МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе, качеству образования – первый проректор
________________ Хагуров Т.А.
подпись
«_29_» ___мая___ 2020 г.

# РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

# Б1.В.ДВ.09.01 ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

| | |
|---|---|
| Направление подготовки | 02.03.01 Математика и компьютерные науки |
| Направленность (профиль) | Вычислительные, программные, информационные системы и компьютерные технологии |
| Форма обучения | очная |
| Квалификация (степень) выпускника | бакалавр |

Краснодар 2020

Рабочая программа дисциплины Б1.В.ДВ.09.01 Обобщенные решения краевых задач в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Программу составил:
С.В. Гайденко, зав. каф. доцент, канд.физ.-мат.наук, доцент

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры вычислительной математики и информатики
протокол № 10 « 15 » апреля 2020 г.
Заведующий кафедрой (разработчика) Гайденко С.В.

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры вычислительной математики и информатики
протокол № 10 « 15 » апреля 2020 г.
Заведующий кафедрой (выпускающей) Гайденко С.В.

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук
протокол № 2 « 30 » апреля 2020 г.
Председатель УМК факультета Шмалько С.П.

Рецензенты:

Заведующий кафедрой прикладной математики Кубанского государственного университета доктор физико-математических наук профессор Уртенов М.Х.

Доктор экономических наук, кандидат технических наук, профессор кафедры компьютерных технологий и систем КубГАУ Луценко Е.В.

## 1 Цели и задачи изучения дисциплины (модуля)

### 1.1 Цель освоения дисциплины

Сформировать у студентов представления о современных подходах к понятию решения дифференциальных задач в обобщенной постановке и о численных методах решения таких задач на ЭВМ.

### 1.2 Задачи дисциплины

Показать естественность понятия обобщенного решения дифференциальных задач, моделирующих физические процессы с негладкими данными, когда классическое решение может не существовать. Прикладная задача курса – ознакомление студентов с вариационными и проекционными методами построения дискретных моделей основных дифференциальных задач в частных производных.

### 1.3 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина «Обобщенные решения краевых задач» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1 "Дисциплины (модули)" учебного плана, являющегося структурным элементом ООП ВО по профилю «Вычислительные, программные, информационные системы и компьютерные технологии». Студенты должны быть готовы использовать полученные в этой области знания, как при изучении смежных дисциплин, так и в профессиональной деятельности. Для полноценного понимания специального курса необходимы знания, умения и навыки, заложенные в курсах математического анализа, линейной алгебры, функционального анализа, дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, дисциплин специализаций.

### 1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся профессиональной компетенции ПК-3.

| № п.п. | Индекс компетенции | Содержание компетенции (или её части) | В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | **знать** | **уметь** | **владеть** |
| 1. | ПК-3 | **С**пособен математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики | определения классических и обобщенных решений, вариационные и проекционные методы численного решения классических задач | разрабатывать численные методы и алгоритмы, реализовывать эти алгоритмы на языке программирования высокого уровня | методами исследования корректности и дифференциальных задач, как в классической, так и в обобщенной |

| № п.п. | Индекс компет енции | Содержание компетенции (или её части) | В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | **знать** | **уметь** | **владеть** |
| | | | математической физики. | | постановках |

## 2. Структура и содержание дисциплины

### 2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 2 зач. ед. (72 часа), их распределение по видам работ представлено в таблице

*(для студентов ОФО)*

| Вид учебной работы | | Всего часов | Семестры (часы) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 8 | | | |
| **Контактная работа, в том числе:** | | | | | | |
| **Аудиторные занятия (всего):** | | **48** | **48** | | | |
| Занятия лекционного типа | | 24 | 24 | | | |
| Лабораторные занятия | | 24 | 24 | | | |
| Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия) | | - | - | | | |
| | | | | | | |
| **Иная контактная работа:** | | **2,2** | **2,2** | | | |
| Контроль самостоятельной работы (КСР) | | 2 | 2 | | | |
| Промежуточная аттестация (ИКР) | | 0,2 | 0,2 | | | |
| **Самостоятельная работа, в том числе:** | | **21,8** | **21,8** | | | |
| Курсовая работа | | - | - | | | |
| Проработка учебного (теоретического) материала | | 10 | 10 | | | |
| Выполнение индивидуальных заданий (подготовка сообщений, презентаций) | | 6 | 6 | | | |
| Реферат | | - | - | | | |
| | | | | | | |
| Подготовка к текущему контролю | | 5,8 | 5,8 | | | |
| **Контроль:** | | | | | | |
| Подготовка к экзамену | | | | | | |
| **Общая трудоемкость** | | **72** | **72** | | | |
| | | **50,2** | **50,2** | | | |
| | | **2** | **2** | | | |

### 2.2 Структура дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы (темы) дисциплины, изучаемые в ___ семестре *(очная форма)*

| № | Наименование разделов (тем) | Количество часов | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Всего | Аудиторная работа | | | Внеаудиторная работа |
| | | | Л | ПЗ | ЛР | СРС |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1. | Интеграл Лебега, свойства интегрируемых функций. | 16 | 6 | - | 6 | 4 |
| 2. | Обобщенные производные, пространства С.Л.Соболева. | 28 | 10 | - | 10 | 8 |
| 3. | Классические и обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения. | 12 | 4 | - | 4 | 4 |
| 4. | Вариационная задача для квадратичного функционала в гильбертовом пространстве, метод Ритца. | 6 | 2 | - | 2 | 2 |
| 5. | Вариационные и проекционные методы решения операторных уравнений и дифференциальных задач. | 7,8 | 2 | - | 2 | 3,8 |
| | *ИТОГО по разделам дисциплины* | 69,8 | 24 | - | 24 | 21,8 |
| | Контроль самостоятельной работы (КСР) | 2 | | | | |
| | Промежуточная аттестация (ИКР) | 0,2 | | | | |
| | Подготовка к текущему контролю | 5,8 | | | | |
| | Общая трудоемкость по дисциплине | 72 | | | | |

Примечание: Л – лекции, ПЗ – практические занятия / семинары, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента

### 2.3 Содержание разделов (тем) дисциплины

#### 2.3.1 Занятия лекционного типа

| № | Наименование раздела (темы) | Содержание раздела (темы) | Форма текущего контроля |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1. | Интеграл Лебега, свойства интегрируемых функций. | Пространства функций, интегрируемых по Лебегу. Свойства интеграла Лебега: достаточные условия интегрируемости, теоремы о предельном переходе, замена переменных, теорема Фубини, абсолютная непрерывность интеграла Лебега, непрерывность в среднем интегрируемых функций, интеграл Лебега по гладкой гиперповерхности.<br>Усреднение интегрируемых функций: ядро усреднения, операция усреднения, гладкость усредненных функций, сходимость к усредняемым функциям в интегральных нормах. Плотность бесконечно дифференцируемых | ЛР: Текущий контроль усвоения теоретического материала проводится по отчетам студентов о их решениях задач, примеры которых |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | финитных функций в пространствах интегрируемых функций.<br>Многомерная формула интегрирования по частям, ее эквивалентность формуле Гаусса-Остроградского. | приведены ниже. |
| 2. | Обобщенные производные, пространства С.Л.Соболева. | Многомерная формула интегрирования по частям, ее эквивалентность формуле Гаусса-Остроградского. Определение и простейшие свойства обобщенных производных: Единственность, независимость от порядка дифференцирования, последовательное дифференцирование. Примеры обобщенных производных в пространствах С.Л. Соболева.<br>Обобщенные производные и усреднения функций: перестановочность операций и сходимость в интегральных нормах производных от усреднений к обобщенным производным усредняемой функции.<br>Связь обобщенных производных с конечноразностными отношениями: сходимость разностных отношений к обобщенным производным, достаточное условие существования первой обобщенной производной.<br>Соболевские пространства со скалярным произведением и их свойства: полнота, сходимость усреднений в подобласти, инвариантность при невырожденной замене переменных.<br>Теоремы о продолжении. Плотность гладких функций в пространствах С.Л. Соболева.<br>След функции на гладкой гиперповерхности. Свойства следов: формула интегрирования по частям для функций из пространств С.Л. Соболева. Непрерывность следов при параллельном переносе поверхности. Теоремы о компактности вложений пространств С.Л. Соболева в пространства интегрируемых функций.<br>Эквивалентные нормы в пространствах С.Л. Соболева. Непрерывность и непрерывная дифференцируемость функций из пространств С.Л. Соболева. Теоремы вложения в пространства гладких функций. | ЛР:<br>Текущий контроль усвоения теоретического материала проводится по отчетам студентов о их решениях задач, примеры которых приведены ниже. |
| 3. | Классические и обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения. | Математическая модель равновесия мембраны. Классические и обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Корректность этих задач в обобщенной постановке в случае самосопряженного дифференциального оператора. | Студенческий доклад о модели равновесия мембраны с максимально активным участием всех |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | членов группы в обсуждении модели. |
| 4. | Вариационная задача для квадратичного функционала в гильбертовом пространстве, метод Ритца. | Вариационная задача для квадратичного функционала в гильбертовом пространстве. Метод Ритца построения минимизирующей последовательности. | ЛР: Текущий контроль усвоения теоретического материала проводится по отчетам студентов о их решениях задач, примеры которых приведены ниже. |
| 5. | Вариационные и проекционные методы решения операторных уравнений и дифференциальных задач. | Вариационное доказательство разрешимость краевых задач в обобщенной постановке для самосопряженного эллиптического оператора.<br>Вариационный метод построения разностных схем для эллиптических краевых задач. Примеры предельно плотных последовательностей конечномерных подпространств в пространствах С.Л. Соболева. Понятие о методе конечных элементов.<br>Метод Ритца для операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Энергетическое пространство самосопряженного положительно определенного оператора. Энергетические пространства первой и третьей краевых задач для самосопряженного эллиптического оператора. Главные и естественные граничные условия.<br>Метод Галёркина решения операторных уравнений и краевых задач в обобщенной постановке. | ЛР: Текущий контроль усвоения теоретического материала проводится по отчетам студентов о их решениях задач, примеры которых приведены ниже.<br>Доклады студентов о модификациях метода Галёркина применительно к разным краевым задачам. |

**2.3.2 Занятия семинарского типа не предусмотрены**

**2.3.3 Лабораторные занятия**

| № | Наименование лабораторных работ | Форма текущего контроля |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 |
| 1. | Множества меры нуль. Решение задач по свойствам интеграла Лебега.<br>Усреднение интегрируемых функций. Примеры усреднений.<br>Многомерная формула интегрирования по частям, формулы Грина. | *Отчет по лабораторной работе:* |

| | | |
|---|---|---|
| | | решение задач у доски совместно с преподавателем, а также отчеты студентов по решению задач, предложенных в качестве самостоятельной работы. |
| 2. | Примеры вычисления обобщенных производных функций нескольких переменных.<br>Пространства С.Л. Соболева.<br>Плотность гладких функций в пространствах С.Л. Соболева. Кусочно-линейные аппроксимации функций одного и двух независимых аргументов.<br>След функции на гладкой гиперповерхности. Свойства следов.<br>Нормы в пространствах С.Л. Соболева, порожденные эллиптическими дифференциальными операторами. | *Отчет по лабораторной работе:*<br>решение задач у доски совместно с преподавателем, а также отчеты студентов по решению задач, предложенных в качестве самостоятельной работы. |
| 3. | Классические и обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка.<br>Нестационарные краевые задачи и их обобщенные решения. | *Отчет по лабораторной работе:*<br>решение задач у доски совместно с преподавателем, а также отчеты студентов по решению задач, предложенных в качестве самостоятельной работы. |
| 4. | Операторное уравнение в гильбертовом пространстве. Сведение его к вариационной задаче. Энергетические пространства самосопряженных эллиптических операторов. | *Отчет по лабораторной работе:*<br>решение задач у доски совместно с преподавателем, а также отчеты студентов по решению задач, предложенных в качестве |

| | | |
|---|---|---|
| | | самостоятельной работы. |
| 5. | Метод Ритца для самосопряженного эллиптического уравнения с граничными условиями Дирихле и Неймана.<br>Метод конечных элементов. Структура матрицы Грамма для двумерного оператора Лапласа в прямоугольной области.<br>Метод Галеркина для нестационарных краевых задач. | *Отчет по лабораторной работе:* решение задач у доски совместно с преподавателем, а также отчеты студентов по решению задач, предложенных в качестве самостоятельной работы. |

Защита лабораторной работы (ЛР), выполнение курсового проекта (КП), курсовой работы (КР), расчетно-графического задания (РГЗ), написание реферата (Р), эссе (Э), коллоквиум (К), тестирование (Т) и т.д.

**2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)**

Курсовые работы не предусмотрены.

**2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

| № | Вид СРС | Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы |
|---|---|---|
| 1 | Изучение лекционного материала; Подготовка отчета по лабораторной работе; Подготовка к зачету. | Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов утвержденные кафедрой вычислительной математики и информатики, протокол № 14 от 14.06.2017 г. |
| 2 | Изучение лекционного материала; Подготовка отчета по лабораторной работе; Подготовка к зачету | Электронный вариант методического пособия с основными определениями, условиями задач и методическими рекомендациями по их решению. |
| 3 | Изучение лекционного материала; Подготовка отчета по лабораторной работе; Подготовка к зачету | Электронный конспект лекций. |

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

– в печатной форме увеличенным шрифтом,

– в форме аудиофайла;

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в печатной форме,

– в форме аудиофайла;

– в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

Подробные постановки задач для самостоятельной работы студенты получают в очном индивидуальном общении с преподавателем. Очные консультации не составляют проблемы: еженедельно преподаватель работает в аудитории со студентами в среднем по четыре часа.

Для лиц с ограниченными возможностями восприятия информации (нарушения зрения либо слуха, а также с нарушениями опорно-двигательного аппарата) возможна видео и аудио запись лекций: лектор имеет привычку все произнесенные слова записывать на доске, а записанные на доске формулы повторять устно.

### 3. Образовательные технологии

Интерактивные технологии в 8-м семестре предусмотрены во всех лабораторных занятиях в объеме 24 часов.

| Используемые интерактивные образовательные технологии | Количество часов |
|---|---|
| Тренинг на тему: «Интеграл Римана в многомерных областях» с презентациями двумерных примеров определенных и несобственных интегралов . | 2 |
| Дискуссия на тему: «Интеграл Лебега и его сравнение с интегралом Римана» с демонстрацией примеров интегрируемых по Лебегу, но не интегрируемых по Риману функций. | 2 |
| Групповая дискуссия о практической необходимости расширения понятия производной. Примеры математических моделей с нарушением гладкости решений, идеи С.Л.Соболева расширения понятия решения дифференциальной задачи | 4 |
| Дискуссия по свойствам обобщенных производных и основным отличиям их от классических производных. | 2 |
| Мозговой тренинг по вычислению обобщенных производных функций от двух независимых переменных. | 4 |
| Дискуссия о классических постановках краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих математические модели физических явлений. | 2 |
| Дискуссия о возможных расширениях понятия решения эллиптической дифференциальной задачи, связанной с вариационной задачей в энергетическом пространстве. | 2 |
| Компьютерная симуляция равновесия мембраны. | 4 |
| Компьютерная симуляция процесса колебаний неоднородной струны с разрывным старшим коэффициентом. Метод Галеркина для решения нестационарной задачи. | 2 |

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций со студентом при помощи электронной информационно-образовательной среды ВУЗа.

**4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

**4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущей аттестации**

Текущий контроль качества подготовки осуществляется путем проверки теоретических знаний и практических навыков посредством

1) Привлечения студентов к активному обсуждению определений, новых для них результатов, к решению теоретических задач у доски,

2) Публичной защиты самостоятельно решенных задач,

3) Выступлений с докладами, подготовленными самостоятельно на основе предложенной преподавателем литературы.

4) Подготовки к зачету в конце семестра.

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Докажите, что прямая на плоскости является множеством двумерной меры нуль.
2. Докажите, что $(n-1)$–мерная поверхность класса $C^1$ является множеством $n$–мерной меры нуль.
3. Докажите утверждение: $E$ – множество $n$–мерной меры нуль тогда и только тогда, когда существует счетное покрытие этого множества кубами с конечным суммарным объёмом такое, что каждая точка множества $E$ покрыта бесконечным числом кубов.
4. Основываясь на определении измеримой в области $Q$ функции как предела почти всюду последовательности из $C(\overline{Q})$, докажите измеримость любой функции из $C(Q)$.
5. Докажите, что предел почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций есть функция измеримая.
6. Докажите, что если $f_k \in C(\overline{Q})$ и $f_k \uparrow f \geq 0$ почти всюду в области $Q$ при $k \to \infty$, то $\sup\limits_k \int\limits_Q f_k(x)\,dx \geq 0$ .
7. Покажите, что всякая собственно интегрируемая в области $Q$ по Риману функция интегрируема и по Лебегу.
8. Покажите, что функция Дирихле интегрируема по Лебегу, но неинтегрируема по Риману.
9. Докажите теорему: всякая интегрируемая по Лебегу неотрицательная почти всюду в области $Q$ функция $f(x)$ равна нулю почти всюду тогда и только тогда, когда $\int\limits_Q f(x)\,dx = 0$ .
10. Покажите, что $C(\overline{Q})$ всюду плотно в $L_1(Q)$.
11. Покажите, что если область $Q$ ограничена, то $L_1(Q)$ – сепарабельное банахово пространство.
12. Покажите, что из всякой сходящейся в $L_1(Q)$ последовательности можно выделить сходящуюся почти всюду подпоследовательность.
13. При каких значениях $\alpha$ следующие функции принадлежат пространству $L_1(Q)$ :

а) $f(x) = |x|^{\alpha}$, $Q = \{x \in R_n : |x| < 1\}$ ;

б) $f(x)=|x|^{\alpha}$, $Q=\{x\in R_n : |x|>1\}$;

в) $f(x)=|x|^{\alpha}$, $Q=R_n$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{(1-|x|)^{\alpha}}$, $Q=\{x\in R_n : |x|<1\}$;

д) $f(x)=\dfrac{1}{(1-|x|)^{\alpha}}$, $Q=\{x\in R_n : |x|>1\}$?

14. Покажите, что если $f(x)\in L_1(Q)$, то $|f(x)|\in L_1(Q)$ и $\left|\int\limits_Q f(x)dx\right|\le\int\limits_Q|f(x)|dx$.

15. Пусть $f_k(x)\in C(\overline{Q})$, $\left|\int\limits_Q f_k(x)dx\right|\le const$ и $f_k\to f$ почти всюду в $Q$ при $k\to\infty$. Верно ли равенство $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_Q f_k(x)dx=\int\limits_Q f(x)dx$?

16. Докажите непрерывность нормы.

17. Докажите, что всякая сходящаяся по норме последовательность в гильбертовом пространстве сходится также слабо к тому же предельному элементу.

18. Покажите, что последовательность $sin(kx), k=1,2,...$, сходится слабо к нулю в $L_2(0,2\pi)$, но не сходится в норме $L_2(0,2\pi)$.

19. Пусть последовательность элементов $f_k$ гильбертова пространства сходится слабо к $f$ при $k\to\infty$ и при этом $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k\|=\|f\|$. Покажите, что $f_k$ сходится к $f$ по норме.

20. Покажите, что $L_2(Q)$ линейное пространство.

21. Покажите, что если мера области $Q$ конечна, то $L_2(Q)\subset L_1(Q)$, но обратное включение не имеет места.

22. Покажите, что если мера области $Q$ конечна, то из сходимости последовательности $f_k$ к $f$ по норме пространства $L_2(Q)$ следует сходимость последовательности интегралов: $\int\limits_Q f_k(x)dx\to\int\limits_Q f(x)dx$.

23. Докажите, что для любых функций $f$ и $g$ из пространства $L_2(Q)$ выполнено неравенство Минковского

$$\left(\int\limits_Q\big(f(x)+g(x)\big)^2dx\right)^{1/2}\le\left(\int\limits_Q f^2(x)dx\right)^{1/2}+\left(\int\limits_Q g^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

24. Докажите следствие теорем Б.Леви и Лебега: если $f_k(x)\in L_1(Q)$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_Q|f_k(x)|dx$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ абсолютно сходится почти всюду в $Q$, функция $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ принадлежит $L_1(Q)$ и $\int\limits_Q f(x)dx=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_Q f_k(x)dx$.

25. Покажите, что если область $Q$ ограничена, то $L_2(Q)$ – сепарабельное гильбертово пространство.

27. Используя операцию усреднения, докажите, что множество финитных функций $\dot{C}^{\infty}(Q)$ всюду плотно в $L_1(Q)$ и в $L_2(Q)$.

28. Пусть $f, g \in L_2(Q)$ и одна из этих функций финитна. Докажите «формулу интегрирования по частям» для разделённых разностей $\left(\delta_h^k f, g\right)_{L_2(Q)} = -\left(f, \delta_{-h}^k g\right)_{L_2(Q)}$.

29. Покажите ортогональность в $L_2(-1;1)$ ортогональность многочленов Лежандра $L_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^n\right]$.

30. Покажите ортогональность в $L_{2;\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1;1)$ ортогональность многочленов Чебышёва $T_n(x) = cos\left[n\left(arc\cos x\right)\right]$.

31. Пусть у функции $f(x)$ в области $Q$ существует обобщенная производная $D^{\alpha} f(x) = F(x)$, а у функции $F(x)$ существует обобщенная производная $D^{\beta} F(x) = G(x)$. Покажите, что существует обобщенная производная $D^{\alpha+\beta} f(x) = G(x)$.

32. Покажите, что из существования обобщенной производной $D^{\alpha} f(x)$ не следует существования обобщенной производной $D^{\beta} f(x)$ при $\beta_i \le \alpha_i$, $i = 1,...,n$, $|\beta| < |\alpha|$.

33. Докажите, что обобщенная производная финитной функции финитна.

34. Докажите, что $f(x_1, x_2) = sign(x_1) \notin H^1\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\right)$.

35. Докажите, что $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \in H^1\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\right)$.

36. Докажите, что если $f(x) \in H^1(a;b)$ и $f'(x) = 0$ почти всюду, то $f(x) = const$.

37. Докажите формулу интегрировании по частям для функций из $H^1(Q)$, предполагая её справедливой для функций из $C^1\left(\overline{Q}\right)$.

38. Покажите, что $H^1(Q) \not\subset C(Q)$ при $Q \subset R_2$.

39. Докажите, что функция $f(x)$ из $L_2(0;\pi)$ принадлежит $\overset{0}{H^1}(0;\pi)$ тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2$, где $b_k = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$.

40. Докажите, что для любой функции $f \in \overset{0}{H}{}^{1}(0;\pi)$ выполняется неравенство Стеклова $\int\limits_{0}^{\pi} f^{2}(x)dx \le \int\limits_{0}^{\pi} f'^{2}(x)dx$. Найдите функцию $f_1 \in \overset{0}{H}{}^{1}(0;\pi)$, для которой это неравенство превращается в равенство. Покажите, что если $f(x) \ne cf_1(x)$, где c – постоянная, то для функции $f(x)$ неравенство строгое.

41. Пусть $x = (x_1, x_2) = (r\cos\varphi; r\sin\varphi)$ и функция $f(x_1, x_2) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$ принадлежит $H^1(|x| < 1)$. Выразите через $a_k$ и $b_k$ интеграл $\int\limits_{0}^{\pi} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + f^2 \right) dx$.

## 4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

**Вопросы по лекционному курсу**

1. Функции, интегрируемые по Лебегу. Сравнение интегралов Римана и Лебега.
2. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.
3. Дифференцируемость интеграла Лебега по параметру. Теорема Фубини о сведении двойного интеграла к повторному и ее следствие о равенстве повторного интеграла двойному.
4. Гладкая (n-1) – мерная поверхность. Интеграл Лебега по (n-1) – мерной поверхности.
5. Линейные нормированные пространства. Понятия полноты, плотности, сепарабельности. Примеры функциональных банаховых пространств.
6. Гильбертово пространство. Ортогональные системы, коэффициенты и ряды Фурье, неравенство Бесселя.
7. Полные системы в гильбертовом пространстве. Изоморфизм и изометрия сепарабельных гильбертовых пространств.
8. Пространства $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$, их полнота. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега и непрерывность его в среднем.
9. Ядро усреднения и его свойства. Срезающая функция для области. Усреднения функций из $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$, их сходимость.
10. Классическая формула интегрирования по частям, ее эквивалентность формуле Гаусса-Остроградского. Определение обобщенной производной первого порядка.
11. Обобщенные производные произвольного порядка, их свойства: единственность, независимость от порядка дифференцирования, линейность операции дифференцирования. Обобщенная производная финитной функции.
12. Обобщенные производные функций $|x|$, $|x_1|$ и $sign(x_1)$ в n – мерном шаре.
13. Гильбертовы пространства $H^k(Q)$ и их простейшие свойства.
14. Обобщенные производные и средние функции. Сходимость усреднений в норме пространства $H^k$.

15. След функции из $H^1(Q)$ на гладкой (n-1) – мерной поверхности. Формула интегрирования по частям для функций из пространства $H^1(Q)$.
16. Теоремы вложения пространств $L_p(Q)$ друг в друга, вложения пространств $H^k(Q)$ в $C^l(\overline{Q})$.
17. Теоремы о продолжении. Плотность пространства гладких функций в пространствах $H^k(Q)$. Пространства $\overset{0}{H}{}^k(Q)$.
18. Эквивалентные нормировки пространств $H^1(Q)$ и $\overset{0}{H}{}^1(Q)$. Неравенство Стеклова В.А.
19. Классические и обобщенные решения краевых задач для линейного эллиптического уравнения второго порядка.
20. Доказательство корректности обобщенной постановки задачи Дирихле, основанное на теореме Рисса.
21. Доказательство корректности обобщенной постановки третьей краевой задачи для линейного эллиптического уравнения второго порядка, основанное на теореме Рисса.
22. Вариационная задача для квадратичного функционала в гильбертовом пространстве. Лемма о минимизирующей последовательности.
23. Последовательность Ритца, ее сходимость к элементу, реализующему минимум квадратичного функционала.
24. Вариационное доказательство разрешимости краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка.
25. Операторное уравнение в гильбертовом пространстве. Энергетическое пространство самосопряженного положительно определенного оператора.
26. Энергетическое пространство эллиптического оператора с граничными условиями Дирихле.
27. Энергетическое пространство эллиптического оператора с граничными условиями второго и третьего рода.
28. Естественные и главные граничные условия. Предельно плотные последовательности подпространств в пространствах $H^1(0;1)$ и $\overset{0}{H}{}^1(0;1)$. Метод конечных элементов.

**Примерные задания к зачету**

**Задача 1.** Докажите, что для любой функции $f(x)$ из пространства С.Л. Соболева $\overset{0}{H}{}^1(Q)$ справедливо неравенство В.А. Стеклова

$$\int_Q f^2(x)dx \le c\int_Q |\nabla f(x)|^2 dx,$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от $f$.

**Задача 2**. Используя теорему Рисса, покажите, что для эллиптического уравнения справедлива

**Теорема.** Если $a(x) \geq 0$ в $Q$ и или $a(x) \not\equiv 0$ в $Q$, или $\sigma(x) \not\equiv 0$ на $\partial Q$, то для любых $f \in L_2(Q)$ и $\varphi \in L_2(\partial Q)$ существует единственное обобщенное решение $u(x)$ задачи

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{i,j}(x)u_{x_j}\right)_{x_i} + a(x)u = f(x), \qquad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x)u\right)\right|_{\partial Q} = \varphi(x).$$

При этом имеет место неравенство

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq c\left(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}\right)$$

в котором постоянная $c > 0$ не зависят от $f$ и $\varphi$.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на зачете;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в форме электронного документа.

**5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

**5.1 Основная литература:**

1. Ильин, А.М. Уравнения математической физики: учебное пособие / А.М. Ильин. — Москва : Физматлит, 2009. — 192 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2181.

2. Петровский, И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений: учебник / И.Г. Петровский ; под ред. Олейник О.А.— Москва: Физматлит, 2009. — 136 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/59553.

3. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики: учебник / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. — Москва : Физматлит, 2000. — 400 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2363.

4. Владимиров, В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики: учебное пособие / В.С. Владимиров, А.А. Вашарин — Москва : Физматлит, 2001. — 288 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2364.

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах «Лань» и «Университетская библиотека ONLINE».

**5.2 Дополнительная литература:**

1. Тихонов, А.Н. Дифференциальные уравнения: учебник / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. — Москва : Физматлит, 2002. — 256 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/48171.

2. Лесин, В. В. Уравнения математической физики: учебное пособие / В. В. Лесин. - М. : КУРС : ИНФРА-М, 2017. - 240 с. - http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=520539.

**6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

1. Электронный каталог Научной библиотеки КубГУ http://megapro.kubsu.ru/MegaPro/Web
2. Электронная библиотечная система "Университетская библиотека ONLINE" http://biblioclub.ru/
3. Электронная библиотечная система издательства "Лань" https://e.lanbook.com/
4. Электронная библиотечная система «Юрайт» http://www.biblio-online.ru
5. Электронная библиотечная система «ZNANIUM. COM» www.znanium.com
6. Электронная библиотечная система «BOOK.ru» https://www.book.ru
7. Электронная библиотечная система eLIBRARY.RU http://www.elibrary.ru

**7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Материал курса изложен в основном в литературных источниках, перечисленных в списке дополнительной литературы по причине их давнего издания. Автором данного курса написан расширенный конспект лекций, иллюстрированный практическими примерами. Электронный вариант этого текста доступен студентам. Изучение указанного текста с разбором примеров и решением приведенных там задач отнесено к самостоятельной работе по данному курсу.

Лекции и лабораторные занятия чередуются. Общение преподавателя и студентов в аудитории предполагает предварительную проработку конспекта студентами самостоятельно. Задача преподавателя состоит в расстановке акцентов и разъяснении смысла и необходимости введения обобщений классических понятий. Для полноценного восприятия новых объектов необходима иллюстрация их практического применения. Такими примерами являются задачи равновесия и движения мембраны, а также задача распространения тепла в трехмерном объеме. Это физические модели, для которых математические модели приводят к интегральным соотношениям, взятым за основу определения обобщенных решений дифференциальных задач. Приведенные примеры физических моделей свидетельствуют о естественности понятия обобщенного решения и о его первичности относительно понятия классического решения. Современные численные методы Ритца и Галеркина решения краевых задач для дифференциальных уравнений основаны на понятии обобщенного решения.

На лабораторных занятиях студентам предлагаются примеры для применения теории, изложенной на лекциях и в упомянутом конспекте. Обсуждение способов решения предлагаемых задач призвано активизировать познавательную деятельность студентов. Этому должна способствовать практическая направленность итоговых результатов

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю) (при необходимости).**

**8.1 Перечень информационных технологий.**

В данном курсе нет необходимости в использовании информационных технологий, кроме редактора Word для чтения электронных пособий. При подготовке курсовых работ, связанных с численными методами решения краевых задач могут, понадобятся языки программирования высокого уровня, а также математические пакеты.

**8.2 Перечень необходимого программного обеспечения.**

Список лицензионного программного обеспечения:

1. Microsoft Office Word Professional Plus.
2. Mathcad PTC Prime 3.0
3. Maple 18
4. MATLAB

Список свободно распространяемого программного обеспечения

1. Free Pascal
2. Lazarus
3. Microsoft Visual Studio Community

**8.3 Перечень необходимых информационных справочных систем.**

1. Электронная библиотечная система eLIBRARY.RU (http://www.elibrary.ru)
2. Электронно-библиотечная система издательства «Лань» (http://e.lanbook.com).
3. Электронная библиотечная система «Университетская библиотека ONLINE» (www.biblioclub.ru).

**9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю).**

| № | Вид работ | Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) и оснащенность |
|---|---|---|
| *1.* | Лекционные занятия | Лекционная аудитория, специально оборудованная мультимедийными демонстрационными комплексами, учебной мебелью |
| *2.* | Лабораторные занятия | Помещение для проведения лабораторных занятий оснащенное учебной мебелью, персональными компьютерами с доступом к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации |
| *3.* | Групповые (индивидуальные) консультации | Помещение для проведения групповых (индивидуальных) консультаций, учебной мебелью, оснащенное презентационной техникой (проектор, экран, ноутбук) и соответствующим программным обеспечением |
| *4.* | Текущий контроль, промежуточная аттестация | Помещение для проведения текущей и промежуточной аттестации, оснащенное учебной мебелью, персональными компьютерами с доступом к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации |
| *5.* | Самостоятельная работа | Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к |

| | | |
|---|---|---|
| | | сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета |