

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Кубанский государственный университет»  
Факультет компьютерных технологий и прикладной математики



## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### Б1.В.04 УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Направление подготовки 02.03.03 Математическое обеспечение и  
администрирование информационных систем

Направленность (профиль) \_\_\_\_\_ Технология программирования \_\_\_\_\_

Программа подготовки \_\_\_\_\_ академическая \_\_\_\_\_


Форма обучения \_\_\_\_\_ очная \_\_\_\_\_

Квалификация (степень) выпускника \_\_\_\_\_ бакалавр \_\_\_\_\_

Рабочая программа дисциплины «УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ» составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению **02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем**, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации № 809 от 23 августа 2017 г.


Программу составили:

Павлова А.В., д-р физ.-мат. наук, доцент, проф. кафедры математического моделирования КубГУ




Рабочая программа дисциплины «Уравнения в частных производных» утверждена на заседании кафедры математического моделирования протокол № 12 «20» мая 2020 г.

Заведующий кафедрой математического моделирования акад. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф. Бабешко В.А.




Рабочая программа дисциплины «Уравнения в частных производных» обсуждена на заседании кафедры информационных технологий протокол № 18 «06» мая 2020 г.

И.о. заведующего кафедрой информационных технологий канд. физ.-мат. наук, доцент, Гаркуша О.В.



Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета компьютерных технологий и прикладной математики протокол № 2 «22» мая 2020 г.

Председатель УМК факультета канд. экон. наук, доцент Коваленко А.В.



Рецензенты:

Калайдин Е.Н., д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой «Математика и информатика» Финансового университета при Правительстве РФ (Краснодарский филиал)

Уртенев М.Х., д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой прикладной математики КубГУ

## **1 Цели и задачи изучения дисциплины**

### **1.1 Цель освоения дисциплины**

Данная дисциплина ставит своей целью изучение фундаментальных основ теории уравнений в частных производных в объеме, необходимом для общего развития и освоения смежных дисциплин физико-математического цикла, овладение аппаратом математической физики и подготовку к сознательному восприятию процедур прикладного анализа, освоение методов построения математических моделей на основе уравнений математической физики. Цели дисциплины соответствуют формируемым компетенциям ОПК-6, ПК-1.

### **1.2 Задачи дисциплины**

Основные задачи дисциплины:

- усвоение основных идей, понятий и фактов уравнений в частных производных, необходимых для решения теоретических и прикладных задач применения дисциплины, в том числе с помощью программного обеспечения;
- формирование навыков формулировать и решать задачи математической физики, создавать и использовать математические модели процессов и объектов, выбирать соответствующие программные средства для их реализации;
- расширение и углубление теоретических знаний и развитие логического мышления; подъем общего уровня математической культуры; формирование творческого подхода к изучению процессов и явлений.

### **1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина «Уравнения в частных производных» относится к базовой части Блока 1 "Дисциплины (модули)" учебного плана подготовки бакалавра. Место курса в подготовке выпускника определяется ролью методов и идей уравнений математической физики в частных производных в формировании специалиста по любой области знаний, серьезно использующей математику. Уравнения в частных производных лежат в основе математических моделей реальных явлений, используются в моделировании процессов различной природы, а также в инженерно-технических приложениях. Данный курс наиболее тесно связан с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, поскольку большинство уравнений математической физики сводятся тем или иным способом к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Использование математических пакетов для решения и анализа задач математической физики позволяет шире освоить и использовать прикладное программное обеспечение.

Необходимым требованием к «входным» знаниям, умениям и опыту деятельности обучающегося при освоении данной дисциплины является освоения курсов математического анализа, линейной алгебры и обыкновенных дифференциальных уравнений, в объеме, предусмотренном для соответствующей специальности.

#### 1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Программа определяет общий объем знаний, позволяющий сформировать у студента представление об основных моделях и методах математической физики, обеспечивающих широкие возможности их применения.

В процессе освоения дисциплины у студента формируются компетенции ОПК-6 – способностью определять проблемы и тенденции развития рынка программного обеспечения; ПК-1 – готовностью к использованию метода системного моделирования при исследовании и проектировании программных систем.

Требования к уровню освоения содержания курса определяются вышесказанным.

Изучение данной учебной дисциплины направлено на овладение обучающимися профессиональными компетенциями:

Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
		знать	уметь	владеть
<b>ОПК-6</b>	способностью определять проблемы и тенденции развития рынка программного обеспечения	– основные понятия и современные модели математической физики	– перевести задачу на язык дифференциальных уравнений с частными производными. – выбирать методы решения поставленной задачи и средства программного обеспечения (в том числе специализированного) для их реализации	– навыками построения простейших математических моделей физических процессов; – методами исследования моделей физических процессов, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
<b>ПК-1</b>	готовностью к использованию метода системного моделирования при исследовании и проектировании программных систем	– специфику задач решаемых с помощью уравнений в частных производных	– формулировать и содержательно интерпретировать результаты решения задач; – использовать электронные тематические ресурсы для углубления знаний по изучаемой дисциплине	– навыками использования пакетов прикладных программ для решения задач математической физики

Процесс освоения дисциплины «Уравнения в частных производных» направлен на получения необходимого объема знаний, отвечающих требованиям ФГОС ВО и обеспечивающих успешное ведение бакалавром производственной и научно-

исследовательской деятельности, владение методикой формулирования и решения прикладных задач, а также на выработку умений применять на практике методы прикладной информатики.

## 2. Структура и содержание дисциплины

### 2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единицы, 180 академических часов. Курс «Уравнения в частных производных» состоит из лекционных и лабораторных занятий, сопровождаемых регулярной индивидуальной работой преподавателя со студентами в процессе самостоятельной работы. В конце 5 семестра проводятся зачет и экзамен. Программой дисциплины предусмотрены 36 часов лекционных, 36 часов лабораторных занятий

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр (часы)	
		5	
<b>Контактная работа (всего)</b>	<b>76,5</b>	<b>76,5</b>	
В том числе:			
Занятия лекционного типа	34	34	
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)	–	–	
Лабораторные занятия	34	34	
<b>Иная контактная работа:</b>			
Контроль самостоятельной работы (КСР)	8	8	
Промежуточная аттестация (ИКР)	0,5	0,5	
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>	<b>31,8</b>	<b>31,8</b>	
В том числе:			
Курсовая работа	–	–	
Проработка учебного (теоретического) материала	15	15	
Подготовка к текущему контролю	16,8	16,8	
<b>Контроль: зачет, экзамен</b>			
Подготовка к экзамену	35,7	35,7	
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>час.</b>	<b>144</b>	<b>144</b>
	<b>в том числе контактная работа</b>	<b>76,5</b>	<b>76,5</b>
	<b>зач. ед</b>	<b>5</b>	<b>5</b>

### 2.2 Структура дисциплины:

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины. Разделы дисциплины, изучаемые в 5 семестре

№	Наименование разделов	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа		Внеаудиторная работа	
			Л	ЛР	контроль	СРС
1	Вывод основных уравнений математической физики. Постановка и классификация задач	11	4	2	4	1

№	Наименование разделов	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа		Внеаудиторная работа	
			Л	ЛР	контроль	СРС
2	Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка	18	4	6	4	4
3	Уравнения гиперболического типа. Задача Коши	18	4	6	4	4
4	Начально-граничные задачи для уравнений гиперболического и параболического типа	20	6	6	4	4
5	Задача Коши для уравнения теплопроводности	16	4	4	4	4
6	Гармонические функции. Краевые задачи для уравнений эллиптического типа.	18	6	4	4	4
7	Теория потенциала	14	4	2	4	4
8	Вариационные методы в математической физике	12	2	2	4	4
9	Обзор пройденного материала и проведение зачета	8,5	–	2	3,7	2,8
Контроль самостоятельной работы (КСР)		8	–	–	–	–
Промежуточная аттестация (ИКР)		0,5	–	–	–	–
<b>Итого</b>		<b>180</b>	<b>34</b>	<b>34</b>	<b>35,7</b>	<b>31,8</b>

Примечание: Л – лекции, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента.

### 2.3 Содержание разделов дисциплины:

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1.	Вывод основных уравнений математической физики. Постановка и классификация задач	Основные уравнения математической физики. Вывод уравнений и постановка краевых задач: задачи о малых колебаниях струны, упругого стержня. Вывод уравнений распространения тепла, диффузии. Начальные и граничные условия. Корректность постановки задач математической физики. Пример Адамара. Принцип суперпозиции для линейных задач математической физики	Проверка домашних и самостоятельных заданий
2.	Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка	Классификация линейных дифференциальных уравнения в частных производных второго порядка. Уравнения характеристик для дифференциальных уравнения в частных производных второго порядка, линейных относительно старших производных. Приведение дифференциального уравнения в частных производных второго порядка линейного относительно старших производных, к каноническому виду. Лемма о характеристиках.	Контрольная работа
3.	Уравнения гиперболического типа. Задача Коши	Решение задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа. Формула Даламбера. Обобщенное решение. Решение задачи Коши для волнового уравнения на плоскости и в пространстве..	Контрольная работа
4.	Начально-граничные задачи для уравнений гиперболического и параболического	Основные понятия Задачи Штурма–Лиувилля. Нахождение собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля. Определение функции Грина для оператора Штурма–Лиувилля. Решение начально-краевых задач для	КР, Защита индивидуального задания

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
	типа	дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа. Метод Фурье (метод разделения переменных). Задача о свободных колебаниях струны, закрепленной на концах. Решение начально-краевых задач для уравнений параболического типа. Метод Фурье (метод разделения переменных). Принцип максимума.	
5.	Задача Коши для уравнения теплопроводности	Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности, формула Пуассона. Корректность постановки задачи Коши. Функция Грина. Задачи на полупрямой.	Проверка самост. заданий
6.	Гармонические функции. Краевые задачи для уравнений эллиптического типа.	Гармонические функции. Свойства гармонических функций. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости методом разделения переменных (в круге и кольце). Принцип максимума для гармонических функций. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом разделения переменных (внутренние задачи в шаре и сферическом слое). Сферические (шаровые) функции. Полиномы Лежандра, сферические функции Лежандра. Производящая функция для полиномов Лежандра, рекуррентные формулы, задача Штурма–Лиувилля, связанная с Полиномами Лежандра	Проверка домашних и самост. заданий
7.	Теория потенциала	Ньютонов (объемный) потенциал как решение уравнения Пуассона. Свойства объемного потенциала. Потенциалы простого и двойного слоя. Свойства поверхностных потенциалов. Сведение краевых задач для уравнения Лапласа к интегральным типа Фредгольма уравнениям II рода.	Проверка домашних и самост. заданий
8.	Вариационные методы в математической физике	Основные понятия вариационного исчисления: постановка задачи, уравнение Эйлера-Лагранжа Экстремумы функционалов. Вариация функционала. Вариационные задачи в математической физике. Вариационная задача для интеграла энергии и задача Дирихле.	Проверка домашних и самост. заданий

### 2.3.1 Занятия лекционного типа

**Раздел 1.** Основные уравнения математической физики. Вывод уравнений и постановка краевых задач: задачи о малых колебаниях струны, упругого стержня. (2 ч.). Вывод уравнений распространения тепла, диффузии. Начальные и граничные условия. Корректность постановки задач математической физики. Пример Адамара. Принцип суперпозиции для линейных задач математической физики. (2 ч.).

**Раздел 2.** Классификация линейных дифференциальных уравнения в частных производных второго порядка. Уравнения характеристик для дифференциальных уравнения в частных производных второго порядка, линейных относительно старших производных (2 ч.). Приведение дифференциального уравнения в частных производных

второго порядка линейного относительно старших производных, к каноническому виду. Лемма о характеристиках (2 ч.)

**Раздел 3.** Решение задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа, формула Даламбера. Корректность постановки задачи. Обобщенное решение (2 ч.). Решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве и на плоскости. Формулы Кирхгофа и Пуассона. (2 ч.).

**Раздел 4.** Основные понятия Задачи Штурма–Лиувилля. Нахождение собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля. (2 ч.). Решение начально-краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа. Метод Фурье (метод разделения переменных) (2 ч.). Задача о свободных колебаниях струны, закрепленной на концах. Решение начально-краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка параболического типа. Метод Фурье (метод разделения переменных). Принцип максимума. Решение неоднородных задач (2 ч.).

**Раздел 5.** Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности, формула Пуассона. Корректность постановки задачи Коши. Функция Грина. (2ч.). Задачи на полупрямой. Метод отражения. Распространение краевого режима. (2ч.).

**Раздел 6.** Гармонические функции. Свойства гармонических функций. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости методом разделения переменных (в круге и кольце) (2 ч.). Принцип максимума для гармонических функций. Следствия. (2 ч.). Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом разделения переменных (внутренние задачи в шаре и сферическом слое) Сферические (шаровые) функции. Полиномы Лежандра, сферические функции Лежандра. (2 ч.).

**Раздел 7.** Ньютонов (объемный) потенциал как решение уравнения Пуассона. (2 ч.). Свойства объемного потенциала. Потенциалы простого и двойного слоя. Свойства поверхностных потенциалов (2 ч.). Сведение краевых задач для уравнения Лапласа к интегральным типа Фредгольма уравнениям II рода (2 ч.).

**Раздел 8.** Основные понятия вариационного исчисления: постановка задачи, уравнение Эйлера–Лагранжа. Экстремумы функционалов. Вариация функционала. Вариационные задачи в математической физике. Вариационная задача для интеграла энергии и задача Дирихле. (2 ч.).

### **2.3.2 Занятия семинарского типа**

Учебный план не предусматривает занятий семинарского типа по дисциплине «Уравнения в частных производных».

### **2.3.3 Лабораторные занятия**

**Раздел 1.** Лабораторные занятия: 2 часа.

Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике

1. Уравнения в частных производных, порядок, линейность, однородность, примеры.

В аудитории: №№ 24–27 (1, глава 1),

На дом: №№ 28, 29, 2, 4,5 (1, глава 1)



## **Раздел 2. Лабораторные занятия: 6 часов.**

1) Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. 1985, 2) Евдокимов А.А., Павлова А.В., Рубцов С.Е. Уравнения математической физики. Методические указания. Краснодар: Изд-во Кубанского госуниверситета, 2002.

1) Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике, 2) Евдокимов А.А., Павлова А.В., Рубцов С.Е. Уравнения математической физики. Методические указания. Использование системы Matlab (Maple) для приведения уравнений с двумя независимыми переменными к каноническому виду

В аудитории: 1–5, 7,9, 14–18 стр. 14 (2)

На дом: №№ 6–9, 19–25 (2) (2)

2. Приведение уравнений с двумя независимыми переменными к каноническому виду (уравнения с переменными коэффициентами). Использование системы Matlab (Maple) для приведения уравнений с двумя независимыми переменными к каноническому виду

В аудитории: 6–11 (1, глава 1), 1,5,7 стр. 13 (2)

На дом: №№ 12–16 (1, глава 1)

3. Контрольная работа.

## **Раздел 3. Лабораторные занятия: 6 часов.**

1. Метод характеристик решения уравнений гиперболического типа. Решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения. Формула Даламбера. Решение типовых задач в системе Matlab (Maple).

В аудитории: №№ 61,62 (1, глава 2), 3,10 стр. 22 (2).

На дом: №№ 73, 74 (1 глава 2), 2,4,9 стр. 22 (2).

2. Метод продолжения решения задач на полупрямой для одномерного волнового уравнения. Решение типовых задач в системе Matlab (Maple).

В аудитории: №№ 3,10 стр. 22 (2), 61,62 (1, глава 2),

На дом: №№ 2,4,9 стр. 22 (2), 73, 74 (1, глава 2)

3. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона. Использование системы Matlab (Maple) для решения задач теплопереноса.

В аудитории: №№ 66,68 (1, глава 3), 1,2 стр. 24 (2)

На дом: №№ 72,73 (1, глава 3), 3 стр. 24 (2)

## **Раздел 4. Лабораторные занятия: 6 часов.**

1) Евдокимов А.А., Павлова А.В., Рубцов С.Е. Уравнения математической физики. Методические указания; 2) Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике.

1. Метод Фурье решения начально-краевых задач для уравнений гиперболического типа. Решение начально-краевых задач в системе Matlab (Maple)

В аудитории: №№ 10,12 стр. 33 (1), 104, 110 (2, глава 2),

На дом: №№ 2,13,15 стр. 33 (1), 50–52 (2, глава 6)

2. Решение начально-краевых задач для уравнений параболического типа. Метод Фурье. Решение типовых задач в системе Matlab (Maple)

В аудитории: №№ 33, 34 (1, глава 5), 1–5 стр. 33 (2)

На дом: №№ 30 (1, глава 3), 4,6,7, стр. 33 (2)

3. Решение неоднородных задач для уравнений гиперболического и параболического типа

В аудитории: №№ 111 (2, глава 2), 9 (1, глава 5)

На дом: №№ 18 стр. 33 (1), 35 (1, глава 3), 11 стр. 33 (2)

4. Контрольная работа

**Раздел 5** Лабораторные занятия: 4 часа.

1. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона

В аудитории: №№ 66,68 (1, глава 3), 1,2 стр. 24 (2)

На дом: №№ 72,73 (1, глава 3), 3 стр. 24 (2)

2. Метод продолжений решения задач на полупрямой

В аудитории: №№ 79,80,86 (1, глава 3), 4 стр. 24 (2)

На дом: №№ 84,89 (1, глава 3), 5 стр. 24 (2)

**Раздел 6.** Лабораторные занятия: 6 часов.

1) Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике; 2) Евдокимов А.А., Павлова А.В., Рубцов С.Е. Уравнения математической физики. Методические указания.

1. Решение краевых задач для уравнения Лапласа на плоскости в простейших областях (круг, кольцо).

В аудитории: №№ 14 (а,в,д), 70 (1 глава 4), 30 стр. 34 (2)

На дом: №№ 13 (б–е), 17 (1 глава 4), 29 стр. 34 (2)

2. Решение краевых задач для уравнения Лапласа в пространстве в простейших областях.

В аудитории: №№ 20,33,103 (1 глава 4)

На дом: №№ 34,104 (1 глава 4)

3. Метод Фурье решения краевых задач для уравнения Пуассона в круге и кольце.

В аудитории: №№ 30, 31, 34 (1 глава 4)

На дом: №№ 32 (1 глава 4), 31 стр. 34 (2)

4. Контрольная работа

## **Раздел 7. Лабораторные занятия: 2 часа.**

Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике.

1. Метод потенциалов.

В аудитории: №№ 149 (а,б), 150, 151 (глава 4)

На дом: №№ 147, 149 (в) (глава 4)

## **Раздел 8. Лабораторные занятия: 2 часа.**

Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики.

1. Вариационные задачи.

В аудитории: №№ 848,850,853

На дом: №№ 851,854,855

### **2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)**

Учебный план не предусматривает курсовых работ по дисциплине «Уравнения в частных производных».

### **2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплин**

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	Подготовка к текущему контролю	Уравнения математической физики (электронный ресурс, среда модульного обучения <a href="http://moodle.kubsu.ru">http://moodle.kubsu.ru</a> )

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

### **2.5 Самостоятельное изучение разделов дисциплины**

Целью самостоятельной работы является углубление знаний, полученных в результате аудиторных занятий, выработка навыков индивидуальной работы, закрепление навыков, сформированных во время лабораторных занятий.

Содержание приведенной основной (о) и дополнительной (д) литературы позволяет охватить широкий круг задач и методов математической физики.

**Раздел 1.** Постановка задач математической физики. Некорректные задачи. [2о, 3д, 8д]

**Раздел 2.** Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Канонические формы. Сопряженные операторы. [1о, 2о, 8д]

**Раздел 3.** Задача с данными на характеристиках (задача Гурса). Существование и единственность решения задачи с данными на характеристиках; Метод Римана; Специальные функции математической физики. [1о, 2о, 1д, 3д, 8д]

**Раздел 4.** Задача о свободных колебаниях круглой мембраны. Цилиндрические функции в математической физике. [2о, 3д, 8д]

**Раздел 5.** Задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Предельные случаи; Функция источника для уравнения параболического типа. [1о, 2о, 1д, 3д, 8д]

**Раздел 6.** Формулы Грина для гармонических функций. Свойства последовательностей гармонических функций. Ортогональные многочлены, многочлены Лежандра [2о, 8д]

**Раздел 7** Уравнение Гельмгольца в неограниченной области. Условия излучения. [8д]

**Раздел 8** Основные понятия вариационного исчисления (функционал, линейные и квадратичные функционалы, экстремумы функционала); Простейшие задачи вариационного исчисления (задача о брахистохроне, изопериметрическая задача). [3д, 7д, 8д]

### 3. Образовательные технологии

В соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки бакалавров программа по дисциплине «Уравнения в частных производных» предусматривает использование в учебном процессе следующих образовательные технологии: чтение лекций с использованием мультимедийных технологий; работа над индивидуальными заданиями с использованием пакетов прикладных программ, разбор конкретных ситуаций на практических занятиях.

Компьютерные технологии предоставляют средства разнопланового отображения алгоритмов и демонстрационного материала.

Подход разбора конкретных ситуаций широко используется как преподавателем, так и бакалаврами во время лекций и анализа результатов самостоятельной работы. Это обусловлено тем, что в процессе моделирования часто встречаются задачи, для которых единых подходов не существует. При исследовании и решении каждой конкретной задачи имеется, как правило, несколько методов, а это требует разбора и оценки целой совокупности конкретных ситуаций.

Семестр	Вид занятия	Используемые интерактивные образовательные технологии	Общее количество часов
5	Л	Слайд-лекции. Обсуждение сложных вопросов.	4
		№	Тема

Семестр	Вид занятия	Используемые интерактивные образовательные технологии	Общее количество часов
		1 Основные уравнения математической физики. Вывод уравнений и постановка краевых задач: задачи о малых колебаниях струны, упругого стержня	2
		2 Вывод уравнений распространения тепла, диффузии. Начальные и граничные условия. Корректность постановки задач математической физики. Пример Адамара. Принцип суперпозиции для линейных задач математической физики	2
		3 Приведение дифференциального уравнения в частных производных второго порядка линейного относительно старших производных, к каноническому виду. Лемма о характеристиках	2
		4 Решение задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа, формула Даламбера Корректность постановки задачи. Обобщенное решение	2
		5 Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности, формула Пуассона Корректность постановки задачи Коши. Функция Грина.	2
		6 Гармонические функции. Свойства гармонических функций. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости методом разделения переменных (в круге и кольце)	2
		7 Принцип максимума для гармонических функций. Следствия	2
		8 Свойства объемного потенциала. Потенциалы простого и двойного слоя. Свойства поверхностных потенциалов	2
<b>Итого:</b>			16

Цель *лекции* – обзор методов построения математических моделей на основе уравнений в частных производных, знакомство с проблемами и аппаратом математической физики. На лекциях студенты получают общее представление о подходах и методах исследования и решения задач математической физики.

Цель *лабораторного занятия* – научить применять теоретические знания при решении и исследовании конкретных задач.

Темы, задания и вопросы для самостоятельной работы призваны сформировать навыки поиска информации, умения самостоятельно расширять и углублять знания, полученные в ходе лекционных и лабораторных занятий.

Подход разбора конкретных ситуаций широко используется как преподавателем, так и студентами при проведении анализа результатов самостоятельной работы.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

#### 4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Учебная деятельность проходит в соответствии с графиком учебного процесса. Процесс самостоятельной работы контролируется во время аудиторных занятий и индивидуальных консультаций. Самостоятельная работа студентов проводится в форме изучения отдельных теоретических вопросов по предлагаемой литературе, решения задач и подготовки индивидуального задания.

Фонд оценочных средств дисциплины состоит из средств текущего контроля (см. примерные варианты самостоятельных заданий, задач и вопросов) и промежуточной аттестации (зачета и экзамена).

В качестве оценочных средств, используемых для текущего контроля успеваемости, предлагается перечень вопросов по разделам, которые прорабатываются в процессе освоения курса, а также варианты контрольных работ. Данный перечень охватывает все основные разделы курса, включая знания, получаемые во время самостоятельной работы.

Оценка успеваемости осуществляется по результатам: контрольных работ, устного опроса при сдаче выполненных самостоятельных заданий.

Аттестация по учебной дисциплине проводится в виде экзамена. Экзаменационный билет содержит два теоретических вопроса и задачу. Студент готовит ответы на билет в письменной форме в течение установленного времени. Далее экзамен протекает в форме собеседования.

### **Соответствие компетенций, формируемых при изучении дисциплины, и видов занятий**

Перечень компетенций	Виды занятий				Формы контроля
	Л.	Лаб.	КСР	СРС	
<b>ОПК-6</b>	+	+	+	+	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Опрос по результатам самостоятельной работы;</li> <li>– Контрольные работы;</li> <li>– Защита индивидуального задания;</li> <li>– Зачет;</li> <li>– Экзамен</li> </ul>
<b>ПК-1</b>		+		+	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Контрольные работы;</li> <li>– Защита индивидуального задания;</li> <li>– Зачет;</li> <li>– Экзамен</li> </ul>

#### **4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля**

**Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы**

#### **Примерное содержание контрольных работ**

1. Контрольная №1 (Приведение к каноническому и простейшему виду уравнений с двумя независимыми переменными).

Евдокимов А.А., Павлова А.В., Рубцов С.Е. Уравнения математической физики. Методические указания.

№№ 9–25 стр. 14, 16–25 стр.15.

2. Контрольная №2 (Метод Фурье решения смешанных и краевых задач).

Евдокимов А.А., Павлова А.В., Рубцов С.Е. Уравнения математической физики. Методические указания.

№№ 14,16 стр. 33, 19,21–23,26–29 стр.34.

Примерные задачи контрольной работы №1

**Вариант 1**

1. Привести к каноническому виду уравнения:

а)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, x < 0$       б)  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 7y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

2. Привести к простейшему виду уравнение:

$u''_{xx} + 4u''_{xy} + 4u''_{yy} + 3u'_x + 6u'_y = 0.$

---

**Вариант 2**

1. Привести к каноническому виду уравнения:

а)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, x > 0$       б)  $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sqrt{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

2. Привести к простейшему виду уравнение:

$u''_{xx} + 2u''_{xy} + 5u''_{yy} + \frac{1}{2}u'_x + 2u'_y = 0.$

---

**Вариант 3**

1. Привести к каноническому виду уравнения:

а)  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$       б)  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0, y < 0$

2. Привести к простейшему виду уравнение:

$3u''_{xx} - 5u''_{xy} - 2u''_{yy} + 3u'_x + u'_y = 0.$

---

Примерные задачи контрольной работы №2

**Вариант 1**

Решить смешанные задачи:

а)  $u_{tt} = 36u_{xx}, t > 0, 0 < x < 1, u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, u(x, 0) = 5 \sin \pi x, u_t(x, 0) = 0.$

б)  $u_t = u_{xx} + u + xt(2-t), t > 0, 0 < x < \pi, u_x(0, t) = t^2, u_x(\pi, t) = t^2, u(x, 0) = \cos 2x.$

---

## Вариант 2

Решить смешанные задачи:

а)  $u_{tt} = 16u_{xx}, t > 0, 0 < x < 1, u_x(0,t) = 0, u(1,t) = 0, u(x,0) = \cos \frac{3\pi}{2}x, u_t(x,0) = \cos \frac{\pi}{2}x.$

б)  $u_t = u_{xx} + u, t > 0, 0 < x < l, u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, u(x,0) = 1.$

---

## Вариант 3

Решить смешанные задачи:

а)  $u_{tt} = 4u_{xx} + t, t > 0, 0 < x < l, u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = t, u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0.$

б)  $u_t = 9u_{xx} + 2u, t > 0, 0 < x < l, u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, u(x,0) = 1.$

---

### Примерные формулировки индивидуальных заданий

1. Воспользоваться средствами математических пакетов для решения задачи и визуализации результатов.

На круглую мембрану, закрепленную по краю, действует внешняя гармоническая сила  $q(x,t) = \rho \sin \omega t$ , непрерывно распределенная по всей площади мембраны. Проверить, что вынужденные колебания мембраны выражаются равенством ( $R$  – радиус мембраны)

$$u = \frac{1}{\omega^2} \left[ \frac{J_0\left(\frac{\omega}{v}r\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{v}R\right)} - 1 \right] \sin \omega t.$$

2. Воспользоваться средствами математических пакетов для решения задачи и визуализации результатов

Найти температуру круглого бесконечного цилиндра радиуса  $a$  при условии, что на его поверхности поддерживается температура, равная нулю, а начальная температура равна  $u|_{t=0} = U_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right).$

### 4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Основные требования к результатам освоения дисциплины представлены в таблице в виде признаков сформированности компетенций. Требования формулируются по двум уровням: пороговый и повышенный и в соответствии со структурой, принятой в ФГОС ВО: знать, уметь, владеть.



Название компетенции (или ее части)	Структура компетенции	Основные признаки сформированности компетенции
<b>ОПК-6</b> способностью определять проблемы и тенденции развития рынка программного обеспечения	Знать : основные понятия и современные модели математической физики; методы решения линейных уравнений в частных производных	Знает основные понятия и современные модели математической физики
	Уметь: поставить задачу для дифференциального уравнения с частными производными; выбирать методы решения поставленной задачи и средства программного обеспечения (в том числе специализированного) для их реализации	Знает методы решения линейных уравнений в частных производных
	Владеть: навыками построения простейших математических моделей физических процессов	Умеет поставить задачу для дифференциального уравнения с частными производными
		Умеет выбрать метод решения задачи и обосновать его.
		Владеет навыками построения простейших математических моделей физических процессов
		Владеет методами верификации моделей физических процессов.
<b>ПК-1</b> готовностью к использованию метода системного моделирования при исследовании и проектировании программных систем	Знать: специфику задач, решаемых с помощью уравнений в частных производных	Знает методы исследования корректности постановки задач и основные подходы к решению линейных задач.
	Уметь: формулировать и содержательно интерпретировать результаты решения задач; использовать электронные тематические ресурсы для углубления знаний по изучаемой дисциплине	Умеет формулировать и интерпретировать результаты решения задач
	Владеть: навыками использования пакетов прикладных программ для решения задач математической физики	Умеет использовать электронные тематические ресурсы для углубления знаний по теории и методам уравнений в частных производных
Владеет навыками использования пакетов прикладных программ для решения задач математической физики		

### Примерный перечень вопросов, выносимых на экзамен

1. Понятие дифференциального уравнения с частными производными. Постановка задач математической физики. Типы краевых условий.
2. Корректность постановки задач математической физики. Пример Адамара.
3. Вывод уравнения колебания струны. Примеры других уравнений математической физики.
4. Вывод уравнения теплопроводности.
5. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных (общий случай).
6. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Характеристическая поверхность. Примеры характеристик.
7. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными (гиперболического типа, параболического типа, эллиптического типа).
8. Решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения. Формула Д'Аламбера. Физическая интерпретация.
9. Корректность постановки задачи Коши для одномерного волнового уравнения.
10. Решение задачи Коши на плоскости и в пространстве. Формулы Пуассона и Кирхгофа. Физическая интерпретация.
11. Задача Штурма–Лиувилля. Нахождение собственных значений и собственных функций. Определение функции Грина для оператора Штурма–Лиувилля
12. Метод Фурье решения смешанных задач для волнового уравнения (для однородных и неоднородных уравнений и граничных условий).
13. Примеры решения смешанных задач. Задача о свободных колебаниях струны с закрепленными концами. Физическая интерпретация.
14. Принцип максимума для уравнения теплопроводности.
15. Решение начально-краевых задач для дифференциального уравнения уравнения теплопроводности (однородного и неоднородного).
16. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности.
17. Задачи на полупрямой для уравнения теплопроводности. Метод функций Грина.
18. Гармонические функции. Свойства гармонических функций. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона.
19. Принцип максимума для гармонических функций.
20. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости методом разделения переменных в круге.
21. Метод функций Грина решения краевых задач для уравнения Лапласа.
22. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом разделения переменных (внутренняя задача в шаре).
23. Сферические (шаровые) функции. Полиномы Лежандра, сферические функции Лежандра.
24. Производящая функция для полиномов Лежандра, рекуррентные формулы, задача Штурма–Лиувилля, связанная с полиномами Лежандра.
25. Ньютонов (объемный) потенциал как решение уравнения Пуассона. Свойства объемного потенциала.
26. Потенциалы простого и двойного слоя. Свойства поверхностных потенциалов.
27. Интегральные уравнения: классификация, ядро интегрального оператора, характеристические числа и собственные функции, сопряженные уравнения.
28. Уравнения Фредгольма I и II рода. Теоремы Фредгольма.
29. Сведение краевых задач для уравнения Лапласа и интегральным уравнениям.
30. Вариационные методы в математической физике. Основные понятия вариационного исчисления: постановка задачи, уравнение Эйлера–Лагранжа.

## Примеры экзаменационных задач

1. Найти функцию  $u(x,t)$ , описывающую процесс малых поперечных колебаний однородной струны  $(0,l)$ , закрепленной на концах. Начальные смещения описываются функцией  $3\sin\frac{2\pi x}{l} + 5\sin\frac{7\pi x}{l}$ . Начальная скорость равна нулю. (Силу натяжения и плотность струны считать равными единице)

2. Струна с закрепленными концами  $(0,\pi)$  колеблется под действием силы, распределенной с плотностью  $f(x,t)=\sin t$ . Найти отклонения  $u(x,t)$  струны, если в начальный момент отклонения точек струны равны нулю, а начальные скорости описываются функцией  $\psi(x)=x$ . (Силу натяжения и плотность струны считать равными единице).

3. К однородному стержню ( $k=9$ ,  $\rho=1$ ) единичной длины приложена сила, распределенная с плотностью  $f(x,t)=xe^{-t}$ , действующая с момента  $t=0$ . Найти отклонения стержня  $u(x,t)$ , предполагая, что начальные скорости точек стержня равны нулю, а начальные отклонения описываются функцией  $\psi(x)=x$ . Левый конец стержня жестко закреплен, правый – свободен. Площадь поперечного сечения считать равной 1.

4. Стержень  $(0,l)$  совершает малые продольные колебания под действием гармонической силы, распределенной с плотностью  $f(x,t)=\sin t$ . Найти отклонения стержня ( $k=4$ ,  $\rho=1$ )  $u(x,t)$ , предполагая начальные условия нулевыми. Отклонения левого конца стержня описываются функцией  $f(x,t)=t$ , правый конец стержня свободен. Площадь поперечного сечения считать равной 1.

5. Найти функцию, гармоническую в круге, радиуса 4, принимающую на его границе значения  $u(x,y)=x^2$ .

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

## Методические рекомендации к сдаче экзамена

Экзамен является заключительным этапом процесса формирования компетенции студента при изучении дисциплины или ее части и имеет целью проверку и оценку знаний студентов по теории и применению полученных знаний, умений и навыков при решении практических задач. Экзамены проводятся по расписанию, в сроки, предусмотренные календарным графиком учебного процесса. Расписание экзаменов доводится до сведения студентов не менее чем за две недели до начала экзаменационной сессии. Экзамены принимаются преподавателями, ведущими лекционные занятия. В отдельных случаях при большом количестве групп у одного лектора или при большой численности группы с разрешения заведующего кафедрой допускается привлечение в помощь основному лектору преподавателя, проводившего практические занятия в группах.

Экзамены проводятся в устной форме. Экзамен проводится только при предъявлении студентом зачетной книжки и при условии выполнения всех контрольных мероприятий, предусмотренных учебным планом и рабочей программой по изучаемой дисциплине. Студентам на экзамене предоставляется право выбрать один из билетов. Время подготовки к ответу составляет 60 минут. По истечении установленного времени студент должен ответить на вопросы экзаменационного билета и предоставить решение задач. Результаты экзамена оцениваются по четырехбалльной системе («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно») и заносятся в экзаменационную ведомость и зачетную книжку. В зачетную книжку заносятся только положительные оценки.

### Критерии выставления оценок

Оценка *«отлично»*:

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины, а также по основным вопросам, выходящим за пределы учебной программы;
- точное использование научной терминологии систематически грамотное и логически правильное изложение ответа на вопросы;
- безупречное владение инструментарием учебной дисциплины, умение его эффективно использовать в постановке и решении задач;
- умение ориентироваться в теориях, концепциях и направлениях дисциплины;
- творческая самостоятельная работа на лабораторных занятиях, активное участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий;
- высокий уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.

Оценка *«хорошо»*:

- достаточно полные и систематизированные знания по дисциплине;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях дисциплины и давать им оценку;
- использование научной терминологии, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- владение инструментарием по дисциплине;
- самостоятельная работа на лабораторных занятиях, , средний уровень культуры исполнения заданий;
- средний уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.

Оценка *«удовлетворительно»*:

- достаточный минимальный объем знаний по дисциплине;
- усвоение основной литературы, рекомендованной учебной программой;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по дисциплине и давать им оценку;
- использование научной терминологии, стилистическое и логическое изложение ответа на вопросы, умение делать выводы без существенных ошибок;
- владение инструментарием учебной дисциплины, умение его использовать в решении типовых задач;
- умение под руководством преподавателя решать стандартные задачи;
- работа под руководством преподавателя на лабораторных занятиях, допустимый уровень культуры исполнения заданий;
- достаточный минимальный уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.

Оценка *«неудовлетворительно»*:

- фрагментарные знания по дисциплине;
- отказ от ответа;
- знание отдельных источников, рекомендованных учебной программой по дисциплине;
- неумение использовать научную терминологию;
- наличие грубых ошибок;
- низкий уровень культуры исполнения заданий;
- низкий уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.

## **5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

### **5.1 Основная литература:**

1. Кудряшов, С.Н. Основные методы решения практических задач в курсе «Уравнения математической физики» / С.Н. Кудряшов, Т.Н. Радченко. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2011. 308 с.; [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=241103>.
2. Лесин В.В. Уравнения математической физики. М.: КУРС: ИНФРА-М, 2017. 240 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=520539>
3. Олейник, О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Лаборатория знаний, 2015. 263 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/70703>.

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах.

### **5.2 Дополнительная литература:**

1. Алтунин К.К. Методы математической физики. М.: Директ-Медиа, 2014. 123 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=240552>.
4. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 688 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/63669>.

2. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 399 с.
3. Голоскоков, Д.П. Курс математической физики с использованием пакета MAPLE. СПб.: Лань, 2015. 575 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/67461>.
4. Деревич И.В. Практикум по уравнениям математической физики. СПб.: Лань, 2017. 428 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/95131>
5. Евдокимов А.А., Павлова А.В., Рубцов С.Е. Уравнения математической физики. Методические указания. Краснодар: Изд-во Кубанского государственного университета, 2002.
5. Ильин А.М. Уравнения математической физики М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 192 с. + [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://e.lanbook.com/book/2181#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/2181#book_name).
6. Тихонов А.Н., А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004. 798 с.

### 5.3. Периодические издания:

Не используются

### 6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Мир математических уравнений EqWorld. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm>
2. Физика, химия, математика. <http://www.ph4s.ru/index.html>
3. Journal of Mathematical Physics. Online ISSN 1089-7658. <http://jmp.aip.org>
4. Russian Journal of Mathematical Physics. Online ISSN 1555-6638. <http://www.maik.ru/cgi-perl/journal.pl?lang=rus&name=mathphys>.

### 7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

При изучении курса «Уравнения в частных производных» необходимо активизировать остаточные знания студентов по таким математическим дисциплинам, как математический анализ и дифференциальные уравнения.

Чтобы изложение было понятным, следует акцентировать внимание не столько на формальных моментах доказательств, сколько на движущих ими идеях.

Необходимо отметить практическую значимость соответствующих проблем, обратить внимание на требования, предъявляемые к современному специалисту. В изучении курса следует акцентировать внимание на двух моментах: на изучении постановки граничных задач и на изучении основных аналитических методов их решения.

В связи с тем, что программа курса предусматривает большое количество часов, выделенных на самостоятельную работу, целесообразно ознакомить студентов с литературными и электронными источниками по разбираемым темам, а также материалами, в которых разобрано решение большого количества конкретных задач или приведена методика их решения, а также описаны возможности применения инструментария среды.

Важнейшим этапом курса является самостоятельная работа по дисциплине. Перечень разделов для самостоятельного изучения приведен в разделе 2.5.

### Вопросы для самоконтроля по разделам

#### Раздел 1.

1. Напишите общий вид линейного дифференциального уравнения второго порядка.
2. Выведите уравнение поперечных колебаний струны (продольных колебаний стержня).

3. Какое уравнение называется квазилинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка?
4. Приведите примеры граничных условий для уравнения продольных колебаний стержня.
5. Выведите уравнение теплопроводности.
6. Приведите примеры граничных условий для уравнения теплопроводности.
7. Напишите общий вид стационарного уравнения.
8. Что понимается под корректностью постановки задачи математической физики?
9. Приведите пример некорректно поставленной задачи.
10. В чем заключается принцип суперпозиции линейных задач математической физики?

## **Раздел 2.**

1. Какое уравнение называется уравнением гиперболического (параболического, эллиптического) типа?
2. Запишите канонический вид уравнения гиперболического (параболического, эллиптического) типа?
3. Какие физические процессы описывает уравнение гиперболического (параболического, эллиптического) типа?
4. К какому типу уравнений относится уравнение Лапласа (Пуассона)?
5. К какому типу относится уравнение теплопроводности?
6. К какому типу относится волновое уравнение?
7. Запишите общий вид характеристического уравнения для линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными.
8. Какие характеристики имеет одномерное волновое уравнение?
9. Какие характеристики имеет двумерное уравнение Лапласа?
10. Какие характеристики имеет одномерное уравнение теплопроводности?

## **Раздел 3.**

1. Что называется задачей Коши? Для какого типа уравнений ставится задача Коши? Приведите примеры.
2. Выведите формулу Д'Аламбера решения задачи Коши для волнового уравнения.
3. Докажите, что формула Д'Аламбера дает обобщенное решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения
4. Докажите единственность решения задачи Коши для волнового уравнения.
5. Дайте физическую интерпретацию общего решения волнового уравнения.
6. Сформулируйте смешанные задачи для одномерного волнового уравнения на примерах поперечных колебаний струны и продольных колебаний стержня.
7. В чем состоит идея метода продолжения решения задач для волнового уравнения на полупрямой?
8. Сформулируйте задачу о распространении краевого режима, для случая, когда задан режим колебаний конца полуограниченного стержня.
9. Используя формулу Пуассона решения задачи Коши для волнового уравнения в пространстве, получите решение соответствующей задачи на плоскости методом покоординатного спуска.
10. Дайте физическую интерпретацию решения задачи о малых поперечных колебаниях струны с закрепленными концами.

## **Раздел 4.**

1. Сформулируйте задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности.

2. Приведите примеры условий на бесконечности для задач в неограниченных областях для уравнения теплопроводности.
3. Приведите формулу Пуассона решения задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности.
4. Дайте физическую интерпретацию функции Грина задачи Коши для уравнения теплопроводности.
5. Запишите фундаментальное решение одномерного уравнения теплопроводности.
6. Пользуясь методом отражения, постройте функцию влияния мгновенного точечного источника для полугограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью при граничных условиях I и II рода.
7. Приведите основные свойства  $\delta$ -функции Дирака.
8. Запишите фундаментальное решение одномерного уравнения теплопроводности.
9. Постройте функцию Грина уравнения теплопроводности в пространстве.
10. Докажите единственность решения начально-краевых задач для трехмерного уравнения теплопроводности с помощью формулы Грина.

### Раздел 5.

1. Сформулируйте задачу Штурма–Лиувилля.
2. Что называется собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля?
3. Что такое собственное значение задачи Штурма–Лиувилля?
4. Что называется спектром задачи Штурма–Лиувилля? Какие спектры возможны?
5. Сколько собственных функций могут соответствовать данному собственному значению?
6. Что называется смешанной (начально-краевой) задачей? Приведите примеры.
7. Какие условия называют граничными условиями I (II, III) рода?
8. Сформулируйте смешанные задачи для одномерного волнового уравнения на примерах поперечных колебаний струны и продольных колебаний стержня.
9. Приведите схему применения метода Фурье для волнового уравнения в случае неоднородных граничных условий.
10. Дайте физическую интерпретацию решения задачи о малых поперечных колебаниях струны с закрепленными концами.

### Раздел 6.

1. Дайте определение гармонической функции в конечной и бесконечной областях.
2. Приведите примеры функций, гармонических в конечной и бесконечной областях.
3. Перечислите свойства гармонических функций.
4. К какому типу относится уравнение Лапласа (Пуассона)?
5. Сформулируйте принцип максимума для гармонических функций.
6. Сформулируйте внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Пуассона в произвольной трехмерной области.
7. Приведите вид уравнения Лапласа в сферических и цилиндрических координатах.
8. Сформулируйте внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа в произвольной трехмерной области.
9. Приведите схему применения метода Фурье решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.
10. Сформулируйте внешнюю задачу III рода для уравнения Лапласа.

### Раздел 7.



1. Дайте определение объемного потенциала.
2. Дайте определение потенциалов простого и двойного слоя.
3. Перечислите свойства объемного потенциала.
4. Какими свойствами обладает потенциал простого слоя?
5. Какими свойствами обладает потенциал двойного слоя?
6. Сформулируйте теорему о разрывности потенциала двойного слоя.
7. Является ли нормальная производная потенциала простого слоя непрерывной функцией?
8. Приведите схему сведения внутренних задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям.
9. Приведите схему сведения внешних задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям.
10. Сформулируйте условие разрешимости внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа.

### Раздел 8.

1. Какие задачи решает вариационное исчисление? Приведите примеры вариационных задач.
2. Что называется функционалом? Приведите примеры функционалов.
3. Что называется вариацией аргумента функционала? Что называется вариацией функционала?
4. Сформулируйте простейшую вариационную задачу.
5. Дайте определение экстремума функционала.
6. Что такое сильный (слабый) экстремум?
7. Какие функции называют линейно независимыми?
8. Дайте определение полноты системы функций.
9. Какое условие называют условием стационарности функционала?
10. Приведите формулу для вариации функционала в случае простейшей вариационной задачи.

### Примеры задач для самостоятельного решения

1. Решить задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 16 t^2, t > 0, x > 0,$$

$$u|_{t=0} = \frac{1}{6} x^4, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 2 \sin x, u|_{x=0} = 4 t^2.$$

2. Решить задачу:

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, y > 0,$$

$$u|_{y=1} = 1 - x, \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = 3.$$

3. Решить задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t + e^t, -\infty < x < \infty, t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 2.$$

4. Найти функцию гармоническую внутри круга с центром в начале координат радиуса  $r=2$  такую, что  $u|_{r=2} = \sin 4\varphi \cos 8\varphi$ .

5. Пользуясь интегральными преобразованиями Фурье с конечными пределами решить задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin t, 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$u(0, t) = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0.$$

Поиск информации для ответов на вопросы для самостоятельной работы и выполнения заданий в некоторых случаях предполагает не только изучение основной учебной литературы, но и привлечение дополнительной литературы, а также использование ресурсов сети Интернет.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

### **8.1 Перечень информационных технологий**

- Проверка индивидуальных заданий и консультирование посредством электронной почты.
- Использование электронных презентаций при проведении лекционных и лабораторных занятий.
- Использование математических пакетов при проведении лабораторных занятий.

### **8.2 Перечень необходимого программного обеспечения**

1. Операционная система MS Windows.
2. Интегрированное офисное приложение MS Office.
3. Программное обеспечение для организации управляемого коллективного и безопасного доступа в Интернет.
4. Математические пакеты Maple, Matlab

### **8.3 Перечень информационных справочных систем:**

1. Электронная библиотечная система "Юрайт" (<http://www.biblio-online.ru>).
2. Электронная библиотечная система "Университетская библиотека ONLINE" (<http://www.biblioclub.ru>).
3. Электронная библиотечная система издательства "Лань" (<http://e.lanbook.com>).

4. Электронная библиотечная система eLIBRARY.RU (<http://www.elibrary.ru>).

### 9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины и оснащенность
1.	Лекционные занятия	Лекционная аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук), соответствующим программным обеспечением, а также необходимой мебелью (доска, столы, стулья). (аудитории: 129, 131, 133, А305, А307).
2.	Лабораторные занятия	Компьютерный класс, укомплектованный компьютерами с лицензионным программным обеспечением, необходимой мебелью (доска, столы, стулья). (аудитории: 101, 102, 106, 106а, 105/1, 107(2), 107(3), 107(5), А301).
3.	Групповые (индивидуальные) консультации	Аудитория для семинарских занятий, групповых и индивидуальных консультаций, укомплектованные необходимой мебелью (доска, столы, стулья). (аудитории: 129, 131).
4.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Аудитория для семинарских занятий, текущего контроля и промежуточной аттестации, укомплектованная необходимой мебелью (доска, столы, стулья) (аудитории: 129, 131, 133, А305, А307, 147, 148, 149, 150, 100С, А3016, А512), компьютерами с лицензионным программным обеспечением и выходом в интернет (106, 106а, А301)
5.	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения, обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета, необходимой мебелью (столы, стулья). (Аудитория 102а, читальный зал).

Компьютерная поддержка учебного процесса по направлению 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем обеспечивается по всем дисциплинам. Факультет компьютерных технологий и прикладной математики, оснащен компьютерными классами, установлена локальная сеть, все компьютеры факультета подключены к сети Интернет. Студентам доступны современные ПЭВМ, современное лицензионное программное обеспечение.

Студенты и преподаватели вуза имеют постоянный доступ к электронному каталогу учебной и методической литературе.