

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Кубанский государственный университет»  
факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖАЮ  
Проректор по учебной работе  
и инновациям  
  
\_\_\_\_\_  
Л.С. Проганова  
«29» мая 2020 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### Б1.В.ДВ.2.2 Квазиконформные отображения. Современное состояние теории

Направление подготовки: 01.06.01 Математика и механика

Профиль: 01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Форма обучения: очная

Квалификация: Исследователь. Преподаватель - исследователь

Краснодар 2020

## 1 Цели и задачи изучения дисциплины.

### 1.1 Цель освоения дисциплины.

Цель лекционного курса - освоение геометрических и аналитических методов исследования плоских квазиконформных отображений по специальности 01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

### 1.2 Задачи дисциплины.

- формирование знания о характеристиках геометрической природы  $S^1$  - квазиконформных отображений, как естественного обобщения квазиконформных отображений; понимания природы 1-квазиконформных отображений;
- сформировать знания о пространстве функций с обобщенными производными, соболевских пространствах и теоремах вложения для них;
- сформировать знания о квазиконформных отображениях римановых поверхностей,
- сформировать знания о неоднолистных отображениях, осуществляемых решениями нелинейных систем.

### 1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы.

Дисциплина «Квазиконформные отображения. Современное состояние теории» относится к вариативной части Блока 1 "Дисциплины (модули)" учебного плана.

Программа рассчитана на аспирантов, прослушавших курс «приложения теории римановых поверхностей и нелинейных уравнений математической физики», а также математического анализа, включающий дифференциальное и интегральное исчисление, и курсы линейной алгебры.

Знания, полученные в этом курсе, необходимы для проведения научно-исследовательской работы и успешной сдачи государственной итоговой аттестации.

### 1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся профессиональных компетенций (ПК) :

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
1.	ПК-2	Готовность к постановке профессиональных задач в области	нормативные документы для составления заявок, грантов, проектов НИР В том числе: характеристики геометрической природы $S^1$ –	использовать и совершенствовать методы и программное обеспечение для расчета исследуемых характеристик объектов и	методами планирования, подготовки, проведения НИР,

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
		научно-исследовательской и практической деятельности, подбору, развитию и совершенствованию методических решений на базе современных достижений в области вещественного, комплексного и функционального анализа	<p>квазиконформных отображений, как естественного обобщения квазиконформных отображений; понимания природы 1-квазиконформных отображений;</p> <p>- квазиконформные отображения, как об отображениях, наименее уклоняющихся от конформных отображений при отображениях четырехсторонников;</p> <p>- знания о пространстве функций с обобщенными производными, соболевских пространствах и теоремах вложения для них;</p> <p>- об эквивалентности аналитического и геометрического подходов при исследовании <math>k</math>- квазиконформных отображений;</p> <p>- о потенциальных операторах И. Н. Векуа и об их связи с общими потенциальными операторами, их свойствах, как операторов, действующих в пространствах интегрируемых функций;</p> <p>- свойства интегрируемого оператора Гильберта и общую теорию Кальдера-Зигмунда об операторах, действующих в пространствах интегрируемых функций, о свойствах оператора П. И. Н. Векуа потенциального типа;</p> <p>- о квазиконформных отображениях плоскости (полуплоскости, области)</p>	<p>процессов на базе современных достижений в области использовать и совершенствовать методы и программное обеспечение для расчета исследуемых характеристик объектов и процессов на базе современных достижений в области механики, прикладной математики и ИТ</p> <p>В том числе: вычислять различные геометрические характеристики <math>C^1</math> - отображений <math>w</math>, определяемые их частными производными <math>w_z</math>;</p> <p>- оценивать их значения, устанавливать свойство <math>k</math>- квазиконформности (и его отсутствие; находить характеристики обратных отображений);</p> <p>- формулировать общую задачу Гретша, сводить ее к задаче Гретша для прямоугольников, находить ее решение как в классе <math>C^1</math> – отображений, так и отображений с обобщенными производными.</p> <p>- использовать теорию экстремальных длин и модулей для исследования <math>k</math>- квазиконформных отображений, уметь вычислять искажение</p>	<p>анализа полученных данных, формулировки выводов и рекомендаций по профилю 01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ. В том числе: навыками использования теории экстремальных длин и модулей семейств кривых к исследованию <math>k</math>- квазиконформных отображений.</p>

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
			<p>на себя, как о решениях уравнения Бельтрами с измеримыми коэффициентами,</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- об отображениях с неограниченными характеристиками и их свойствах;</li> <li>- о квазиконформных отображениях римановых поверхностей;</li> <li>- о неоднолистных отображениях, осуществляемых решениями нелинейных систем.</li> </ul>	<p>модулей, устанавливать связи между локальными и глобальными свойствами <math>k</math>-квазиконформности, уметь находить экстремальные отображения в классе <math>k</math>-квазиконформных отображений;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- уметь вычислять обобщенные производные функций;</li> <li>- устанавливать связь между наличием обобщенной производной и абсолютной непрерывностью функции на линиях;</li> <li>- устанавливать с помощью теорем вложения свойства функций, обладающих обобщенными производными;</li> <li>- уметь устанавливать связь между аналитическими и геометрическими свойствами <math>k</math> – квазиконформных отображений; между различными определениями <math>k</math> – квазиконформности;</li> <li>- использовать различные формы формулы Грина для получения интегральных представлений функций, обладающих обобщенными производными и исследовать получающиеся при этом потенциальные операторы для исследова-</li> </ul>	

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
				<p>ния их свойств в зависимости от свойств обобщенных производных;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- редуцировать задачу об оценивании сингулярного интеграла к несобственному интегралу и стандартному сингулярному;</li> <li>- используя свойства оператора <math>\Pi</math> И.Н. Векуа, исследовать дифференциальные свойства функций представленных с помощью потенциального оператора <math>\Gamma</math> И.Н. Векуа;</li> <li>- редуцировать задачу о построении отображения с заданной характеристикой к отысканию диффеоморфизма, являющегося решением уравнения Бельтрами;</li> <li>- редуцировать задачу отыскания решения уравнения Бельтрами к линейному уравнению для сингулярного интегрального оператора (его решения);</li> </ul> <p>уметь применять принципы неподвижных точек к исследованию таких интегральных уравнений, их разрешимости;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- используя свойства оператора <math>\Pi</math>, доказывать единственность нормированных решений уравнения Бельтрами;</li> <li>- строить для простых случаев римановы</li> </ul>	

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
				<p>поверхности гиперболического типа по фуксовой группам, вычислять их род, исследовать характер покрытия сферы гипергеометрическим и кривыми;</p> <p>- устанавливать связь между непрерывными отображениями плоскости на себя, непрерывными отображениями римановых поверхностей, порожденных фуксовыми группами и гомоморфизмами фуксовых групп;</p> <p>- устанавливать связь между гомотопией непрерывных отображений римановых поверхностей и эквивалентностью гомоморфизмов фундаментальных групп;</p> <p>- устанавливать взаимно-однозначное соответствие между дифференциалами Бельтрами и квазиконформными гомеоморфизмами римановых поверхностей,</p> <p>- доказать теорему о решении уравнения Бельтрами, коэффициенты которого согласованы с фуксовой группой;</p> <p>- строить индуцированный квадратичный дифференциал по отображению Тейхмюллера, определяемого некоторым</p>	

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
				<p>квадратичным дифференциалом; уметь доказать экстремальные свойства отображения Тейхмюллера и вычислять расстояние Тейхмюллера;</p> <p>- строить отображения <math>(N+1)</math> - связных областей на <math>(N+1-k)</math> - листовую риманову поверхность, накрывающую единичный круг, с <math>k+1</math> граничными компонентами;</p> <p>- сводить вопрос о существовании топологического отображения, осуществляемого решением уравнения <math>w_z = F(z, w, w\bar{z})</math> к нелинейному интегральному уравнению с сингулярным оператором;</p> <p>- уметь применять принципы неподвижных точек к исследованию вопроса о разрешимости нелинейного интегрального уравнения;</p> <p>- уметь конструировать однолистные решения нелинейных дифференциальных уравнений в многосвязных областях;</p> <p>- интерпретировать такие решения как гомеоморфизмы на <math>n</math>-мерные многосвязные римановы поверхности.</p>	

## 2. Структура и содержание дисциплины.





10.	Квазиконформные отображения с заданными граничными соответствиями.		-			6
11.	Квазиконформные отображения поверхностей.	14	-	2	2	4
12.	Оценка, интеграл Дирихле для $(K, K')$ квазиконформных отображений.		-	2		4
13.	Обобщённая оценка Мори и непрерывность по Гёльдеру $(K, K')$ квазиконформных отображений.	14	2	2	2	4
14.	График с квазиконформным гауссовым отображением.			2		4
<i>Итого по дисциплине:</i>		108	8	18	18	64

### 2.3 Содержание разделов дисциплины:

#### 2.3.1 Занятия лекционного типа.

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Пространства С.Л. Соболева функций с обобщёнными производными.	Пространства С.Л. Соболева функций с обобщёнными производными.	Устный опрос
2.	Геометрическое и аналитическое определение квазиконформных отображений.	Геометрическое и аналитическое определение квазиконформных отображений.	Устный опрос
3.	Аналитические свойства квазиконформных отображений.	Аналитические свойства квазиконформных отображений.	Устный опрос
4.	Квазиизометрия и квазисимметрические отображения.	Квазиизометрия и квазисимметрические отображения.	Устный опрос
5.	Интегральные преобразования и разрешимость уравнения Бельтрами.	Интегральные преобразования и разрешимость уравнения Бельтрами.	Устный опрос
6.	Голоморфные движения и искажения площади.	Голоморфные движения и искажения площади.	Устный опрос
7.	Пространство Тейхмюллера.	Пространство Тейхмюллера.	Устный опрос
8.	Экстремальные квазиконформные отображения.	Экстремальные квазиконформные отображения. Условие Гамильтона-Крушкаля	Устный опрос
9.	Изоморфизмы пространств Тейхмюллера и их локальная жёсткость.	Изоморфизмы пространств Тейхмюллера и их локальная жёсткость.	Устный опрос

10.	Квазиконформные отображения с заданными граничными соответствиями.	Квазиконформные отображения с заданными граничными соответствиями.	Устный опрос
11.	Квазиконформные отображения поверхностей.	Квазиконформные отображения поверхностей. $(K, K')$ квазиконформные отображения	Устный опрос
12.	Оценка, интеграл Дирихле для $(K, K')$ квазиконформных отображений.	Оценка, интеграл Дирихле для $(K, K')$ квазиконформных отображений.	Устный опрос
13.	Обобщённая оценка Мори и непрерывность по Гёльдеру $(K, K')$ квазиконформных отображений.	Обобщённая оценка Мори и непрерывность по Гёльдеру $(K, K')$ квазиконформных отображений.	Устный опрос
14.	График с квазиконформным гауссовым отображением.	График с квазиконформным гауссовым отображением. Приложения к уравнениям типа уравнений со средней кривизной	Устный опрос

### 2.3.2 Занятия семинарского типа.

№	Наименование раздела	Тематика практических занятий (семинаров)	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Пространства С.Л. Соболева функций с обобщёнными производными.	Пространства С.Л. Соболева функций с обобщёнными производными.	Решение задач
2.	Геометрическое и аналитическое определение квазиконформных отображений.	Геометрическое и аналитическое определение квазиконформных отображений.	Решение задач
3.	Аналитические свойства квазиконформных отображений.	Аналитические свойства квазиконформных отображений.	Решение задач
4.	Квазиизометрия и квазисимметрические отображения.	Квазиизометрия и квазисимметрические отображения.	Решение задач
5.	Интегральные преобразования и разрешимость уравнения Бельтрами.	Интегральные преобразования и разрешимость уравнения Бельтрами.	Решение задач
6.	Голоморфные движения и искажения площади.	Голоморфные движения и искажения площади.	Решение задач
7.	Пространство Тейхмюллера.	Пространство Тейхмюллера.	Решение задач
8.	Экстремальные квазиконформные отображения.	Экстремальные квазиконформные отображения. Условие Гамильтона-Крушкаля	Решение задач
9.	Изоморфизмы пространств	Изоморфизмы пространств	Решение

	Тейхмюллера и их локальная жёсткость.	Тейхмюллера и их локальная жёсткость.	задач
10.	Квазиконформные отображения с заданными граничными соответствиями.	Квазиконформные отображения с заданными граничными соответствиями.	Решение задач
11.	Квазиконформные отображения поверхностей.	Квазиконформные отображения поверхностей. $(K, K')$ квазиконформные отображения	Решение задач
12.	Оценка, интеграл Дирихле для $(K, K')$ квазиконформных отображений.	Оценка, интеграл Дирихле для $(K, K')$ квазиконформных отображений.	Решение задач
13.	Обобщённая оценка Мори и непрерывность по Гёльдеру $(K, K')$ квазиконформных отображений.	Обобщённая оценка Мори и непрерывность по Гёльдеру $(K, K')$ квазиконформных отображений.	Решение задач
14.	График с квазиконформным гауссовым отображением.	График с квазиконформным гауссовым отображением. Приложения к уравнениям типа уравнений со средней кривизной	Решение задач

### 2.3.3 Лабораторные занятия.

№	Наименование раздела	Тематика лабораторных занятий	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Пространства С.Л. Соболева функций с обобщёнными производными.	Пространства С.Л. Соболева функций с обобщёнными производными.	Решение задач
2.	Геометрическое и аналитическое определение квазиконформных отображений.	Геометрическое и аналитическое определение квазиконформных отображений.	Решение задач
3.	Аналитические свойства квазиконформных отображений.	Аналитические свойства квазиконформных отображений.	Решение задач
4.	Квазиизометрия и квазисимметрические отображения.	Квазиизометрия и квазисимметрические отображения.	Решение задач
5.	Интегральные преобразования и разрешимость уравнения Бельтрами.	Интегральные преобразования и разрешимость уравнения Бельтрами.	Решение задач
6.	Голоморфные движения и искажения площади.	Голоморфные движения и искажения площади.	Решение задач
7.	Пространство Тейхмюллера.	Пространство Тейхмюллера.	Решение задач
8.	Экстремальные квазиконформные	Экстремальные квазиконформные	Решение

	отображения.	отображения. Условие Гамильтона-Крушкаля	задач
9.	Изоморфизмы пространств Тейхмюллера и их локальная жёсткость.	Изоморфизмы пространств Тейхмюллера и их локальная жёсткость.	Решение задач
10.	Квазиконформные отображения с заданными граничными соответствиями.	Квазиконформные отображения с заданными граничными соответствиями.	Решение задач
11.	Квазиконформные отображения поверхностей.	Квазиконформные отображения поверхностей. $(K, K')$ квазиконформные отображения	Решение задач
12.	Оценка, интеграл Дирихле для $(K, K')$ квазиконформных отображений.	Оценка, интеграл Дирихле для $(K, K')$ квазиконформных отображений.	Решение задач
13.	Обобщённая оценка Мори и непрерывность по Гёльдеру $(K, K')$ квазиконформных отображений.	Обобщённая оценка Мори и непрерывность по Гёльдеру $(K, K')$ квазиконформных отображений.	Решение задач
14.	График с квазиконформным гауссовым отображением.	График с квазиконформным гауссовым отображением. Приложения к уравнениям типа уравнений со средней кривизной	Решение задач

### 2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Не предусмотрены

### 2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине.

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
1	разбор лекций	1. Милнор, Д. Теория Морса / Д. Милнор ; пер. с англ. В.И. Арнольд. - М. : б.и., 1963. - 181 с. - (Библиотека сборника "Математика"). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=454811">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=454811</a> 2. Альфорс, Л. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения / Л. Альфорс, Л. Берс ; пер. с англ. В.А. Зорич, А.А. Кириллов ; под ред. Б.В. Шабат, Н.И. Плужниковой. - М. : Издательство иностранной литературы, 1961. - 175 с. : ил. - (Библиотека сборника "Математика"). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=450358">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=450358</a>
2	работа с литературой	1. Милнор, Д. Теория Морса / Д. Милнор ; пер. с англ. В.И. Арнольд. - М. : б.и., 1963. - 181 с. - (Библиотека сборника "Математика"). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=454811">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=454811</a> 2. Альфорс, Л. Пространства римановых поверхностей и

		квазиконформные отображения / Л. Альфорс, Л. Берс ; пер. с англ. В.А. Зорич, А.А. Кириллов ; под ред. Б.В. Шабат, Н.И. Плужниковой. - М. : Издательство иностранной литературы, 1961. - 175 с. : ил. - (Библиотека сборника "Математика"). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=450358">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=450358</a>
3	отработка навыков решения практических задач	1. Милнор, Д. Теория Морса / Д. Милнор ; пер. с англ. В.И. Арнольд. - М. : б.и., 1963. - 181 с. - (Библиотека сборника "Математика"). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=454811">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=454811</a> 2. Альфорс, Л. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения / Л. Альфорс, Л. Берс ; пер. с англ. В.А. Зорич, А.А. Кириллов ; под ред. Б.В. Шабат, Н.И. Плужниковой. - М. : Издательство иностранной литературы, 1961. - 175 с. : ил. - (Библиотека сборника "Математика"). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=450358">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=450358</a>
	подготовка к занятиям-конференциям	1. Милнор, Д. Теория Морса / Д. Милнор ; пер. с англ. В.И. Арнольд. - М. : б.и., 1963. - 181 с. - (Библиотека сборника "Математика"). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=454811">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=454811</a> 2. Альфорс, Л. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения / Л. Альфорс, Л. Берс ; пер. с англ. В.А. Зорич, А.А. Кириллов ; под ред. Б.В. Шабат, Н.И. Плужниковой. - М. : Издательство иностранной литературы, 1961. - 175 с. : ил. - (Библиотека сборника "Математика"). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=450358">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=450358</a>

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

### 3. Образовательные технологии.

Активные и интерактивные формы: лекции: проблемная лекция, лекция – пресс-конференция (могут применяться презентации); практические занятия: мозговой штурм, занятие – конференция (с применением презентаций), разбор практических задач, контрольные работы, активизация творческой деятельности, регламентированная дискуссия; для воплощения образовательных форм могут быть использованы компьютерные технологии.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

#### **4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.**

##### **4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля.**

###### **Контрольные вопросы для проведения текущего контроля**

1. Теорема существования решения уравнения Бельтрами, осуществляющего топологическое отображение плоскости на себя, для коэффициента с компактным носителем в  $P^1$ , содержащим бесконечно удаленную точку.

2. Теорема существования решения уравнения Бельтрами, осуществляющего топологическое отображение  $S$  на себя для случая произвольного измеримого коэффициента.

3. Примеры отображений с неограниченными характеристиками. Теорема о существовании решений уравнения Бельтрами, осуществляющих топологическое отображение вырожденного кольца на вырожденное и невырожденное кольцо.

4. Понятие универсальной накрывающей римановой поверхности. Классификация римановых поверхностей. Конформный модуль поверхности гиперболического типа.

5. Фундаментальная группа поверхностей. Теорема о гомотопии непрерывных отображений римановых поверхностей.

6. Дифференциалы Бельтрами на римановой поверхности и её квазиконформные гомоморфизмы.

7. Коэффициенты Бельтрами, согласованные с фуксовой группой. Теорема существования решения уравнения Бельтрами, согласованного с фуксовой группой. Индуцированное отображение индуцированных римановых поверхностей.

9. Теорема Тейхмюллера об экстремальном свойстве отображений Тейхмюллера (формулировка теоремы). Расстояние Тейхмюллера. Структура пространства Тейхмюллера  $T(S_0)$ .

10. Теорема существования аналитической функции, отображающей многосвязную область на многосвязную риманову поверхность.

11. Теорема существования решений нелинейных систем дифференциальных уравнений, отображающих многосвязные области на многосвязные римановы поверхности.

12.

14. Теорема П.П. Белинского об искажении внутренних расстояний при  $k$  - квазиконформных отображениях.

15. Теорема о  $k$  - квазиконформности модуля семейства кривых при  $k$  - квазиконформных отображениях.

16. Задачи Грётша, Мори и Тейхмюллера об экстремальном модуле кольцевых областей, разделяющих замкнутые множества, их функции Кюнцы, связь между ними.

18. Теорема об абсолютной непрерывности  $k$  - квазиконформных отображений, определенных геометрически.

19. Теорема Мори о равностепенной непрерывности семейства нормированных  $k$  - квазиконформных отображений.

20. Теорема об эквивалентности геометрического и аналитического способов определения  $k$  - квазиконформных отображений.

21. Лемма Вейля (формулировка). Теорема об интегральном представлении функций, имеющих интегрируемую обобщенную производную.

22. Потенциальный  $T$ - оператор И. Н. Векуа. Теореме о компактности  $T$  - оператора И.Н. Векуа,  $T: L_p(G) \rightarrow C(\cdot)$ ,  $p > 2$ , .
24. Дифференциальные свойства функций, представимых оператором  $T$  И.Н. Векуа.
25. Теорема единственности нормированного решения уравнения Бельтрами для случая коэффициента Бельтрами, имеющего компактный носитель.
26. Теорема существования решения уравнения Бельтрами, осуществляющего топологическое отображение плоскости на себя, для случая коэффициента с компактным носителем в  $C$ .

### Темы для занятия-конференции

1. Отображение Тейхмюллера римановых поверхностей,  $f: S \rightarrow S'$ . Теорема о связи между квадратичными дифференциалами  $S$  и  $S'$ .
2. Сингулярные интегралы в пространстве  $R^n$ . Оператор Гильберта  $H$  на вещественной прямой. Теорема об ограниченности оператора  $H: L_p(G) \rightarrow L_p(G)$ ,  $p > 1$  (с доказательством). Теорема об ограниченности сингулярного интегрального оператора  $\Pi$  И.Н. Векуа,  $\Pi: L_p(G) \rightarrow L_p(G)$ ,  $p > 1$ , .
3. Эллиптические функции и теорема об оценки функций Кюнци.
4. Модуль четырехсторонника. «Внутреннее» определение модуля с помощью понятия экстремальной длины семейства кривых. «Внешнее» определение с помощью эллиптических интегралов.
5. Задача Грётша для четырехсторонников об отображениях, наименее уклоняющихся от конформных в классе  $C^1$ , её решение и классе функций с обобщенными производными.

### **4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации.**

#### Вопросы к зачету

1. Пространства С.Л. Соболева функций с обобщёнными производными.
2. Геометрическое и аналитическое определение квазиконформных отображений.
3. Аналитические свойства квазиконформных отображений.
4. Квазиизометрия и квазисимметрические отображения.
5. Интегральные преобразования и разрешимость уравнения Бельтрами.
6. Голоморфные движения и искажения площади.
7. Пространство Тейхмюллера.
8. Экстремальные квазиконформные отображения.
9. Изоморфизмы пространств Тейхмюллера и их локальная жёсткость.
10. Квазиконформные отображения с заданными граничными соответствиями.
11. Квазиконформные отображения поверхностей.
12. Оценка, интеграл Дирихле для  $(K, K')$  квазиконформных отображений.
13. Обобщённая оценка Мори и непрерывность по Гёльдеру  $(K, K')$  пространственных квазиконформных отображений.
14. Гауссово отображение с квазиконформным графиком

Ответ аспиранта на зачете оценивается следующим образом.

Критерии оценивания	Количество баллов
Ответ грамотный, логично изложенный, существенные неточности отсутствуют. Проявлена достаточная научная и	зачет

образовательнокультурная эрудиция.	
В ответе значительные пробелы в фундаментальных знаниях, допускаются существенные ошибки.	незачет

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

## **5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.**

### **5.1 Основная литература:**

1. Милнор, Д. Теория Морса / Д. Милнор ; пер. с англ. В.И. Арнольд. - М. :б.и., 1963. - 181 с. - (Библиотека сборника "Математика"). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454811> .

2. Альфорс, Л. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения / Л. Альфорс, Л. Берс ; пер. с англ. В.А. Зорич, А.А. Кириллов ; под ред. Б.В. Шабат, Н.И. Плужниковой. - М. : Издательство иностранной литературы, 1961. - 175 с. : ил. - (Библиотека сборника "Математика"). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450358>.

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах «Лань» и «Юрайт».

### **5.2 Дополнительная литература:**



1) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1977. - Т. 1. А - Г. - 576 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454588>

2) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1979. - Т. 2. Д - Коо. - 552 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454589> .

3) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1982. - Т. 3. Коо - Од. - 592 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454590>.

4) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1984. - Т. 4. Ок - Сло. - 608 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454591>

5) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1985. - Т. 5. Слу - Я. - 624 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454592>

### **5.3. Периодические издания:**

1) Вестник МГУ. Серия: Математика. Механика; <http://vestnik.math.msu.su/>

2) Вестник СПбГУ. Серия: Математика. Механика. Астрономия;  
<http://vestnik.spbu.ru/>

3) Известия ВУЗов. Серия: Математика; <https://kpfu.ru/>

4) Известия РАН (до 1993 г. Известия АН СССР). Серия: Математическая;  
<http://www.mathnet.ru/>

### **6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля).**

1. ЭБС "Университетская библиотека ONLINE" – <http://biblioclub.ru/>

2. Электронная библиотечная система издательства "Лань" – <http://e.lanbook.com/>

3. Электронная библиотечная система "Юрайт" – <http://www.biblio-online.ru/>

4. Scopus – база данных рефератов и цитирования – <http://www.scopus.com/>

5. Web of Science (WoS) –

[http://apps.webofknowledge.com/WOS\\_GeneralSearch\\_input.do?product=WOS&search\\_mode=GeneralSearch&SID=V2yRRW6FP9RssAaul78&preferencesSaved](http://apps.webofknowledge.com/WOS_GeneralSearch_input.do?product=WOS&search_mode=GeneralSearch&SID=V2yRRW6FP9RssAaul78&preferencesSaved)

6. Научная электронная библиотека (НЭБ) – <http://www.elibrary.ru/>

7. Архив научных журналов – <http://archive.neicon.ru/>

8. Электронная Библиотека Диссертаций – <https://dvs.rsl.ru/>

9. Национальная электронная библиотека – <http://нэб.рф/>

10. База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций – <http://infoneeds.kubsu.ru/>

### **7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.**

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной систематизированный материал и поднимаются проблемные вопросы; практических занятий, на которых широко используются активные и интерактивные образовательные технологии; лабораторных, в процессе проведения которых обучающиеся отрабатывают навыки решения конкретных научных задач.

Важнейшими составляющими курса являются такие виды занятий, как мозговой штурм и занятие – конференция, на которых по максимуму осуществляется активизация творческой деятельности обучающихся; а также самостоятельная работа аспирантов, такая как разбор лекций, работа с литературой, отработка навыков решения практических

задач, подготовка к занятиям-конференциям. В процессе самостоятельной работы обучающимися активно используются информационные справочные системы.

Успешное освоение материала курса предполагает большую самостоятельную работу аспирантов и руководство этой работой со стороны преподавателей.

Текущий контроль осуществляется преподавателем, ведущим практические занятия на основе дискуссии с аспирантами, дающей представление о динамике роста знаний аспирантов и их научном потенциале; учета активности аспиранта на занятиях типа «мозговой штурм» и оценке выступления обучающегося на занятии-конференции. Контроль также осуществляется путем проведения контрольных работ.

Итоговый контроль осуществляется в форме зачета.

Для аспиранта большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала, проводимая научным руководителем.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.**

### **8.1 Перечень информационных технологий.**

- Сбор, хранение, систематизация и выдача учебной и научной информации;
- Обработка текстовой, графической и эмпирической информации;
- Подготовка, конструирование и презентация итогов исследовательской и аналитической деятельности;
- Использование электронных презентаций при проведении практических занятий;
- Работа с информационными справочными системами;
- Использование электронной почты преподавателей и обучающихся для рассылки, переписки и обсуждения возникших учебных проблем.

### **8.2 Перечень необходимого программного обеспечения.**

- Офисный пакет приложений Microsoft Office.

### **8.3 Перечень информационных справочных систем:**

- Электронные ресурсы библиотеки КубГУ – <https://kubsu.ru/node/1145> (см. п. 6)
- Могут использоваться иные информационно-поисковые системы сети Интернет.

**9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) и оснащенность
	Лекционные занятия	Лекционная аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) и соответствующим программным обеспечением (ПО).
	Семинарские занятия	Специальное помещение, оснащенное презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) и соответствующим программным обеспечением (ПО).
	Групповые (индивидуальные) консультации	Аудитория оснащенная компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченная доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.
	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Аудитория оснащенная компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченная доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.
	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.