

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Кубанский государственный университет»  
факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе,  
качеству образования, первый  
проректор



«29» мая 2020 г.

### **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.В.ДВ.02.01 Математические основы метода конечных элементов**

Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Специализация: Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг

Форма обучения: очная

Квалификация: Математик. Механик. Преподаватель

Краснодар 2020

Рабочая программа дисциплины Б1.В.ДВ.6 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Программу составил:

Голуб М.В., доцент, доктор физ.-мат. наук \_\_\_\_\_

Рабочая программа дисциплины Б1.В.ДВ.6 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ утверждена на заседании кафедры теории функций  
протокол № 8 «17» марта 2020 г.

Заведующий кафедрой теории функций Голуб М.В. \_\_\_\_\_

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры теории функций  
протокол № 8 «17» марта 2020 г.

Заведующий кафедрой теории функций Голуб М.В. \_\_\_\_\_

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук  
протокол № 2 «30» апреля 2020 г.

Председатель УМК факультета Шмалько С.П. \_\_\_\_\_

Рецензенты:

Гусаков Валерий Александрович, канд. физ. – мат. наук,  
директор ООО «Просвещение – Юг»

Засядко Ольга Владимировна, доцент кафедры информационных образовательных технологий, канд. физ. - мат. наук, доцент

## **1 Цели и задачи изучения дисциплины.**

### **1.1 Цель освоения дисциплины.**

Цель дисциплины «Математические основы метода конечных элементов» заключается в изучении с точки зрения современной математики и приложений метода конечных элементов, который является одним из наиболее широко применяемых в научных расчетах и инжиниринге численным методом решения уравнений, возникающих в самых различных областях прикладной механики.

### **1.2 Задачи дисциплины.**

1. Понимание математических основ, лежащих в основе применения метода конечных элементов.
2. Формирование навыков, необходимых для анализа и решения задач механики и математической физики для сложных неклассических областей.
3. Развитие навыков математического моделирования в естественных и инженерных науках.
4. Получение знаний о практике использования одного из самых универсальных современных численных методов – метода конечных элементов.

### **1.3 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы.**

Дисциплина «Математические основы метода конечных элементов» относится к вариативной части блока 1 «Дисциплины (модули)» учебного плана и является дисциплиной по выбору по направлению подготовки 01.05.01. Данная дисциплина призвана расширить кругозор студентов в плане применения строгих математических методов к решению прикладных задач. Полученные знания необходимы для написания выпускной квалификационной работы.

### **1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.**

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся общепрофессиональных, профессиональных компетенций: ПК-3, ОПК-1.

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
1.	ОПК-1	готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, линейной алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, дискретной математики, теории вероятностей,	основные методы математического и компьютерного моделирования для решения прикладных и фундаментальных задач	реализовывать элементы алгоритмов или математических моделей для задач математической физики	навыками построения математических моделей и их программной реализации

		математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики, механики сплошной среды, теории управления и оптимизации в будущей профессиональной деятельности			
2.	ПК-3	способностью создавать и исследовать новые математические модели явлений реального мира, сред, тел и конструкций	основные методы математического и компьютерного моделирования для решения задач механики	разрабатывать математические модели и реализующие их программные комплексы, проводить численный анализ на их основе	навыками анализа математических подходов с точки зрения адекватности их применения к конкретной задаче

## 2. Структура и содержание дисциплины.

### 2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ с формой контроля в 7 семестре – зачет.

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 2 зачетных единицы (72 часа, из них 56,2 часа контактной работы: лекционных 18 ч., лабораторных 36 ч., 2 ч. КСР, 0,2 ч. ИКР; 15,8 ч. самостоятельной работы).

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры (часы)
		7
<b>Контактная работа, в том числе:</b>	<b>56,2</b>	<b>56,2</b>
<b>Аудиторные занятия (всего):</b>	<b>54</b>	<b>54</b>
Занятия лекционного типа	18	18
Лабораторные занятия	36	36
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)	-	-
<b>Иная контактная работа:</b>	<b>2,2</b>	<b>2,2</b>
Контроль самостоятельной работы (КСР)	2	2
Промежуточная аттестация (ИКР)	0,2	0,2
<b>Самостоятельная работа, в том числе:</b>	<b>15,8</b>	<b>15,8</b>
Выполнение индивидуальных заданий (подготовка сообщений, презентаций)	-	-
Проработка учебного материала	15,8	15,8
<b>Контроль:</b>	<b>-</b>	<b>-</b>
Подготовка к текущему контролю	-	-
<b>Общая трудоёмкость</b>	<b>72</b>	<b>72</b>
<b>час.</b>		
<b>в том числе контактная работа</b>	<b>56,2</b>	<b>56,2</b>

	зач. ед	2	2
--	---------	---	---

## 2.2 Структура дисциплины:

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам (темам) дисциплины.

Разделы дисциплины, изучаемые в 7 семестре

№	Наименование разделов	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	
1	2	3	4	5	6	7
1.	Концепция метода конечных элементов, пространства функций, формулировки задач.	18	6		8	4
2.	Построение математических моделей механики сплошных сред.	16	4		10	2
3.	Исследование математических моделей при решении прикладных задач	21,8	6		10	5,8
4.	Вычислительный эксперимент и его роль	14	2		8	4
	<i>Итого по дисциплине:</i>		18		36	15,8

## 2.3 Содержание разделов (тем) дисциплины:

### 2.3.1 Занятия лекционного типа.

№ раздела	Наименование раздела (темы)	Содержание раздела (темы)	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1	Концепция метода конечных элементов, пространства функций, формулировки задач.	Общие сведения о методе конечных элементов (исторические сведения, особенности, общая схема). Геометрическое моделирование и дискретизация пространственных областей.	Устные опросы.
2	Построение математических моделей механики сплошных сред.	Постановки задач механики сплошной среды. Начально-граничные условия. Смешанные граничные условия. Сильная постановка. Вариационная постановка. Слабая постановка. Уравнение Эйлера. Метод Рунге. Метод наименьших квадратов. Дискретизация и редукция.	Устные опросы.
3	Исследование математических моделей при решении прикладных задач	Формулировка метода конечных элементов на примере уравнения Гельмгольца в двумерном случае. Применение полуаналитических методов для решения двумерной задачи механики сплошных сред (колебания упругого изотропного прямоугольного тела под действием внешней приложенной нагрузки).	Устные опросы.

4	Вычислительный эксперимент и его роль	Корректность математических моделей. Примеры корректных и некорректных задач. Численное и аналитическое решение уравнений в частных производных. Решение СЛАУ, численное интегрирование и дифференцирование, решение модельных задач (гидродинамики, теории упругости, геофизики, акустики).	Устные опросы.
---	---------------------------------------	--	----------------

### 2.3.2 Занятия семинарского типа.

Не предусмотрены.

### 2.3.3 Лабораторные занятия. 7 семестр

№	Наименование раздела	Наименование лабораторных работ	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Концепция метода конечных элементов, пространства функций, формулировки задач.	Общие сведения о методе конечных элементов (исторические сведения, особенности, общая схема). Геометрическое моделирование и дискретизация пространственных областей.	Обсуждение домашних заданий. Контрольная работа 1.
2.	Построение математических моделей механики сплошных сред.	Постановки задач механики сплошной среды. Начально-граничные условия. Смешанные граничные условия. Сильная постановка. Вариационная постановка. Слабая постановка. Уравнение Эйлера. Метод Рунге. Метод наименьших квадратов. Дискретизация и редукция.	Обсуждение домашних заданий.
3.	Исследование математических моделей при решении прикладных задач	Формулировка метода конечных элементов на примере уравнения Гельмгольца в двумерном случае. Применение полуаналитических методов для решения двумерной задачи механики сплошных сред (колебания упругого изотропного прямоугольного тела под действием внешней приложенной нагрузки).	Обсуждение домашних заданий. Защита результатов выполнения индивидуальных заданий
4.	Вычислительный эксперимент и его роль	Корректность математических моделей. Примеры корректных и некорректных задач. Численное и аналитическое решение уравнений в частных производных. Решение СЛАУ, численное интегрирование и дифференцирование, решение модельных задач (гидродинамики, теории упругости, геофизики, акустики).	Обсуждение домашнего задания. Контрольная работа 2

2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов) – курсовая работа не предусмотрена

**2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)  
7 семестр**

№	Наименование раздела	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
1.	Концепция метода конечных элементов, пространства функций, формулировки задач.	[1]- [5] (из списка 5.1), или [1]-[4] (из списка 5.2)
2.	Построение математических моделей механики сплошных сред.	[1]- [5] (из списка 5.1), или [1]-[4] (из списка 5.2)
3.	Исследование математических моделей при решении прикладных задач	[1]- [5] (из списка 5.1), или [1]-[4] (из списка 5.2)
4.	Вычислительный эксперимент и его роль	[1]- [5] (из списка 5.1), или [1]-[4] (из списка 5.2)

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла,
- в печатной форме на языке Брайля. Для лиц с нарушениями слуха:
- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

### **3. Образовательные технологии.**

При изучении данного курса не используются.

### **4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.**

#### **4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля.**

#### **Примерный перечень заданий и контрольных вопросов**

1. Написать процедуру для определения нулей полиномов Лобатто порядка  $N=3,4,6$ .
2. Написать процедуру вычисления значений полиномов Лобатто порядка  $N=3,4,6$ .
3. Написать процедуру для расчёта значений любого многочлена Гаусса-Лежандра-Лобатто порядка  $N=4,5,7$ .
4. Написать процедуру вычисления значений полиномов Чебышева произвольного порядка.
5. Написать процедуру вычисления значений Гаусса-Чебышева-Лобатто для произвольного порядка.
6. Написать процедуру разложения произвольной аналитической функции  $f(x)$  на отрезке  $[a,b]$  по полиномам Гаусса-Чебышева-Лобатто до порядка  $N$  включительно.
7. Написать процедуру вычисления интегралов на основе квадратурных формул, использующих нули полиномов Чебышева.
8. Написать процедуру вычисления интегралов на основе квадратурных формул, использующих точки Гаусса-Лежандра-Лобатто.
9. Записать вариационную формулировку задачи Дирихле для уравнения Пуассона в слабой постановке.
10. Реализовать МКЭ ВПТ для одномерного уравнения Гельмгольца, используя несколько элементов.
11. Реализовать МКЭ ВПТ для двумерного уравнения Лапласа в квадрате, используя один элемент.
12. Реализовать МКЭ ВПТ для двумерного уравнения Пуассона в квадрате, используя один элемент.
13. Реализовать МКЭ ВПТ для двумерного уравнения Гельмгольца в квадрате, используя один элемент.
14. Реализовать приближённое решение двумерного уравнения Гельмгольца с помощью МКЭ ВПТ, используя несколько элементов, для области, ограниченной линиями, на которых заданы граничные условия:

#### **4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации.**

##### ***Вопросы к зачету***

1. Понятие интегрального преобразования, интегральное преобразование Фурье.
2. Свойства преобразования Фурье.
3. Свойства трансформанты Фурье в комплексной плоскости.
4. Обобщенные функции, их свойства и действия над ними.
5. Равенство Парсеваля.
6. Преобразование Фурье производных.
7. Преобразование Фурье производных разрывных функций.
8. Построение частных решений дифференциальных уравнений с помощью преобразования Фурье.
9. Элементы ТФКП (аналитические функции, контурные интегралы, вычеты).
10. Ряд Лорана, вычет в многократном полюсе.
11. Лемма Жордана и замыкание контура интегрирования в обратном преобразовании Фурье.
12. Использование теоремы Коши для обращения преобразования Фурье.
13. Примеры прямого и обратного преобразования Фурье элементарных функций (первое задание).
14. Общая схема решения модельной задачи о полосовом волноводе.
15. Условия излучения, выбор контура интегрирования и ветвей радикалов.
16. Представление решения модельной задачи в виде суммы вычетов, волновая структура решения.
17. Построение фундаментального решения волнового уравнения с помощью



преобразования Фурье.

18. Общая схема решения модельной задачи для многослойного полосового волновода (второе задание).

19. Асимптотические методы

20. Лемма Ватсона, лемма Эрдейи

21. Асимптотика объемных волн

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на зачете;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

– в печатной форме увеличенным шрифтом,

– в форме электронного документа. Для лиц с нарушениями слуха:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

## **5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля).**

### **5.1 Основная литература:**

1. Макаров Е.Г. Метод конечных элементов в прочностных расчётах: Учебное пособие / Е.Г. Макаров. – Санкт-Петербург : БГТУ "Военмех" им. Д.Ф. Устинова, 2017. — 136 с. — ISBN 978-5-906920-49-2. — URL: <https://e.lanbook.com/book/121830>.

2. Самогин, Ю. Н. Метод конечных элементов в динамических расчетах турбомашин: учебное пособие / Ю. Н. Самогин, С. А. Серков, В. П. Чирков; под редакцией В. П. Чиркова. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 212 с. — ISBN 978-5-9221-1681-7. — URL: <https://e.lanbook.com/book/91149>.

3. Зализняк, В. Е. Численные методы. Основы научных вычислений : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. Е. Зализняк. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 356 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-02714-3. — URL: <https://biblio-online.ru/book/9D9516CB-A065-4497-9062-5D8C77D8E644/chislennye-metody-osnovy-nauchnyh-vychisleniy>

### **5.2 Дополнительная литература:**

1. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. - Изд. 12-е, стереотип. - Москва : Наука, 1977. - 873 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL:

<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459821>

2. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного : учебное пособие / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. - Изд. 3-е, испр. - Москва : Наука, 1965. - 716 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. -

URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=464237>

3. Волковыский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2006. — 312 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2763>. — Загл. с экрана.

4. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. - Изд. 3-е, перераб. и доп. - Москва : Наука, 1977. - 640 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=464227>

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах «Лань» и «Юрайт».

#### **6. Перечень ресурсов информационно телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля).**

Fluid dynamics - [http://en.wikipedia.org/wiki/Fluid\\_dynamics](http://en.wikipedia.org/wiki/Fluid_dynamics) Гидродинамика -

<http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D0%B4%D1%80%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%Гидродинамика> - [http://old.kpfu.ru/f5/bin\\_files/posob1.pdf](http://old.kpfu.ru/f5/bin_files/posob1.pdf)

Образовательный математический сайт - <http://www.exponenta.ru/>

Теоретическая физика: Учебное пособие для вузов. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика - <http://www.knigafund.ru/books/87564>

Численное решение краевых задач -

[http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=4873&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=4873&option_lang=rus)

#### **7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.**

Самостоятельная работа студента является необходимой и крайне важной при изучении любого теоретического или практического учебного курса и должна быть правильно организована. Прежде всего, необходимо, чтобы эта работа была систематической и регулярной. Самостоятельная работа делится между теоретической частью курса и практической, но это деление не носит формального характера, поскольку решение практических задач предусматривает знание основных теоретических понятий и методов, а теоретические знания в свою очередь не могут усваиваться без практической работы с теоретическими конструкциями.

При подготовке к практическому занятию студенту целесообразно познакомиться сначала с теоретическими понятиями, относящимися к данному разделу, чтобы уяснить для себя смысловую часть работы. Для этого рекомендуется прочитать лекции или учебники, в которых освещаются соответствующие вопросы. Естественно, студенту необязательно использовать лишь литературу, указанную в библиографии, но на начальных стадиях изучения материала это делать желательно. Со временем расширение использования литературных источников можно лишь приветствовать. Перед решением домашних задач студенту целесообразно познакомиться сначала с содержанием предыдущего занятия, уяснить для себя методы решения задач рассматриваемого типа. При этом у студента естественно возникают затруднения и вопросы, которые он может задать преподавателю на следующем практическом занятии. Любое практическое занятие

начинается с разборов вопросов и затруднений по домашнему заданию. Форма практических занятий, особенно занятий лабораторных, предусматривает диалог между студентами и преподавателем. Практика показывает, что студенты охотно прибегают к прямому диалогу с преподавателем и умеют извлечь для себя пользу из соответствующего диалога. Каждая большая тема заканчивается итоговой контрольной работой с выставлением оценки. Студент должен получить по каждой контрольной работе хотя бы удовлетворительную оценку, иначе он получает дополнительное задание с обязательным условием отработки неудовлетворительной оценки по соответствующей контрольной работе. Эти отработки принимаются преподавателем, ведущим практические занятия в течение всего семестра.

На зачете студенту предлагается билет с двумя теоретическими вопросами. По получении билета студент имеет возможность в течение 15 минут почитать конспект своих лекций, после чего в течение тридцати минут он должен письменно изложить теоретический материал по билету. Практика показывает, что студент, не изучавший материал, не может действительно воспользоваться лекциями при подготовке к письменному ответу. Наоборот, даже сильному студенту трудно изложить теоретический материал без предварительного просмотра материала в течение 15 минут перед письменным ответом.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.**

### **8.1 Перечень информационных технологий.**

1. Мультимедиа и коммуникационные технологии.
2. Элементы дистанционных технологий.
3. Мировые информационные образовательные ресурсы.
4. Аудиовизуальные и интерактивные средства обучения.
5. Мобильное обучение.
6. Облачные технологии.

### **8.2 Перечень необходимого программного обеспечения.**

- MS Office: MS Word, MS Excel, MS PowerPoint
- Matlab
- Fortran

### **8.3 Перечень информационных справочных систем:**

1. Электронная библиотечная система издательства «Лань» – тематические коллекции (<http://e.lanbook.com>)
2. Электронная библиотечная система «Университетская библиотека онлайн» – базовая коллекция ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru))

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) и оснащенность
1.	Лекционные занятия	Лекционная аудитория, специально оборудованная мультимедийными демонстрационными комплексами, учебной мебелью
2.	Лабораторные занятия	Помещение для проведения лабораторных занятий оснащенное учебной мебелью, доской маркером

		или мелом
3.	Групповые (индивидуальные) консультации	Помещение для проведения групповых (индивидуальных) консультаций, учебной мебелью, доской маркером или мелом
4.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Помещение для проведения текущей и промежуточной аттестации, оснащенное учебной мебелью.
5.	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета