m$$

$n -$ размерность многообразия. Базис в кокасательном пространстве.

4. Определение дифференциала отображения многообразий. Теорема о координатном представлении дифференциала отображения.

5.Цепное правило дифференцирования.

Определение отображения, сопряжённого к касательному отображению касательных пространств многообразий.

6.Касательное и кокасательные расслоения многообразия.

7. Тензорное произведение конечномерных векторных пространств. Универсальное свойство тензорного произведения. Тензорная алгебра.

8.Теорема о размерности тензорного произведения векторных пространств.

9. Определение внешней алгебры $\Lambda(V)$ для векторного пространства V . Кососимметричные полилинейные отображения. Универсальное свойство внешнего произведения векторых пространств.

10.Теорема о базисе в $\Lambda(V)$ Размерности $\Lambda(V)$ и $\Lambda_k(V)$.

11.Внешнее произведение полилинейных знакопеременных отображений. Ттерема о представлении полилинейного знакопеременного отображения с помощью линейных форм.

12. Теорема об изоморфизме $\Lambda_k(V^*)$ и $\left(\Lambda_k(V)\right)^*$. Определение дифференциальной $k -$ формы на многообразии.

13, Внешний дифференциал дифференциальной формы. Замена переменной в дифференциальной форме.

14. Теорема о равенстве

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$$

15. Лемма Пуанкаре для 1- форм.

16. Лемма Пуанкаре для p- форм.

17. Симплексы и симплициальные комплексы. Полиэдры. Пример триангулируемого топологического пространства.

18. Группы C_l цепей симплициального комплекса $K.$ Граничный оператор для цепей, его свойства.

19. Группы гомологий и когомологий цепного комплекса. Числа Бетти и число Эйлера триангулируемого многообразия.

20. Ориентируемые многообразия с краем.

21. Понятие грани $k-$ мерного симплекса.

22.Разбиение единицы на многообразии. Интеграл дифференциальной формы на многообразии, его независимость от разбиения единицы.

23.Теорема Стокса для R^n и H^n.

24. Общая теорема Стокса. Её связь с классическими теоремами векторного анализа.

25. Функциональные ряды. Типы сходимости функциональных рядов. Торема об интегрируемости по Риману предела равномерно сходящейся на отрезке

последовательности интегрируемых по Риману функций.

26. Теорема о почленном интегрировании ряда интегрируемых функц й.

27. Теорема о дифференцируемости предела последовательности дифференцируемых функций.

28. Теорема о дифференцируемости ряда дифференцируемых функций

29. Теорема о существовании нигде не дифференцируемой функции.

30. Степенные ряды. Формула Адамара.

31.Теорема о предельном поведении степенного ряда

32 Теорема о сумме произведения сходящихся рядов.

33 133Теореме о перемене порядка суммирования.

34. Теорема о переразложении степенного ряда.

35 Теорема единственности для аналитических функций.

36 Внешняя мера Лебега. $\sigma -$ кольцо измеримых по Лебегу множеств. Измеримые по Лебегу Функции.

Теорема об аппроксимации измеримых функций простыми функциями.

37 Интеграл Лебега для простых функций. Сходимость последовательности измеимых функций по мере.

Определение интеграла Лебега измеримой функции.

38 Теорема Стоуна- Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций на отрезке полиномами в метрике равномерной сходимости.

39. Теорема об аппроксимации функций, интегрируемых с квадратом по Риману на отрезке, непрерывными функциями.

40. Ряды, порождаемые интегрируемыми функциями и системами ортонормированных функций. Экстремальное свойство коэфциентов Фурье функций.

41 Неравенство Бесселя для функций, интегрируемых с квадратом по Риману на отрезке. Сравнение L^2, l_2

42. Ядро Дирихле. Интегральные представления частичных сумм ряда Фурье. Теорема о локализации.

43. Условие Дини. Поточечная сходимость ряда Фурье к порождающей его функции.

44. Проблема Лузина, её решение Карлесоном.

45. Суммы Фейера, их равномерная сходимость к порождающей их непрерывной функции.

46. Определение преобразования Фурье, интеграла Фурье, синус, косинус-преобразований Фурье.

47. Лемма о поведении преобразования Фурье локально интегрируемой и абсолютно интегрируемой по Риману функции в окрестности бесконечности.

48. Достаточное условие сходимости интеграла Фурье к значению, определяющей его функции.

49. Теорема о скорости убывания функции и гладкости её преобразования Фурье.

50. Теорема о гладкости функции и скорости убывания её преобразования Фурье.

51. Топологические пространства $\mathfrak{D}, S(R, C)$, их сопряжённые пространства. Достаточное условие непрерывности линейного функционала, определённого на $\mathfrak{D}$.

52. Свойства преобразования Фурье на функциях из $S(R, C)$.

53. Оператор Дифференцирования и преобразование Фурье.

54. Теорема Котельникова.

55.Преобразование Фурье свёртки функций. Применения.

56. Пространство обобщённых функций. Действия над обобщёнными функциями.

57. Связь между сходимостью пробных функций из $S(R, C)$ с сходимостью их преобразований Фурье.

58. Теорема о преобразовании Фурье обобщённых функций с ограниченным носителем.

59. Взаимно обратные преобразования $\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathfrak{F}}$ обобщённых функций умеренного роста.

60. Почему пространство $\mathfrak{D}$ непригодно для определения преобразования Фурье обобщённых функций

61.Пространства С.Л. Соболева функций с обобщёнными производными и пространства Шварца обобщённых функций.?

62.Преобразования Лапласа. Абсцисса суммируемости преобразования Лапласа. Голоморфность преобразования Лапласа в области$\{\xi > a\}$

63. Доказательство корректности преобразования Лапласа обобщённых функций.

Вопросы к коллоквиуму

1. Множества и операции над множествами.
2. Равномощные множества. Счётные множества. Множества мощности континуума.
3. Аксиоматика множества действительных чисел.
4. Лемма о вложенных отрезках. Несчётность множества действительных чисел.
5. Грани числовых множеств.
6. Понятие числовой функции (отображения). График функции. Обратная функция.
7. Определение предела последовательности. Единственность предела.
8. Свойства сходящихся последовательностей, связанные с неравенствами.
9. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.
10. Арифметические операции над сходящимися последовательностями.
11. Предел монотонной последовательности.
12. Число «е».
13. Подпоследовательности. Частичные пределы. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
14. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

15. Предел функции в точке. Определение по Коши и по Гейне.
16. Локальные свойства функций, имеющих предел в точке (ограниченность, определённость знака, свойства, связанные с неравенствами и операциями над функциями).
17. Понятие непрерывности функции в точке. Точки разрыва. Локальные свойства функций, непрерывных в точке.
18. Теоремы Вейерштрасса о функциях непрерывных на отрезке.
19. Теоремы Коши о функциях непрерывных на отрезке.
20. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.
21. Равномерная непрерывность функции. Теорема Кантора.
22. Неравенства для тригонометрических функций.
23. Первый замечательный предел и его следствия.
24. Второй замечательный предел.
25. Следствия из второго замечательного предела.
26. Сравнение функций. O-символика.
27. Эквивалентные функции. Критерий эквивалентности функций. Применение при вычислении пределов функций.
28. Асимптоты графика функции.

Критерии оценивания результатов обучения

Зачетно-экзаменационные материалы для промежуточной аттестации (экзамен/зачет)

1.

Критерии оценивания по зачету:

«зачтено»: студент владеет теоретическими знаниями по данному разделу, умеет решать стандартные задачи

«не зачтено»: теоретический материал не усвоен или усвоен частично, не умеет решать типовые задачи

Критерии оценивания по экзамену.

Оценка “отлично”: Совершенное знание теории, умение делать её обобщение, умение решать нестандартные задачи.
Оценка “хорошо”: Знание теории, предполагающее умение доказывать теоремы, определяемые лектором как основные, умение решать задачи повышенной трудности.
Оценка “удовлетворительно”: Знание теории на уровне понимания определений и формулировок теорем, умение доказывать наиболее простые из них, умение решать типовые задачи
Оценка “неудовлетворительно”: Незнание основных определений, неумение формулировать теоремы и непонимание их смысла.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении повершенное владение процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

– в печатной форме увеличенным шрифтом,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

Рецензия
на рабочую программу дисциплины
«Математический анализ»
по специальности 01.05.01 Фундаментальная математика и механика,
очной формы обучения.
Составитель рабочей программы:
профессор каф. теории функций ФГБОУ ВО «КубГУ» Щербаков Е.А.

Рабочая программа полностью соответствует требованиям ФГОС ВО по специальности 01.05.01 Фундаментальная математика и механика.

Все основные разделы программы нашли свое отражение в перечне представленных в программе необходимых знаний и компетенций. Распределение времени, отводимого на изучение различных разделов курса, включая самостоятельную работу, соответствует их трудоемкости.

Приведенные в программе примеры контрольных заданий, вопросы к коллоквиуму, экзаменационные вопросы и задания для самостоятельной работы могут оказать ощутимую помощь студентам при подготовке к текущему и итоговому контролю знаний, в применении методов дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач.

Содержащийся перечень и количество практических занятий достаточен для формирования уровня подготовки, определенного требованиями ФГОС.

Перечень тем и разделов, которые должны изучить слушатели, а также основные требования к уровню подготовки слушателей объему знаний и умений, которым они должны обладать по каждой из перечисленных тем.

Рабочая программа дисциплины позволяет усвоить связи между различными разделами и теоремами математического анализа, а также способствует развитию и углублению межпредметных связей между изучением данного курса и прохождением других дисциплин естественнонаучного цикла.

Рабочая программа дисциплины «Математический анализ» способствует приобретению и развитию умений и навыков для решения профессиональных задач методами математического анализа, формированию компетентного специалиста.

Рецензент,
Гусаков В.А.,
канд. физ. – мат. наук,
директор ООО «Просвещение–Юг».