

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе,  
качеству образования – первый  
проректор

29 мая 2020 г.



## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

**Б1.В.10**

### ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Специальность	01.05.01 Фундаментальные математика и механика
Специализация	«Фундаментальная математика и её приложения»
Уровень высшего образования	специалитет
Форма обучения	очная
Квалификация выпускника	Математик. Механик. Преподаватель

Краснодар 2020

## 1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

### 1.1 Цель изучения дисциплины

**Цель** изучения дисциплины «Вариационное исчисление»: формирование у студентов способности формулировать, решать и интерпретировать экстремальные задачи для функционалов на бесконечномерных пространствах функций.

**Предмет** изучения дисциплины «Вариационное исчисление»: аналитические и численные методы решения экстремальных задач.

### 1.2 Задачи дисциплины

**Основные задачи** изучения дисциплины «Вариационное исчисление»:

- теоретическое освоение студентами основных понятий, методов и результатов в области исследования экстремальных задач для функционалов;
- обретение понимания практической значимости экстремальных задач в различных отраслях науки, техники, экономики;
- обретение умений формулировать экстремальные задачи;
- обретение навыков аналитического и численного решения экстремальных задач;
- обретение навыков интерпретации полученных решений.

### 1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Вариационное исчисление» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений, блока Б.1 «Дисциплины (модули)».

В соответствии с учебным планом данная дисциплина является последующей для дисциплин: «Технология программирования и работа на электронно-вычислительной машине (ЭВМ)», «Физика», «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Алгебра», «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Дифференциальная геометрия и топология», «Дифференциальные уравнения», «Уравнения в частных производных», «Теория вероятностей», «Теория случайных процессов», «Дискретная математика», «Теоретическая механика», «Основы и математические модели механики сплошной среды», «Интегральные уравнения», «Математические пакеты и их применение в естественных науках», «Элементарная геометрия», «Математическое моделирование в механике», «Математическое моделирование», «Математическая логика», «Практикум на ЭВМ».

### 1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины «Вариационное исчисление» направлен на формирование у обучающихся профессиональных компетенций ПК-1; ПК-2.

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
1	ПК-1	Способен формулировать и решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики	– основные понятия, методы и результаты в области исследования экстремальных задач	– аналитически и численно решать экстремальные задачи	– навыками интерпретации полученных решений экстремальных задач

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
2	ПК-2	Способен активно участвовать в исследовании новых математических моделей в естественных науках	– принципы применения математических моделей для постановки экстремальных задач	– оценивать практическую значимость экстремальных задач в различных отраслях науки, техники, экономики	– навыками решения экстремальных задач на ЭВМ

## 2 СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 3 зач. ед. (108 часов). Распределение часов по видам учебной работы представлено в таблице.

Вид учебной работы	Всего, часов	10 семестр
<b>Контактная работа, в том числе:</b>	<b>50,3</b>	<b>50,3</b>
<b>Аудиторные занятия (всего)</b>	<b>48</b>	<b>48</b>
Занятия лекционного типа	24	24
Лабораторные занятия	24	24
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)	–	–
<b>Иная контактная работа:</b>	<b>2,3</b>	<b>2,3</b>
Контроль самостоятельной работы (КСР)	2	2
Промежуточная аттестация (ИКР)	0,3	0,3
<b>Самостоятельная работа, в том числе:</b>	<b>22</b>	<b>22</b>
Проработка учебного (теоретического) материала	10	10
Подготовка к практическим занятиям	10	10
Подготовка к текущему контролю	2	2
<b>Контроль:</b>	<b>35,7</b>	<b>35,7</b>
<b>Общая трудоёмкость</b>	<b>часов</b>	<b>108</b>
	<b>в том числе контактная работа</b>	<b>50,3</b>
	<b>зач. ед.</b>	<b>3</b>

### 2.2 Структура дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоёмкости по разделам дисциплины представлены в таблице.

№ раз-дела	Наименование разделов	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Вне-аудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	
1	Основные понятия, методы и классические задачи вариационного исчисления	12	4	–	4	4
2	Задачи вариационного исчисления с подвижными границами	12	4	–	4	4
3	Достаточные условия экстремума	10	4	–	4	2
4	Задачи на условный экстремум	12	4	–	4	4
5	Оптимальное управление	12	4	–	4	4
6	Численные методы решения задач вариационного исчисления	12	4	–	4	4
	Итого	70	24	–	24	22
	КСР	2	–	–	–	–
	Промежуточная аттестация (ИКР)	0,3	–	–	–	–
	Контроль:	35,7	–	–	–	35,7
	<i>Итого по дисциплине:</i>	108	24	–	24	–

Примечание: Л – лекции, ПЗ – практические занятия, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента.

### 2.3 Содержание разделов дисциплины

В данном подразделе в табличной форме приводится описание содержания дисциплины, структурированное по разделам, с указанием по каждому разделу формы текущего контроля.

#### 2.3.1 Занятия лекционного типа

Перечень занятий лекционного типа и их краткое содержание представлен в таблице.

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	Основные понятия, методы и классические задачи вариационного исчисления	Функционал. Типы экстремумов. Вариация и ее свойства. Постановка задач вариационного исчисления. Вариации интегральных функционалов в задачах с неподвижными границами. Необходимое условие локального минимума. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Вторая вариация интегрального функционала. Условие Лежандра. Условие Якоби. Функционалы с производными высокого порядка. Вариационные задачи в параметрической форме.	–
2	Задачи вариационного исчисления с подвижными границами	Задачи с подвижными концами. Условия трансверсальности. Задачи с подвижными границами. Экстремали с угловыми точками. Односторонние вариации.	–

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
3	Достаточные условия экстремума	Поле экстремалей. Условие Якоби. Слабый экстремум. Сильный экстремум. Условие Лежандра	–
4	Задачи на условный экстремум	Условный экстремум в конечномерных задачах. Постановка задачи на условный экстремум. Изопериметрические задачи	–
5	Оптимальное управление	Задача оптимального управления. Уравнение эволюции динамической системы. Критерий качества в задаче оптимального управления. Функция Гамильтона. Принцип максимума Понтрягина. Достаточные условия оптимальности в задаче оптимального управления.	–
6	Численные методы решения задач вариационного исчисления	Конечно-разностный метод Эйлера. Метод Рунге. Градиентный метод. Метод Ньютона	–

### 2.3.2 Занятия семинарского типа

Распределение занятий семинарского типа по разделам дисциплины представлено в таблице. Формами текущего контроля являются устный опрос (УО) и аудиторная контрольная работа (АКР).

№	Наименование раздела	Наименование практических занятий	Форма текущего контроля
1	Основные понятия, методы и классические задачи вариационного исчисления	1. Решение простейших задач вариационного исчисления. 2. Решение задач вариационного исчисления с двумя неизвестными функциями.	УО, АКР
2	Задачи вариационного исчисления с подвижными границами	3. Решение задач с подвижными концами. 4. Решение задач с подвижными концами для двух неизвестных функций.	УО, АКР
3	Достаточные условия экстремума	5. Построение поля экстремалей. 6. Проверка достаточных условий экстремумов.	УО
4	Задачи на условный экстремум	7. Решение задач на условный экстремум при функциональных связях. 8. Решение задач на условный экстремум при дифференциальных связях.	УО, АКР
5	Оптимальное управление	9. Решение задач на построение оптимального управления простейшей динамической системой. 10. Решение задач на применение принципа максимума Понтрягина.	УО
6	Численные методы решения задач вариационного исчисления	11. Разработка алгоритма и программы решения задач вариационного исчисления методом Эйлера. 12. Разработка алгоритма и программы решения задач вариационного исчисления методом Ньютона.	УО

### 2.3.3 Лабораторные занятия

Лабораторные занятия учебным планом не предусмотрены.

### 2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Выполнение курсовых работ (проектов) учебным планом не предусмотрено.

## 2.4 Перечень учебно-методического обеспечения

### для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины представлен в таблице.

№	Наименование раздела	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	Основные понятия, методы и классические задачи вариационного исчисления	«Методические указания по организации самостоятельной работы студентов», утвержденные кафедрой информационных и образовательных технологий, протокол № 1 от 31 августа 2017 г. Учебное пособие [1], материалы из списка дополнительной литературы
2	Задачи вариационного исчисления с подвижными границами	«Методические указания по организации самостоятельной работы студентов», утвержденные кафедрой информационных и образовательных технологий, протокол № 1 от 31 августа 2017 г. Учебное пособие [1], материалы из списка дополнительной литературы
3	Достаточные условия экстремума	Учебное пособие [1], материалы из списка дополнительной литературы
4	Задачи на условный экстремум	Учебное пособие [1], материалы из списка дополнительной литературы
5	Оптимальное управление	Учебное пособие [2], материалы из списка дополнительной литературы
6	Численные методы решения задач вариационного исчисления	Учебное пособие [3], материалы из списка дополнительной литературы

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом;
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме;
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме;
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

### 3 ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Для более эффективного восприятия материала часть лекций и практических занятий проводится с применением мультимедийного оборудования – комплекса аппаратно-программных средств, позволяющих пользователю работать с графикой, текстом, звуком, видео и др., организованными в виде единой информационной среды.

### 4 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

#### 4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля

Текущий контроль знаний студентов выполняется в ходе проведения практических занятий путем проверки результатов ответов студентов на вопросы самопроверки и выполнения аудиторных контрольных работ. Цель контрольных работ – контроль освоения теоретического и практического материала по дисциплине. Задания контрольных работ аналогичны заданиям, представленным в задачниках по дисциплине, приведённых в списке основной и дополнительной литературы.

В качестве оценочных средств для самоконтроля могут служить:

- 1) задания, представленные в задачниках по дисциплине, приведённых в списке основной и дополнительной литературы в разделе 5;
- 2) перечень вопросов для подготовки к экзамену и контроля самостоятельной работы студента, приведённый в подразделе 4.2.

#### 4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Оценочные средства для промежуточной аттестации имеют целью выявление степени освоения теоретических знаний и практических навыков по данной дисциплине как базу для формирования надлежащих компетенций.

Перечень вопросов для подготовки к зачёту и контролю СРС.

1. Функционал. Типы экстремумов. Вариация и ее свойства.
2. Постановка задач вариационного исчисления.
3. Вариации интегральных функционалов в задачах с неподвижными границами.
4. Необходимое условие локального минимума.
5. Основная лемма вариационного исчисления.
6. Уравнение Эйлера.
7. Вторая вариация интегрального функционала.
8. Условие Лежандра.
9. Условие Якоби.
10. Функционалы с производными высокого порядка.
11. Вариационные задачи в параметрической форме.
12. Задачи с подвижными концами.
13. Условия трансверсальности.
14. Задачи с подвижными границами.
15. Экстремали с угловыми точками.
16. Односторонние вариации.
17. Поле экстремалей.
18. Слабый экстремум.
19. Сильный экстремум.
20. Условный экстремум в конечномерных задачах.
21. Постановка задачи на условный экстремум.
22. Изопериметрические задачи.
23. Задача оптимального управления.

24. Уравнение эволюции динамической системы.
25. Критерий качества в задаче оптимального управления.
26. Функция Гамильтона.
27. Принцип максимума Понтрягина.
28. Достаточные условия оптимальности в задаче оптимального управления.
29. Конечно-разностный метод Эйлера.
30. Метод Рунге.
31. Градиентный метод.
32. Метод Ньютона.

Оценка «Отлично» выставляется при условии, что студент проявил всесторонние и глубокие знания изученного материала. Практическое задание выполнено в полном объеме, правильно или с незначительными неточностями.

Оценка «Хорошо» выставляется при условии, что студент проявил знание изученного материала. Практическое задание выполнено с отдельными неточностями.

Оценка «Удовлетворительно» выставляется при условии, что студент проявил знания основного минимума изученного материала в объеме, необходимом для последующего обучения. Практическое задание выполнено не в полном объеме, имеются существенные неточности и ошибки.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется при условии, что студент обнаружил существенные пробелы в знании основного материала, Практическое задание выполнено не в полном объеме, имеются существенные ошибки, окончательных ответов не получено.

## **5 ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **5.1 Основная литература**

1. Вариационное исчисление и методы оптимизации : учеб. пособие для вузов / Ю. Я. Болдырев. — М. : Издательство Юрайт, :2019. — 240 е. — Серия : Университеты России. ISBN 978-5-534-01707-6 - <https://biblio-online.ru/book/variacionnoe-ischislenie-i-metody-optimizacii-438267>
2. Теория оптимального управления : учебное пособие / И.П. Болодурина, Т.А. Огурцова, О.С. Арапова, Ю.П. Иванова ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Оренбургский Государственный Университет. - Оренбург : ОГУ, 2016. - 147 с. : ил., схем., табл. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7410-1505-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=469724>
3. Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях: учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. — Электрон. дан. — Москва : Издательство "Лаборатория знаний", 2015. — 243 с. — ISBN 978-5-9963-2980-9 - [Электронный ресурс]. — URL: <https://e.lanbook.com/book/70743> .

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются издания в электронном виде в ЭБС «Лань» и «Юрайт».

### **5.2 Дополнительная литература**

4. Оптимальное управление в технических системах. Практикум : учебное пособие / Е.А. Балашова, Ю.П. Барметов, В.К. Битюков, Е.А. Хромых ; науч. ред. В.К. Битюков ; Министерство образования и науки РФ, Воронежский государственный университет инженерных технологий. - Воронеж : Воронежский государственный университет инженерных тех-

нологий, 2017. - 289 с. : табл., граф. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-00032-307-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=482037>

5. Пименов, В. Г. Численные методы в 2 ч. Ч. 1 : учебное пособие для вузов / В. Г. Пименов. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 111 с. — (Серия : Университеты России). — ISBN 978-5-534-04681-6. — URL: <https://biblio-online.ru/book/E2DB1B52-AC50-4959-9E63-7FFE2239DC88/chislennye-metody-v-2-ch-ch-1>

6. Пименов, В. Г. Численные методы в 2 ч. Ч. 2 : учебное пособие для вузов / В. Г. Пименов, А. Б. Ложников. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 107 с. — (Серия : Университеты России). — ISBN 978-5-534-04683-0. — URL: <https://biblio-online.ru/book/513A504B-789E-49C9-B42D-A5961E985F14/chislennye-metody-v-2-ch-ch-2>

## 6 ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. ЭБС «Университетская библиотека online». Режим доступа: [www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru).
2. ЭБС издательства «Лань». Режим доступа: <http://e.lanbook.com>.
3. ЭБС «Юрайт». Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru>.
4. ЭБС «ZNANIUM.COM». Режим доступа: [www.znanium.com](http://www.znanium.com).

## 7 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебный план по дисциплине предусматривает проведение внеаудиторной самостоятельной работы студентов. Основная цель самостоятельной работы студентов состоит в закреплении, расширении и углублении знаний материала, изучаемого на аудиторных занятиях, формировании навыков исследовательской работы и повышении образовательного уровня студентов без непосредственного участия преподавателя. Самостоятельная работа студентов по дисциплине включает следующие виды деятельности:

- проработку и анализ лекционного материала;
- изучение учебной литературы;
- поиск информации в сети Интернет по различным вопросам;
- выполнение расчётных заданий и решение задач;
- работу с вопросами для самопроверки по темам курса;
- подготовку к контрольной работе;
- подготовку к экзамену.

Организация процесса СРС по дисциплине представлена в таблице.

№	Наименование раздела	Содержание СРС	Кол-во часов	Форма контроля
1	Основные понятия, методы и классические задачи вариационного исчисления	Проработка лекционного материала. Изучение учебной литературы. Выполнение практических домашних заданий. Подготовка к контрольной работе.	4	УО, АКР
2	Задачи вариационного исчисления с подвижными границами	Проработка лекционного материала. Изучение учебной литературы. Выполнение практических домашних заданий. Подготовка к контрольной работе.	4	УО, АКР

№	Наименование раздела	Содержание СРС	Кол-во часов	Форма контроля
3	Достаточные условия экстремума	Проработка лекционного материала. Изучение учебной литературы. Выполнение практических домашних заданий.	2	УО
4	Задачи на условный экстремум	Проработка лекционного материала. Изучение учебной литературы. Выполнение практических домашних заданий. Подготовка к контрольной работе.	4	УО, АКР
5	Оптимальное управление	Проработка лекционного материала. Изучение учебной литературы. Выполнение практических домашних заданий.	4	УО
6	Численные методы решения задач вариационного исчисления	Проработка лекционного материала. Изучение учебной литературы. Выполнение практических домашних заданий.	4	УО
–	–	–	22	–

## 8 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### 8.1 Перечень необходимого программного обеспечения

В ходе изучения данной дисциплины может использоваться следующее программное обеспечение:

- интернет-браузеры для просмотра сайтов в сети Интернет;
- система программирования Visual Basic for Applications.

### 8.2 Перечень необходимых информационных справочных систем

1. <http://en.wikipedia.ru> – созданная пользователями интернет-энциклопедия.
2. <http://mathworld.wolfram.com> – краткие энциклопедические статьи по математике.
3. <http://eqworld.ipmnet.ru> – решение различных типов уравнений.
4. <http://www.matburo.ru> – ссылки на лучшие материалы по высшей математике.
5. <http://www.exponenta.ru> – математика от пределов и производных до методов оптимизации, уравнений математической физики и проверки статистических гипотез в среде самых популярных математических пакетов.
6. <http://www.allmath.ru/> – математический портал, на котором представлен широкий круг материалов по математическим дисциплинам.
7. <http://math.semestr.ru> – автоматический сервис для самостоятельной работы студентов. Позволяет проверить ответ и проследить ход решения задачи.
8. [www.Math-Net.ru](http://www.Math-Net.ru) – общероссийский математический портал.

## 9 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА, НЕОБХОДИМАЯ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Распределение видов материально-технического обеспечения по видам занятий представлено в таблице.

Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины и оснащенность
Лекционные занятия	Лекционные аудитории, оснащенные презентационной техникой (проектор, экран, ноутбук) и соответствующим программным обеспечением
Практические занятия	Аудитории, оснащенные презентационной техникой (проектор, экран, ноутбук), персональными компьютерами и соответствующим программным обеспечением
Текущий контроль, промежуточная аттестация	Учебные аудитории
Самостоятельная работа	Кабинеты для самостоятельной работы, оснащенные персональными компьютерами с возможностью подключения к сети Интернет, программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета