

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по учебной работе,
качеству образования – первый
проректор

подпись

Т.А. Хагуров

«28» мая 2021 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.17 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Специальность 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Направленность (профиль) Фундаментальная математика и ее приложения

Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг

Форма обучения очная

Квалификация Математик. Механик. Преподаватель

Краснодар 2021

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по специальности 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика».

Программу составили:

В.Ю. Барсукова, канд. физ.-мат. наук, доцент



Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» утверждена на заседании кафедры (разработчика) функционального анализа и алгебры протокол № 9 от 13 апреля 2021 г.

Заведующий кафедрой (разработчика) Барсукова В.Ю.



Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук «12» мая 2021 г., протокол № 3 .

Председатель УМК факультета Шмалько С.П.



Рецензенты:

Чубырь Н.О., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики КубГТУ

Павлова А.В., доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования КубГУ

1 Цели и задачи изучения дисциплины (модуля)

1.1 Цель освоения дисциплины

Цели освоения дисциплины определены федеральным государственным стандартом высшего образования по специальности 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика», в рамках которой преподается дисциплина.

Целями освоения дисциплины «Функциональный анализ» являются формирование у студентов базовых знаний по функциональному анализу, математической культуры, способностей к алгоритмическому и логическому мышлению; формирование и развитие личности студентов; овладение современным аппаратом функционального анализа для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания

1.2 Задачи дисциплины

Задачами изучения дисциплины являются:

1. Изучение основных принципов и методов функционального анализа.
2. Формирование умений в области применения основных методов функционального анализа при решении комплекса задач теории и практики управления.
3. Владение основными методами на уровне, позволяющем получать качественные результаты при решении теоретических и прикладных задач.
4. Получение практических навыков работы с методами функционального анализа.

1.3 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина «Функциональный анализ» относится к обязательной части Блока 1 "Дисциплины (модули)" учебного плана. В соответствии с рабочим учебным планом дисциплина изучается на 3 курсе по очной форме обучения. Вид промежуточной аттестации: экзамен.

Место курса в профессиональной подготовке специалиста по направлению 01.05.01. «Фундаментальные математика и механика» определяется ролью функционального анализа в формировании высококвалифицированного специалиста. Данная дисциплина является основополагающей для дальнейшего изучения дисциплин высшей математики и механики.

Для успешного освоения дисциплины обучающийся должен владеть знаниями, умениями и навыками по программам дисциплин «Математический анализ», «Алгебра», «Дифференциальная геометрия и топология», «Комплексный анализ».

1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций:

Код и наименование индикатора* достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине (знает, умеет, владеет (навыки и/или опыт деятельности))
ОПК-1 Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	
ИОПК-1.1. Знает актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики	Знает основные теоремы теории линейных непрерывных операторов, принцип сжимающих отображений и другие теоремы о существовании решений различных классов уравнений
	Умеет решать задачи функционального анализа; доказывать утверждения функционального анализа;
	Владеет аппаратом функционального анализа

Код и наименование индикатора* достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине (знает, умеет, владеет (навыки и/или опыт деятельности))
ИОПК-1.2. Осуществляет выбор методов решения задач фундаментальной математики	Знает формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства
	Умеет применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания;
	Владеет методами применения аппарата функционального анализа к решению задач
ИОПК-1.3. Владеет навыками формализации актуальных задач фундаментальной математики и применения подходящих методов их решения	Знает формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства
	Умеет ставить задачи, пользуясь языком функционального анализа
	Владеет методами применения аппарата функционального анализа к решению задач
ПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики	
ИПК-1.1. Знает основные понятия, идеи и методы фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач	Знает основные понятия, определения и свойства объектов функционального анализа;
	Умеет математически корректно ставить задачи, возникающие в приложениях;
	Владеет навыками применения полученных знаний в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания
ИПК-1.2. Умеет передавать результаты проведенных теоретических и прикладных исследований в виде конкретных предметных рекомендаций в терминах предметной области	Знает возможные сферы приложения методов функционального анализа в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания
	Умеет применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания
	Владеет навыками применения полученных знаний в дисциплинах естественнонаучного содержания
ИПК-1.3. Самостоятельно и корректно решает стандартные задачи фундаментальной и прикладной математики	Знает постановки задач функционального анализа
	Умеет математически корректно ставить задачи, возникающие в приложениях
	Владеет навыками применения полученных знаний в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания
ИПК-1.4. Имеет навыки решения математических задач, соответствующих квалификации, возникающих при проведении научных и прикладных исследований	Знает методы решения задач функционального анализа
	Умеет применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания
	Владеет навыками применения полученных знаний в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания

Результаты обучения по дисциплине достигаются в рамках осуществления всех видов контактной и самостоятельной работы обучающихся в соответствии с утвержденным учебным планом.

Индикаторы достижения компетенций считаются сформированными при достижении соответствующих им результатов обучения.

2. Структура и содержание дисциплины

2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 8 зачетных единиц (288 часов), их распределение по видам работ представлено в таблице

Виды работ	Всего часов	Форма обучения		
		очная		
		5 семестр (часы)	6 семестр (часы)	
Контактная работа, в том числе:				
Аудиторные занятия (всего):				
занятия лекционного типа	52	34	18	
лабораторные занятия	68	34	34	
практические занятия				
семинарские занятия				
Иная контактная работа:				
Контроль самостоятельной работы (КСР)	8	4	4	
Промежуточная аттестация (ИКР)	0,8	0,5	0,3	
Самостоятельная работа, в том числе:	87,8	35,8	52	
Самостоятельное изучение разделов, самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к лабораторным и занятиям, коллоквиумам, контрольным работам)	65	25	40	
Подготовка к текущему контролю	22,8	10,8	12	
Контроль:	71,4	35,7	35,7	
Подготовка к экзамену	71,4	35,7	35,7	
Общая трудоёмкость	час.	288	144	144
	в том числе контактная работа	128,8	72,5	56,3
	зач. ед	8	4	4

2.2 Содержание дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоёмкости по разделам дисциплины. Разделы (темы) дисциплины, изучаемые в 5 семестре (очная форма обучения)

№	Наименование разделов (тем)	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа		Внеаудиторная работа	
			Л	ПЗ		ЛР
1.	Мера и интеграл Лебега	28	8		10	10
2.	Банаховы пространства	22	8		6	8
3.	Гильбертовы пространства	22	8		6	8
4.	Линейные непрерывные операторы	31,8	10		12	9,8
	ИТОГО по разделам дисциплины	103,8	34		34	35,8
	Контроль самостоятельной работы (КСР)	4				
	Промежуточная аттестация (ИКР)	0,5				
	Подготовка к контролю	35,7				
	Общая трудоёмкость по дисциплине	144				

Примечание: Л – лекции, ПЗ – практические занятия / семинары, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента

Разделы (темы) дисциплины, изучаемые в 6 семестре (очная форма обучения)

№	Наименование разделов (тем)	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	
1.	Принципы неподвижной точки	28	4		8	14
2.	Вполне непрерывные операторы	22	8		16	20
3.	Интегральные уравнения	22	4		8	10
4.	Элементы нелинейного анализа	31,8	2		2	8
	ИТОГО по разделам дисциплины	104	18		34	52
	Контроль самостоятельной работы (КСР)	4				
	Промежуточная аттестация (ИКР)	0,3				
	Подготовка к контролю	35,7				
	Общая трудоемкость по дисциплине	144				

2.3 Содержание разделов (тем) дисциплины

2.3.1 Занятия лекционного типа

№	Наименование раздела (темы)	Содержание раздела (темы)	Форма текущего контроля
1.	Мера и интеграл Лебега	Кольцо, σ -кольцо множеств. Мера. Верхняя мера. Лебегово продолжение меры. Мера Лебега на прямой и плоскости. Измеримые функции. σ -ступенчатые функции. Интеграл Лебега. Свойства: аддитивность, положительность, σ -аддитивность, абсолютная непрерывность. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.	Устный опрос
2.	Банаховы пространства	Линейные и нормированные пространства. Норма. Топология нормированных пространств. Основные пространства. Эквивалентные нормы. Сходимость. Полные пространства. Примеры неполных пространств. Пополнение пространств. Конечномерные пространства.	Коллоквиум
3.	Гильбертовы пространства	Скалярное произведение. Гильбертовы пространства. Ортогональность. Теорема Пифагора, теорема о диагоналях параллелограмма. Ортогональное дополнение. Проекция элемента на подпространство. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Ряды Фурье. Полные системы.	Коллоквиум
4.	Линейные непрерывные операторы	Линейные непрерывные операторы. Норма оператора. Полнота пространства $L(X, Y)$. Принцип равномерной ограниченности. Обратимость линейных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Хана-Банаха.	Устный опрос

		Линейный функционал в гильбертовом пространстве, в других пространствах.	
5.	Принципы неподвижной точки	Принцип сжимающих отображений. Принцип Шаудера. Критерий Хаусдорфа. Теорема Арцеля. Применения принципов неподвижной точки. Интегральные уравнения.	Устный опрос
6.	Вполне непрерывные операторы	Спектр линейного непрерывного оператора. Резольвента. Непустота спектра. Спектральный радиус. Вполне непрерывные операторы. Сопряженные операторы. Конечномерные операторы. Представление вполне непрерывного оператора в виде суммы конечномерного и малого по норме. Теория Фредгольма. Спектр вполне непрерывного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта. Теория Фредгольма для интегральных уравнений	Устный опрос
7.	Интегральные уравнения	Теория Фредгольма для интегральных уравнений. Итерированные ядра и резольвента интегрального уравнения	Устный опрос
8.	Элементы нелинейного анализа	Слабый и сильный дифференциал нелинейного функционала. Экстремум функционала. .	Устный опрос

2.3.2 Занятия семинарского типа (практические / семинарские занятия/ лабораторные работы)

№	Наименование раздела (темы)	Тематика занятий/работ	Форма текущего контроля
1.	Мера и интеграл Лебега	Кольцо, σ -кольцо множеств. Мера. Верхняя мера. Мера Лебега на прямой и плоскости. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.	Проверка домашнего задания (задачи) Контрольная работа
2.	Банаховы пространства	Линейные нормированные пространства. Норма. Сходимость в различных пространствах.	Проверка домашнего задания (задачи) Устный опрос
3.	Гильбертовы пространства	Скалярное произведение. Гильбертовы пространства. Проекция элемента на подпространство. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Ряды Фурье.	Проверка домашнего задания (задачи). Контрольная работа
4.	Линейные операторы	Линейные непрерывные операторы. Норма оператора (оценка и вычисление). Обратимость линейных операторов.	Проверка домашнего задания (задачи).

5.	Принципы неподвижной точки	Принцип сжимающих отображений. Применения принципа сжимающих отображений. Интегральные уравнения.	Проверка домашнего задания (задачи) Контрольная работа
6.	Вполне непрерывные операторы	Спектр линейного непрерывного оператора. Резольвента. Спектральный радиус. Сопряженные операторы. Самосопряженные операторы. Теория Фредгольма. Спектр вполне непрерывного оператора. Теория Фредгольма для интегральных уравнений.	Проверка домашнего задания (задачи) Контрольная работа
7.	Элементы нелинейного анализа	Слабый и сильный дифференциал нелинейного функционала. Экстремум функционала. Уравнения Эйлера.	Проверка домашнего задания (задачи), устный опрос
8.			

2.3.3 Примерная тематика курсовых работ (проектов) курсовые работы не предусмотрены.

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	Проработка учебного (теоретического) материала	Методические указания по организации самостоятельной работы, утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры протокол № 9 от 13.04.2021 г
2	Выполнение домашних заданий (решение задач)	Методические указания по организации самостоятельной работы, утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры протокол № 9 от 13.04.2021 г
3	Подготовка к текущему контролю	Методические указания по организации самостоятельной работы, утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры протокол № 9 от 13.04.2021 г
4	Промежуточная аттестация (экзамен)	Методические указания по организации самостоятельной работы, утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры протокол № 9 от 13.04.2021 г.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,

- в форме аудиофайла,
- в печатной форме на языке Брайля.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

3. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины (модуля)

В ходе изучения дисциплины предусмотрено использование следующих образовательных технологий: лекции, практические занятия, проблемное обучение, подготовка письменных работ, самостоятельная работа студентов.

Компетентностный подход в рамках преподавания дисциплины реализуется в использовании интерактивных технологий и активных методов (разбора конкретных ситуаций, анализа задач) в сочетании с внеаудиторной работой.

Информационные технологии, применяемые при изучении дисциплины: использование информационных ресурсов, доступных в информационно-телекоммуникационной сети Интернет.

Адаптивные образовательные технологии, применяемые при изучении дисциплины – для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины «Функциональный анализ».

Оценочные средства включает контрольные материалы для проведения **текущего контроля** в форме самостоятельных и *контрольных работ, заданий, вопросов для устного опроса* и **промежуточной аттестации** в форме вопросов и заданий к зачету, экзамену.

Структура оценочных средств для текущей и промежуточной аттестации

№ п/п	Код и наименование индикатора (в соответствии с п. 1.4)	Результаты обучения (в соответствии с п. 1.4)	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	ИОПК-1.1. Знает актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики	Знает основные теоремы линейных непрерывных операторов, принцип сжимающих отображений и другие теоремы о существовании решений различных классов уравнений	Вопросы для устного опроса по всем темам	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)

2		Умеет решать задачи функционального анализа; доказывать утверждения функционального анализа;	Контрольная работа №1-4	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
3		Владеет аппаратом функционального анализа	Устный опрос Контрольная работа №1-4	Вопрос на экзамене 8-11
4	ИОПК-1.2. Осуществляет выбор методов решения задач фундаментальной математики	Знает формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства	Вопросы для устного опроса по всем темам	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
5		Умеет применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания;	Контрольная работа №1-4	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
6		Владеет методами применения аппарата функционального анализа к решению задач	Устный опрос Контрольная работа №1-4	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
7	ИОПК-1.3. Владеет навыками формализации актуальных задач фундаментальной математики и применения подходящих методов их решения	Знает формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства	Вопросы для устного опроса по всем темам	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
8		Умеет ставить задачи, пользуясь языком функционального анализа	Контрольная работа №1-4	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
9		Владеет методами применения аппарата функционального анализа к решению задач	Устный опрос Контрольная работа №1-4	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
10	ИПК-1.1. Знает основные понятия, идеи и методы фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач	Знает основные понятия, определения и свойства объектов функционального анализа;	Вопросы для устного опроса по всем темам	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
11		Умеет математически корректно ставить задачи, возникающие в приложениях;	Контрольная работа №1-4	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
12		Владеет навыками применения полученных знаний в других областях математического знания и дисциплинах	Устный опрос Контрольная работа №1-4	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)

		естественнонаучного содержания		
13	ИПК-1.2. Умеет передавать результаты проведенных теоретических и прикладных исследований в виде конкретных предметных рекомендаций в терминах предметной области	Знает возможные сферы приложения методов функционального анализа в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания	Вопросы для устного опроса по всем темам	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
14		Умеет применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания	Контрольная работа №1-4	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
15		Владеет навыками применения полученных знаний в дисциплинах естественнонаучного содержания	Устный опрос Контрольная работа №1-4	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
16	ИПК-1.3. Самостоятельно и корректно решает стандартные задачи фундаментальной и прикладной математики	Знает постановки задач функционального анализа	Вопросы для устного опроса по всем темам	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
17		Умеет математически корректно ставить задачи, возникающие в приложениях	Контрольная работа №1-4	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
18		Владеет навыками применения полученных знаний в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания	Устный опрос Контрольная работа №1-4	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
19	ИПК-1.4. Имеет навыки решения математических задач, соответствующих квалификации, возникающих при проведении научных и прикладных исследований	Знает методы решения задач функционального анализа	Вопросы для устного опроса по всем темам	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
20		Умеет применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания	Контрольная работа №1-4	Вопросы на экзамене 1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
21		Владеет навыками применения	Устный опрос Контрольная работа №1-4	Вопросы на экзамене

		полученных знаний в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания		1-35(первый семестр), 1-34 (второй семестр)
--	--	---	--	--

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Вопросы для устного опроса по теме:

«Мера и интеграл Лебега»

1. Измеримые множества.
2. Измеримые функции.
3. Определение интеграла Лебега
4. Свойства интеграла Лебега.

«Линейные операторы»

1. Непрерывные линейные операторы.
2. Пространство линейных операторов.
3. Норма линейного непрерывного оператора.
4. Принцип равномерной ограниченности.
5. Обратные операторы.
6. Свойства обратимых операторов.

«Принципы неподвижной точки»

1. Определение сжимающего оператора.
2. Принцип сжимающих отображений (формулировка).
3. Может ли сжимающий оператор иметь несколько неподвижных точек?
4. Относительно компактное множество.

«Вполне непрерывные операторы»

1. Определение вполне непрерывного оператора.
2. Приведите пример вполне непрерывного оператора.
3. Является ли тождественный оператор вполне непрерывным?
4. Сформулируйте первую теорему Фредгольма.
5. Сформулируйте вторую теорему Фредгольма.
6. Сформулируйте третью теорему Фредгольма.

«Элементы нелинейного анализа»

1. Определение сильного дифференциала.
2. Определение слабого дифференциала.
3. Определение экстремума.
4. Необходимое условие экстремума функционала.

Вопросы к коллоквиуму по теме «Банаховы пространства. Гильбертовы пространства»

1. Линейные пространства.
2. Нормированные пространства.
3. Пространства l_p^n и l_p .
4. Топология нормированных пространств.
5. Теорема о вложенных шарах.
6. Теорема Бэра.
7. Конечномерные пространства.
8. Пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского.
9. Теорема о диагоналях параллелограмма.
10. Теорема Пифагора.
11. Теорема о проекции.
12. Линейная зависимость и независимость.
13. ОНС. Процесс ортогонализации.
14. Ряд Фурье.
15. Частичная сумма ряда Фурье.
16. Сходимость ряда Фурье.
17. Теорема Фишера-Рисса.

Образцы контрольных работ

5 семестр

Контрольная работа №1

1. Найти меру Лебега следующих множеств:

$$а) M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{3^{n-1}} \right),$$

$$б) M = \{-1; -0,9; -0,8\}.$$

2. Вычислить, если возможно, интеграл Лебега от следующих функций по данным множествам:

$$а) f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1] \cap Q, \\ -3, & x \in [0;1] \setminus Q, \end{cases} \quad x \in [0;1]$$

$$б) f(x) = \frac{1}{2^n}, \quad x \in [n; n+1), \quad x \in [1; +\infty)$$

$$в) f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \in K, \\ 1, & x \in [0;0,5] \setminus K, \\ -3, & x \in (0,5;1] \setminus K \end{cases} \quad x \in [0;1]$$

$$г) f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0; \pi/2] \setminus Q, \\ \cos x, & x \in (\pi/2; \pi] \setminus Q, \\ x^2 - 3x, & x \in [0; \pi] \cap Q \end{cases} \quad x \in [0; \pi]$$

Контрольная работа №2

1. Проверить, образует ли V линейное подпространство пространства X :

$$X = R^3, V = \{x \in R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

2. Является ли функция $\varphi(x) = 2|x_1 + x_2|$ нормой в пространстве R^2 .

3. Сходятся ли последовательности в указанных пространствах. В случае сходимости указать предел.

$$a) l_2, x_k = \left(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{k}, 0, \dots\right);$$

$$b) C[0,1], x_k(t) = t^k.$$

4. Найти проекцию вектора на подпространство и расстояние от вектора до подпространства

$$a) l_2, a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$$

$$\text{на подпространство } M = \{x \in l_2 : x = (0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\};$$

$$b) l_2^3, a = (1, 2, 1) \text{ на подпространство } M = \{x \in l_2^3 : x_1 - x_2 = 0\}.$$

5. Проверить линейность операторов:

$$a) A : R^3 \rightarrow R^3, Ax = (x_1^2, x_1 + x_3, x_3^2);$$

$$b) A : C[0,1] \rightarrow C[0,1], (Ax)(t) = x^2(t).$$

6. Оценить норму следующих операторов:

$$a) A : l_1^3 \rightarrow l_1^3, Ax = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

$$b) A : C[0,1] \rightarrow C[0,1], (Ax)(t) = t^2 x(t).$$

6 семестр

Контрольная работа №3

1. Доказать, что уравнение имеет решение

$$x = \frac{1}{3} \sin x + 2.$$

2. Доказать, используя принцип сжатых отображений, что система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + 2 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 5 \end{cases}.$$

3. При каких λ уравнение имеет единственное решение в $C[0, 1]$? При $\lambda = \frac{1}{2}$ найти решение

с точностью до 0,01.
$$x(t) = \lambda \int_0^1 ts^2 x(s) ds + 1$$

4. Обратим ли оператор? Если да, то найти обратный.

а) в l_2 : 1) $Ax = (x_1 + 2x_2, x_3 + 2x_4, x_5 + 2x_6, \dots)$

2) $Ax = (x_4, x_3, x_2, x_1, x_5, x_6, x_7, \dots)$

3) $Ax = (x_1, x_2, 0, x_3, x_4, 0, x_5, x_6, 0, \dots)$

б) в $C[0,1]$: $(Ax)(t) = x(t) - \int_0^1 stx(s) ds$

5. Найти спектр и спектральный радиус оператора A :

а) $A : l_\infty \rightarrow l_\infty$, $Ax = (x_1 + x_2, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$;

б) $A : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, $(Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds$.

Контрольная работа №4

1. Решить уравнение

$$x(t) = \int_{-1}^1 t^2 sx(s) ds + t$$

2. Найти характеристические значения и собственные функции

$$x(t) = \mu \int_0^1 (t^2 s + s)x(s) ds$$

3. С помощью итерированных ядер найти резольвенту и решить уравнение

$$x(t) = \mu \int_0^1 st^2 x(s) ds + t.$$

4. Найти λ , при которых уравнение имеет решение. Найти это решение.

$$x(t) = \lambda \int_{-1}^1 (ts + s^2)x(s) ds + t.$$

Зачетно-экзаменационные материалы для промежуточной аттестации (экзамен/зачет)

Примерных перечень вопросов к экзамену.

5 семестр

1. Измеримые множества.
2. Измеримые функции.
3. Интеграл Лебега (корректность).
4. Свойства интеграла Лебега.
5. σ – аддитивность интеграла Лебега.
6. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
7. Теорема Леви.
8. Лемма Фату.
9. Теорема Лебега.
10. Пространство $L_2(A)$.
11. Линейные пространства.
12. Нормированные пространства.
13. Пространства l_p^n и l_p .
14. Топология нормированных пространств.
15. Теорема о вложенных шарах.
16. Теорема Бэра.
17. Конечномерные пространства.
18. Пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского.
19. Теорема о диагоналях параллелограмма.
20. Теорема Пифагора.
21. Теорема о проекции.
22. ОНС. Процесс ортогонализации.
23. Ряд Фурье.
24. Частичная сумма ряда Фурье.
25. Сходимость ряда Фурье.
26. Теорема Фишера-Рисса.
27. Непрерывные линейные операторы.
28. Непрерывность интегрального оператора.
29. Пространство линейных операторов.
30. Полнота $\mathcal{L}(X, Y)$.
31. Принцип равномерной ограниченности.
32. Теорема Банаха – Штейнгауза.
33. Теорема Хана – Банаха.

34. Следствия теоремы Хана-Банаха.
35. Общий вид функционала в H .

6 семестр

1. Принцип сжатых отображений.
2. Теорема Хаусдорфа.
3. Теорема Арцеля.
4. Принцип Шаудера.
5. Применение принципов неподвижной точки к системам.
6. Интегральные уравнения.
7. Обратимые операторы. Теорема Банаха.
8. Операторы с малой нормой.
9. Обратимость близких операторов.
10. Спектр оператора и его свойства. Примеры.
11. Резольвента оператора и её свойства. Теорема о непустоте спектра.
12. Спектральный радиус оператора и формула для его вычисления. Спектральный радиус оператора Вольтерра.
13. Вполне непрерывные операторы и их свойства.
14. Вполне непрерывность предельного оператора.
15. Вполне непрерывность интегрального оператора.
16. Сопряженные операторы в H .
17. Свойства A^* .
18. Вполне непрерывность сопряженного оператора.
19. Сопряженный интегральный оператор.
20. Замкнутость $\text{Im}(I - A)$.
21. Конечномерные операторы.
22. Аппроксимация вполне непрерывных операторов конечномерными.
23. Первая теорема Фредгольма.
24. Вторая теорема Фредгольма.
25. Третья теорема Фредгольма.
26. Теорема о спектре вполне непрерывного оператора.
27. Самосопряженные операторы и их свойства.
28. Существование ненулевого собственного числа у вполне непрерывного самосопряженного оператора.
29. Теорема Гильберта–Шмидта.
30. Интегральные уравнения. Теоремы Фредгольма.
31. Интегральные уравнения с вырожденным ядром.
32. Интегральные уравнения с симметричным ядром.
33. Слабый и сильный дифференциал нелинейного функционала.
34. Экстремум функционала.

Критерии оценивания результатов обучения

Оценка	Критерии оценивания по экзамену
Высокий уровень «5» (отлично)	оценку «отлично» заслуживает студент, освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал без пробелов; выполнивший все задания, предусмотренные учебным планом на высоком качественном уровне; практические навыки профессионального применения освоенных знаний сформированы.
Средний уровень «4» (хорошо)	оценку «хорошо» заслуживает студент, практически полностью освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не оценены максимальным числом баллов, в основном сформировал практические навыки.

Пороговый уровень «3» (удовлетворительно)	оценку «удовлетворительно» заслуживает студент, частично с пробелами освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, многие учебные задания либо не выполнил, либо они оценены числом баллов близким к минимальному, некоторые практические навыки не сформированы.
Минимальный уровень «2» (неудовлетворительно)	оценку «неудовлетворительно» заслуживает студент, не освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не выполнил, практические навыки не сформированы.

Критерии оценивания по зачету:

Зачет выставляется по результатам работы студента в течение семестра. Отметка «зачтено» выставляется студентам, которые регулярно посещали занятия, выполняли домашние работы, написали контрольные работы на положительные оценки. Отметка «незачтено» выставляется студентам, которые пропустили более 60 % занятий и написали контрольные работы на неудовлетворительные оценки.

«зачтено»: студент владеет теоретическими знаниями по данному разделу, допускает незначительные ошибки.

«не зачтено»: материал не усвоен или усвоен частично, студент затрудняется решить стандартные задачи, имеет довольно ограниченный объем знаний программного материала.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

5. Перечень учебной литературы, информационных ресурсов и технологий

5.1. Учебная литература

1. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2009. — 572 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2206>.
2. Пуляев В.Ф., Цалюк З.Б. Сборник задач по функциональному анализу. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная хаотическая механика», 2010.
3. Филимоненкова, Н.В. Сборник задач по функциональному анализу [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 240 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/65041>
4. Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 272 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/245>
5. Треногин, В.А. Функциональный анализ [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2002. — 488 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2340>
6. Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2005. — 240 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2342>. — Загл. с экрана.
7. Цалюк З.Б., Цалюк М.В. Функциональный анализ. Просвещение-Юг, Краснодар, 2014.

5.2. Периодическая литература

Не требуется

5.3. Интернет-ресурсы, в том числе современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Электронно-библиотечные системы (ЭБС):

1. ЭБС «ЮРАЙТ» <https://urait.ru/>
2. ЭБС «УНИВЕРСИТЕТСКАЯ БИБЛИОТЕКА ОНЛАЙН» www.biblioclub.ru
3. ЭБС «BOOK.ru» <https://www.book.ru>
4. ЭБС «ZNANIUM.COM» www.znanium.com
5. ЭБС «ЛАНЬ» <https://e.lanbook.com>

Профессиональные базы данных:

1. Web of Science (WoS) <http://webofscience.com/>
2. Scopus <http://www.scopus.com/>
3. ScienceDirect www.sciencedirect.com
4. Журналы издательства Wiley <https://onlinelibrary.wiley.com/>
5. Научная электронная библиотека (НЭБ) <http://www.elibrary.ru/>
6. Полнотекстовые архивы ведущих западных научных журналов на Российской платформе научных журналов НЭИКОН <http://archive.neicon.ru>
7. Национальная электронная библиотека (доступ к Электронной библиотеке диссертаций Российской государственной библиотеки (РГБ) <https://rusneb.ru/>
8. Президентская библиотека им. Б.Н. Ельцина <https://www.prlib.ru/>
9. Электронная коллекция Оксфордского Российского Фонда <https://ebookcentral.proquest.com/lib/kubanstate/home.action>
10. Springer Journals <https://link.springer.com/>
11. Nature Journals <https://www.nature.com/siteindex/index.html>
12. Springer Nature Protocols and Methods <https://experiments.springernature.com/sources/springer-protocols>
13. Springer Materials <http://materials.springer.com/>

14. zbMath <https://zbmath.org/>
15. Nano Database <https://nano.nature.com/>
16. Springer eBooks: <https://link.springer.com/>
17. "Лекториум ТВ" <http://www.lektorium.tv/>
18. Университетская информационная система РОССИЯ <http://uisrussia.msu.ru>

Информационные справочные системы:

1. Консультант Плюс - справочная правовая система (доступ по локальной сети с компьютеров библиотеки)

Ресурсы свободного доступа:

1. Американская патентная база данных <http://www.uspto.gov/patft/>
2. Полные тексты канадских диссертаций <http://www.nlc-bnc.ca/thesescanada/>
3. КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru/>);
4. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации <https://www.minobrnauki.gov.ru/>;
5. Федеральный портал "Российское образование" <http://www.edu.ru/>;
6. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" <http://window.edu.ru/>;
7. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов <http://school-collection.edu.ru/> .
8. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (<http://fcior.edu.ru/>);
9. Проект Государственного института русского языка имени А.С. Пушкина "Образование на русском" <https://pushkininstitute.ru/>;
10. Образовательный портал "Учеба" <http://www.uceba.com/>;

Собственные электронные образовательные и информационные ресурсы

КубГУ:

1. Среда модульного динамического обучения <http://moodle.kubsu.ru>
2. База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций <http://mschool.kubsu.ru/>
3. Библиотека информационных ресурсов кафедры информационных образовательных технологий <http://mschool.kubsu.ru/>;
4. Электронный архив документов КубГУ <http://docspace.kubsu.ru/>
5. Электронные образовательные ресурсы кафедры информационных систем и технологий в образовании КубГУ и научно-методического журнала "ШКОЛЬНЫЕ ГОДЫ" <http://icdau.kubsu.ru/>

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной систематизированный материал, лабораторных занятий, в ходе которых студентами приобретаются и закрепляются основные практически навыки решения различных задач, в том числе с применением полученных теоретических знаний.

Важнейшим этапом курса является самостоятельная работа по дисциплине. Самостоятельная работа студентов является неотъемлемой частью процесса подготовки. Под самостоятельной работой понимается часть учебной планируемой работы, которая выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа направлена на усвоение системы научных и профессиональных знаний, формирования умений и навыков, приобретение опыта

самостоятельной творческой деятельности. СРС помогает формировать культуру мышления студентов, расширять познавательную деятельность.

Виды самостоятельной работы по курсу:

а) по целям: подготовка к лекциям, к практическим занятиям, к контрольной работе, к коллоквиуму.

б) по характеру работы: изучение литературы, конспекта лекций; поиск литературы в библиотеке; конспектирование рекомендуемой для самостоятельного изучения научной литературы; решение задач, тестов; работа с обучающими и контролирующими программами.

Тематическое планирование самостоятельной работы студентов

№ п/п	Наименование раздела	Содержание раздела	Вид работы
1	2	3	4
1	Мера и интеграл Лебега	Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Интеграл Стильеса.	Поиск необходимой информации (см. список литературы). Решение задач.
2	Банаховы пространства	Линейные и нормированные пространства. $l_p^n, l_p, l_\infty, C[a,b], L_p[a,b]$. Топология. Теорема Бэра.	Поиск необходимой информации. Изучение лекционного материала. Конспектирование.
3	Гильбертовы пространства	Конечномерные пространства. Гильбертовы пространства.	Повторение лекционного материала и материала учебников. Подготовка к контрольной работе
4	Линейные операторы	Принцип равномерной ограниченности. Обратимость линейных операторов. Теорема Хана – Банаха. Линейный функционал в некоторых банаховых пространствах.	Поиск необходимой информации. Подготовка к контрольной работе
5	Принципы неподвижной точки	Принцип сжимающих отображений. Применения. Интегральные уравнения.	Изучение лекционного материала и материала учебников.
6	Вполне непрерывные операторы	Резольвента. Спектр. Спектральный радиус. Вполне непрерывные операторы. Сопряженные операторы. Теория Фредгольма. Спектр вполне непрерывного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта.	Поиск необходимой информации. Решение задач. Подготовка к контрольной работе
7	Элементы нелинейного анализа	Экстремум функционала. Классические задачи вариационного исчисления.	Изучение и повторение лекционного материала.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

7. Материально-техническое обеспечение по дисциплине (модулю)

По всем видам учебной деятельности в рамках дисциплины используются аудитории, кабинеты и лаборатории, оснащенные необходимым специализированным и лабораторным оборудованием.

Наименование специальных помещений	Оснащенность специальных помещений	Перечень лицензионного программного обеспечения
Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа	Мебель: учебная мебель Технические средства обучения: экран, проектор, компьютер	Microsoft Windows 8, 10 Microsoft Office Professional Plus Kaspersky Endpoint Security для бизнеса
Учебные аудитории для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Мебель: учебная мебель Технические средства обучения: экран, проектор, компьютер	Microsoft Windows 8, 10 Microsoft Office Professional Plus Kaspersky Endpoint Security для бизнеса
Учебные аудитории для проведения лабораторных работ.	Мебель: учебная мебель Технические средства обучения: экран, проектор, компьютер	Microsoft Windows 8, 10 Microsoft Office Professional Plus Kaspersky Endpoint Security для бизнеса
Учебные аудитории для выполнения курсовых работ	Мебель: учебная мебель Технические средства обучения: экран, проектор, компьютер	Microsoft Windows 8, 10 Microsoft Office Professional Plus Kaspersky Endpoint Security для бизнеса MATLAB Wavelet Toolbox WolframResearch Mathematica MapleSoft Maple 18 PTC Mathcad

Для самостоятельной работы обучающихся предусмотрены помещения, укомплектованные специализированной мебелью, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

Наименование помещений для самостоятельной работы обучающихся	Оснащенность помещений для самостоятельной работы обучающихся	Перечень лицензионного программного обеспечения
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (читальный зал Научной библиотеки)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации,	Microsoft Windows 8, 10 Microsoft Office Professional Plus Kaspersky Endpoint Security для бизнеса

	веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	
Помещение для самостоятельной работы обучающихся (ауд.314)	Мебель: учебная мебель Комплект специализированной мебели: компьютерные столы Оборудование: компьютерная техника с подключением к информационно-коммуникационной сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду образовательной организации, веб-камеры, коммуникационное оборудование, обеспечивающее доступ к сети интернет (проводное соединение и беспроводное соединение по технологии Wi-Fi)	Microsoft Windows 8, 10 Microsoft Office Professional Plus Kaspersky Endpoint Security для бизнеса MATLAB Wavelet Toolbox WolframResearch Mathematica MapleSoft Maple 18 PTC Mathcad