

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Кубанский государственный университет»  
факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ:  
Проректор по учебной работе,  
качеству образования, первый  
проректор

Хагуров Т.А.

«29» мая 2020 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### Б1.О.16 Комплексный анализ

Направление подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Профиль: Алгебра, теория чисел и дискретный анализ;  
Вычислительные, программные, информационные  
системы и компьютерные технологии;  
Математическое и компьютерное моделирование

Форма обучения: очная

Квалификация: бакалавр

Краснодар 2020

Рабочая программа дисциплины Б1.О.16 КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Программу составил:

Мавроди Н.Н., доцент, кандидат физ.-мат. наук \_\_\_\_\_

Рабочая программа дисциплины Б1.О.16 КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ утверждена на заседании кафедры теории функций протокол № 8 «17» марта 2020 г.

Заведующий кафедрой (разработчика) Голуб М.В. \_\_\_\_\_

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры вычислительной математики и информатики протокол № 10 «15» апреля 2020 г.

Заведующий кафедрой (выпускающей) Гайденок С.В. \_\_\_\_\_

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук протокол № 2 «30» апреля 2020 г.

Председатель УМК факультета Шмалько С.П. \_\_\_\_\_

Рецензенты:

Гусаков Валерий Александрович, канд. физ. – мат. наук,  
директор ООО «Просвещение – Юг»

Засядко Ольга Владимировна, доцент кафедры информационных образовательных технологий, канд. физ. - мат. наук, доцент

## **1. Цели и задачи изучения дисциплины.**

### **1.1. Цель дисциплины**

Комплексный анализ – область математического анализа, являющегося частью единой современной математики, предметом изучения которой являются функции одной и нескольких комплексных переменных, свойства которых порождены комплексной структурой их области определения.

В отличие от вещественного анализа, в котором стройная теория развивается лишь для однозначных функций, переход к функциям комплексного переменного позволяет выяснить природу многозначности и построить безупречную теорию многозначных функций.

Комплексный анализ (теория функций комплексного переменного) дает эффективные методы вычисления интегралов и получения асимптотических оценок, новые способы решений дифференциальных уравнений, позволяет изучать специальные векторные поля, встречающиеся в разнообразных приложениях.

Интересные и неожиданные приложения, в частности, в теоретической физике, получила теория функций многих комплексных переменных. Оба направления изучения функций комплексного переменного получили современное название «Комплексный анализ». Отличительной особенностью комплексного анализа является его подлинная комплексность. В нем сочетаются аналитические и геометрические методы, находят новые применения классические подходы и развиваются новые методы, появляются новые приложения. Понятия комплексного анализа служат отправной точкой построения новых абстрактных теорий, объединяющих разные разделы математики и разные прикладные науки.

Главная цель курса – освоение методов исследования функций комплексного переменного и приложений этих методов к решению задач комплексного и вещественного анализа.

### **1.2. Задачи дисциплины**

- обобщить и систематизировать знания о свойствах и особенностях голоморфных (аналитических) функций, их аналитическом продолжении, рядах голоморфных функций, теории интеграла Коши, гармонических функциях, геометрических принципах конформных отображений и возможностях применений этих знаний;
- сформировать навыки построения конформных отображений с помощью элементарных функций и применения принципа симметрии, определения характера особенностей функции, применения теории вычетов к вычислению некоторых типов определенных интегралов.
- научить применять методы комплексного анализа для решения прикладных задач.

### **1.3. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина «Комплексный анализ» относится к базовой части профессионального цикла Б1, являющегося структурным элементом ООП ВО. Дисциплина читается в 4 и 5-м семестрах. Знания, полученные в этом курсе, используются в математическом анализе, функциональном анализе, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнениях, уравнениях математической физики, теории чисел, методах оптимизации и др. Слушатели должны владеть математическими знаниями в рамках разделов программы

учебного курса по математическому анализу.

#### 1.4. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся следующих общепрофессиональных и профессиональных компетенций (ОПК): ОПК-1.

№ п. п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
1.	ОПК-1	способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	основные понятия и теоремы комплексного анализа и способы их применения в других областях знаний	<ul style="list-style-type: none"> <li>• производить арифметические операции над комплексными числами, используя различные формы представления комплексных чисел, их геометрическую интерпретацию;</li> <li>• определять разными способами дифференцируемость в смысле комплексного анализа и голоморфность (аналитичность) комплекснозначных функций двух вещественных переменных;</li> <li>• вычислять значения в точке элементарных функций комплексного переменного;</li> <li>• определять конформность в точке отображения, осуществляемого голоморфной функцией, и применять знания о геометрическом смысле модуля и</li> </ul>	навыками практического использования методов и результатов комплексного анализа при решении различных задач.

				аргумента производной; • решать задачи комплексного анализа, а также применять знания комплексного анализа при решении задач других дисциплин.	
--	--	--	--	--	--

## 2. Структура и содержание дисциплины

### Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 6 зачетные единицы (216 часов, из них – 124,5 ч. контактной работы: лекционных 34 ч., лабораторных 68 ч., КСР 8 ч., ИКР 0,5 ч.; 53,8 ч. СР; 35,7 Контроль).

Вид учебной работы		Всего часов	Семестры (часы)	
			4	5
<b>Контактная работа, в том числе:</b>		<b>124,5</b>	<b>74,2</b>	<b>50,3</b>
<b>Аудиторные занятия (всего):</b>		<b>128</b>	<b>68</b>	<b>50</b>
Занятия лекционного типа		34	34	16
Лабораторные занятия		68	34	34
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)		-	-	-
<b>Иная контактная работа:</b>		<b>8,5</b>	<b>6,2</b>	<b>2,3</b>
Контроль самостоятельной работы (КСР)		8	6	2
Промежуточная аттестация (ИКР)		0,5	0,2	0,3
<b>Самостоятельная работа, в том числе:</b>		<b>53,8</b>	<b>33,8</b>	<b>20</b>
Проработка учебного (теоретического) материала		50	30	20
Подготовка к текущему контролю		3,8	3,8	-
<b>Контроль:</b>		<b>35,7</b>	<b>-</b>	<b>35,7</b>
Подготовка к экзамену		35,7	-	35,7
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>час.</b>	<b>216</b>	<b>108</b>	<b>108</b>
	<b>в том числе контактная работа</b>	<b>124,5</b>	<b>74,2</b>	<b>50,3</b>
	<b>зач. ед</b>	<b>6</b>	<b>3</b>	<b>3</b>

### 2.1 Структура дисциплины:

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины. Разделы дисциплины, изучаемые в IV семестре:

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов			
		Всего	Аудиторная работа		СР
			Л	ЛЗ	
1	2	3	4	5	6
1	Комплексные числа и действия над ними. Геометрия и топология комплексной плоскости.	42	10	12	20
2	Комплексная дифференцируемость. Голоморфные функции и конформные отображения	34	14	10	10
3	Теория интеграла Коши	25,8	10	12	3,8
	<b>Итого:</b>		34	34	33,8

Разделы дисциплины, изучаемые в V семестре:

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов			
		Всего	Аудиторная работа		СР
			Л	ЛЗ	
1	2	3	4	5	6
	Степенные ряды и ряды голоморфных функций	8	2	4	2
1	Ряды Лорана. Изолированные особые точки голоморфных функций.	16	4	6	6
2	Теория вычетов	20	4	14	2
3	Аналитическое продолжение	14	4	2	8
4	Геометрические принципы конформных отображений	12	2	8	2
	<b>Итого:</b>		16	34	20

## 2.2 Содержание разделов дисциплины:

### 2.3.1 Занятия лекционного типа

№ п/п	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
----------	----------------------	--------------------	-------------------------

1	<p>Комплексные числа и действия над ними.</p> <p>Геометрия и топология комплексной плоскости.</p>	<p>Введение. Поле комплексных чисел, операции над комплексными числами (к.ч.).</p> <p>Тригонометрическая форма представления к.ч.. Извлечение корня <math>n</math>-степени из к.ч.</p> <p>Геометрия и топология комплексной плоскости. Стереографическая проекция и ее свойства; сфера Римана, расширенная комплексная плоскость. Открытые, замкнутые, компактные множества на <math>\mathbb{C}</math> и <math>\mathbb{C}_\infty</math>, лемма Гейне-Бореля-Лебега. Понятие связного и линейного связного множества, односвязные и многосвязные области.</p> <p>Кривые на комплексной плоскости.</p>	Опрос
2	<p>Комплексная дифференцируемость.</p> <p>Голоморфные и конформные отображения.</p>	<p>Предел последовательности к.ч., сходимость числовых рядов. Функции комплексного переменного: предел, непрерывность, однолиственность. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. <math>R</math>-дифференцируемые и <math>S</math>-дифференцируемые функции. Сопряженные гармонические функции. Достаточное условие локальной однолиственности голоморфной функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции. Понятие конформного отображения. Критерий конформности отображения. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Степенные функции. Функция <math>z^n</math> и ее риманова поверхность. Отображения двуугольников. Функция Жуковского. Показательная функция. Функция <math>\ln Z</math> и ее риманова поверхность. Общая степенная функция. Выделение однозначной ветви многозначной функции. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Дробнолинейные отображения. Непрерывность, однолиственность и конформность дробно-</p>	Опрос

		<p>линейных отображений. Круговое свойство. Понятие инверсии, свойство сохранения симметричных точек, свойство сохранения сложного (ангармонического) отношения. Дробно-линейные изоморфизмы и автоморфизмы (общий вид дробно-линейного отображения круга на себя и верхней полуплоскости на круг). Гидродинамический смысл комплексной дифференцируемости, гидродинамическое истолкование гармонических и аналитических функций. Примеры приложений.</p>	
3	Теория интеграла Коши	<p>Определение и свойства криволинейного интеграла от функций комплексного переменного. Лемма Гурса. Интегральная теорема Коши для односвязных и многосвязных областей. Первообразная функция, формула Ньютона-Лейбница, другое определение логарифмической функции. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем значении. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций, формулы Коши для производных. Теорема Морера. Принцип максимума модуля.</p>	Опрос



4	Степенные ряды и ряды голоморфных функций	<p>Последовательности и ряды голоморфных функций в области, 1-я и 2-я теоремы Вейерштрасса. Степенные ряды, теорема Абеля, радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Ряды Тейлора. Теорема Тейлора, единственность разложения голоморфной функции в степенной ряд. Неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда и теорема Лиувилля. Нули голоморфной функции. Внутренняя теорема единственности для голоморфных функций. Ряд Лорана, область его сходимости. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана (теорема Лорана), единственность разложения). Формулы и неравенства Коши для коэффициентов. Изолированные особые точки однозначного характера; классификация изолированных особых точек однозначного характера по поведению функции и ряду Лорана; полюс, порядок полюса; существенная особая точка, теорема Сохоцкого-Вейерштрасса, понятие о теореме Пикара; бесконечно удаленная точка как особая. Целые функции, их порядок и тип; мероморфные функции, функции, мероморфные в расширенной плоскости. Понятие о теореме Миттаг-Леффлера.</p>	Коллоквиум
5	Теория вычетов	<p>Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Приемы вычисления вычетов. Теорема о полной сумме вычетов. Применение вычетов к вычислению определенных и несобственных интегралов. Лемма Жордана. Интегралы в смысле главного значения. Логарифмические вычеты в нулях и полюсах. Принцип аргумента. Теорема Руше и основная теорема алгебры. Теорема Гурвица. Коллоквиум.</p>	Опрос
6	Аналитическое продолжение	<p>Аналитический элемент, аналитическое продолжение по цепи областей. Канонический аналитический элемент, аналитическое продолжение по кривой. Понятие полной аналитической функции, ветвь полной аналитической функции, теорема о монодромии (формулировка). Риманова поверхность полной аналитической функции и ее особые точки. Принцип непрерывности. Принцип симметрии Римана – Шварца. Построение конформных отображений с применением принципа симметрии.</p>	Опрос, реферат

7	Геометрические принципы конформных отображений	<p>Отображения посредством голоморфных функций: принцип открытости и принцип области; теорема о локальном обращении; однолистные функции, критерий локальной однолистности и критерий конформности в точке, достаточное условие однолистности (принцип взаимнооднозначного соответствия). Конформно эквивалентные области на плоскости. Теорема Римана (формулировка). Понятие о соответствии границ при конформном отображении. Отображение верхней полуплоскости на многоугольник. Формула Кристоффеля-Шварца. Свойства гармонических функций: бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем, теорема единственности и принцип максимума-минимума; инвариантность гармоничности при голоморфной замене переменных; теорема Лиувилля и теорема Харнака об устранимой особой точке; интегралы Пуассона и Шварца; разложение гармонических функций в ряды, связь с тригонометрическими рядами; задача Дирихле, применение конформных отображений для ее решения.</p>	Опрос
---	--	---	-------

### 2.3.2 Занятия семинарского типа.

Занятия семинарского типа – не предусмотрены.

### 2.3.3 Лабораторные занятия.

№	Наименование лабораторных работ	Форма текущего контроля
1	2	3
1	Комплексные числа и действия над ними. Геометрия и топология комплексной плоскости.	Решение задач
2	Комплексная дифференцируемость. Голоморфные и конформные отображения.	Решение задач
3	Теория интеграла Коши	Решение задач
4	Степенные ряды и ряды голоморфных функций	Решение задач
5	Теория вычетов	Решение задач
6	Аналитическое продолжение	Решение задач
7	Геометрические принципы конформных отображений	Решение задач

**2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)** Курсовые работы – не предусмотрены.

## 2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
1	Комплексные числа и действия над ними. Геометрия и топология комплексной плоскости.	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. (см. <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322</a> ) Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1, Лань, 2010.336 с. Волковысский И.М., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 312 с. (см. <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=2763">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=2763</a> ).
2	Комплексная дифференцируемость. Голоморфные и конформные отображения.	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. (см. <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322</a> ) Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1, Лань, 2010.336 с. Волковысский И.М., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 312 с. (см. <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=2763">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=2763</a> ).
3	Теория интеграла Коши	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. (см. <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322</a> ) Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1, Лань, 2010.336 с. Волковысский И.М., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 312 с. (см. <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=2763">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=2763</a> ).
4	Степенные ряды и ряды голоморфных функций	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. (см. <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322</a> ) Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1, Лань, 2010.336 с. Волковысский И.М., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 312 с. (см. <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=2763">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=2763</a> ).
5	Теория вычетов	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. (см. <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322</a> ) Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1, Лань, 2010.336 с. Волковысский И.М., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 312 с.

	(см. <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=2763">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=2763</a> ).
6 Аналитическое продолжение	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. (см. <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322</a> ) Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1, Лань , 2010.336 с. Волковысский И.М., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 312 с. (см. <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=2763">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=2763</a> ).
7 Геометрические принципы конформных отображений	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. (см. <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=322</a> ) Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1, Лань , 2010.336 с. Волковысский И.М., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 312 с. (см. <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=2763">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=2763</a> ).

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

– в печатной форме увеличенным шрифтом, – в форме электронного документа, Для лиц с нарушениями слуха:

– в печатной форме,  
– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в печатной форме,  
– в форме электронного документа,

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

### 3. Образовательные технологии:

. Активные и интерактивные формы, лекции, практические занятия, блиц - опросы, контрольные работы, коллоквиумы, зачёты. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому практическому занятию. Зачёт выставляется после отчёта по всем пройденным темам как минимум на «удовлетворительно».

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

В семестре студенты должны выполнить типовые индивидуальные задания (ИЗ) для самостоятельной работы по темам: «Дифференцирование и интегрирование функции комплексного переменного», «Теория вычетов и ее применение». Зачет выставляется после решения всех задач контрольных работ и выполнения самостоятельной работы. Итоговый контроль осуществляется в форме экзамена

Интерактивные методы включают: метод презентации, дискуссии, метод текущего контроля, метод тестирования и др.

#### **Вопросы, вынесенные на дискуссию**

1. Проверка существенности условий теорем (по усмотрению лектора).
2. Самостоятельное доказательство теорем с данной формулировкой и планом доказательства (по усмотрению лектора)
3. Составление плана и поиск решения задачи.
4. Решение задач различными способами.
5. Взаимная и самопроверка знаний и обсуждение полученных результатов.
6. Самостоятельное составление задач по указанной теме.

Интерактивные методы включают: метод презентации, дискуссии, метод текущего контроля, метод тестирования и др.

Студентам предлагаются несколько тем для подготовки рефератов по разделам, выделенным для самостоятельного изучения. Например: «Гидродинамический смысл комплексной дифференцируемости, гидродинамическое истолкование гармонических и аналитических функций»

#### **4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

Текущий контроль осуществляется преподавателем, ведущим практические занятия на основе выполнения студентами домашних заданий и лабораторного практикума. В течение каждого семестра проводятся контрольные работы и теоретический коллоквиум. Итоговый контроль осуществляется в форме экзамена.

Контрольные, коллоквиумы оцениваются по пятибалльной системе. Экзамены оцениваются по системе: неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично. На лабораторных занятиях контроль осуществляется при ответе у доски и при проверке домашних заданий.

#### **Перечень примерных контрольных вопросов и задач для самостоятельной работы.**

##### *Примерные задачи для контрольных работ*

##### *Контрольная работа №1*

1. Доказать, что у функции  $f(z) = 1/z$  в кольце  $K = \{\frac{1}{2} < |z| < 1\}$  нет первообразной.

2. Доказать, что если функция  $f(z)$  голоморфна в точке  $z = 0$  и  $f(z) \equiv f(2z)$ , то  $f = \text{const}$  (в окрестности нуля).

3. Какой наименьший порядок  $n$  имеет линейное однородное (аналитическое) дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(z)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(z)y' + a_n(z)y = 0,$$

имеющее одним из своих решений функцию  $y = f(z)$ , если

а)  $f(z) = \sin z$ , б)  $f(z) = \ln z$ , в)  $f(z) = \ln z + \sqrt{z}$ ?

5. Пусть  $f$  голоморфна в круге  $\{|z| < R\}$ ,  $R > 1$ , докажите, что среднее значение его квадрата модуля по окружности  $\{|z| = 1\}$  равно

### Контрольная работа №2

1. Доказать, что у функции  $f(z) = 1/z$  в кольце  $K = \{\frac{1}{2} < |z| < 1\}$  нет первообразной.
2. Доказать, что если функция  $f(z)$  голоморфна в точке  $z = 0$  и  $f(z) \equiv f(2z)$ , то  $f = \text{const}$  (в окрестности нуля).
3. Какой наименьший порядок  $n$  имеет линейное однородное (аналитическое) дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(z)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(z)y' + a_n(z)y = 0,$$

имеющее одним из своих решений функцию  $y = f(z)$ , если

а)  $f(z) = \sin z$ ,   б)  $f(z) = \ln z$ ,   в)  $f(z) = \ln z + \sqrt{z}$ ?

5. Пусть  $f$  голоморфна в круге  $\{|z| < R\}$ ,  $R > 1$ , докажите, что среднее значение его квадрата модуля по окружности  $\{|z| = 1\}$  равно сумме квадратов модулей коэффициентов ряда Тейлора с центром  $z = 0$ .
6. Докажите, что для любого многочлена  $P(z)$  все корни его производной  $P'(z)$  принадлежат выпуклой оболочке корней многочлена  $P(z)$ .

## 4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

### Вопросы к коллоквиуму

#### I. Определения и формулировки теорем. 1.

Функция, дифференцируемая в смысле комплексного анализа, и функция, голоморфная в точке.

2. Условия Коши-Римана
3. Геометрический смысл модуля и аргумента производной
4. Понятие конформного отображения, достаточное условие конформности.
5. Теорема Коши для односвязной области.
6. Теорема Коши для многосвязной области.
7. Интегральная формула Коши.
8. Интеграл типа Коши.
9. Определение гармонической функции.
10. Определение инверсии. 11. Теорема о среднем
12. Теорема Морера.

13. Принцип максимума модуля.
14. Первая теорема Вейерштрасса.
15. Вторая теорема Вейерштрасса
16. Теорема Абеля
17. Формула Коши Адамара
18. Внутренняя теорема единственности
19. Классификация изолированных особых точек
20. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса
21. Определение вычета в конечной изолированной особой точке и в  $\infty$ .

## *II. Доказательства утверждений 1.*

Теорема Коши для односвязной области (доказательство Э.Гурса).

2. Теорема о существовании первообразной.
3. Интегральная формула Коши.
4. Теорема о среднем.
5. Дифференцируемость интеграла типа Коши.
6. Теорема Морера.
7. Принцип максимума модуля.
8. Теорема Абеля.
9. Теорема Тейлора.
10. Неравенства Коши и теорема Лиувилля.
11. Теорема Тейлора.
12. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса
13. Выражение вычета через коэффициент разложения в ряд Лоран в конечной точке и в бесконечности.
14. Теорема Коши о вычетах.
15. Теорема о полной сумме вычетов.
16. Лемма Жордана.
17. Круговое свойство дробно-линейных отображений. 18. Свойство сохранения симметричных точек для дробно-линейных отображений.

## **Вопросы к экзамену**

1. Комплексные числа и действия над ними. Тригонометрическая и показательная форма представления комплексных чисел. Формула Муавра. Извлечение  $n$ -й степени.
2. Расширенная комплексная плоскость. Стереографическая проекция и ее свойства.
3. Топология комплексной плоскости. Понятие открытого, замкнутого, связного множества. Область, порядок связности.
4. Пути и кривые. Предел и непрерывность функций комплексного переменного.
5. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.
6. Функции, дифференцируемые в смысле вещественного и комплексного анализа. Формальные производные. Понятие голоморфной функции.
7. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.
8. Понятие конформного отображения. Достаточный признак конформности отображения.

9. Гармонические функции, восстановление голоморфной функции по ее вещественной части.
10. Дробно-линейные отображения, их конформность в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  и круговое свойство.
11. Понятие инверсии, ее свойства. Свойство сохранения симметричных точек при дробно-линейных отображениях.
12. Построение дробно-линейного отображения по заданному соответствию трех пар точек, свойство сохранения сложного (ангармонического) отношения.
13. Дробно-линейные изоморфизмы верхней полуплоскости на единичный круг и автоморфизмы единичного круга.
14. Свойства функции  $Z^n$ .
15. Функция Жуковского.
16. Показательная функция.
17. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства.
18. Интегральная теорема Коши для односвязной области (доказательство с помощью формулы Грина).
19. Лемма Гурса.
20. Интегральная теорема Коши для односвязной области (доказательство Э. Гурса).
21. Интегральная теорема Коши для многосвязной области.
22. Теорема о существовании первообразной.
23. Интегральная формула Коши и теорема о среднем.
24. Интеграл типа Коши.
25. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций, интегральная формула Коши для производных, теорема Морера.
26. Принцип максимума модуля.
27. Сходимость и равномерная сходимость функциональных рядов. Свойства равномерно сходящихся рядов, признак Вейерштрасса.
28. Первая теорема Вейерштрасса.
29. Вторая теорема Вейерштрасса.
30. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда.
31. Признак Коши сходимости числового ряда. Формула Коши – Адамара.
32. Теорема Тэйлора.
33. Неравенства Коши и теорема Лиувилля.
34. Внутренняя теорема единственности для голоморфных функций.
35. Нули голоморфной функции.
36. Ряд Лорана. Теорема Лорана.
37. Теорема об единственности разложения в ряд Лорана, неравенства Коши для коэффициентов.
38. Классификация изолированных особых точек, критерий устранимости особой точки.
39. Полюсы голоморфной функции, порядок полюса, связь между нулями и полюсами.
40. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса.
41. Целые и мероморфные функции. Представление мероморфной функции, имеющей конечное число полюсов.
42. Вычеты. Выражение вычета через коэффициент разложения в ряд Лорана. Вычисление вычета в случае полюсов разной кратности.
43. Теорема Коши о вычетах.



44. Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов.
45. Лемма Жордана и ее применение.
46. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов.
47. Несобственный интеграл в смысле главного значения. Вычисления в случае простых полюсов. Пример.
48. Логарифмический вычет в нулях и полюсах. Теорема о полной сумме логарифмических вычетов функции, мероморфной в области.
49. Принцип аргумента.
50. Теорема Руше и основная теорема алгебры.
51. Принцип сохранения области.
52. Достаточное условие локальной однолиственности и необходимое условие однолиственности голоморфной функции.
53. Аналитический элемент, аналитическое продолжение по цепи областей. Канонический аналитический элемент, аналитическое продолжение по кривой.
54. Понятие полной аналитической функции, ветвь полной аналитической функции, теорема о монодромии (формулировка). Риманова поверхность полной аналитической функции.
55. Принцип непрерывности.
56. Принцип симметрии Римана-Шварца.
57. Конформно эквивалентные области на плоскости. Теорема Римана (формулировка). Соответствие границ при конформном отображении.
58. Принцип взаимно-однозначного соответствия.
59. Отображение верхней полуплоскости на многоугольник. Формула Кристоффеля-Шварца.

## **5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:**

### **5.1 Основная литература:**

1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с.  
(см. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_cid=25&pl1\\_id=322](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=322))
2. Волковвысский И.М., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 312 с.  
(см. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_cid=25&pl1\\_id=2763](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=2763)).

### **5.2 Дополнительная литература:**

1. Шабунин, М.И. Теория функций комплексного переменного [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.И. Шабунин, Ю.В. Сидоров. — Электрон. дан. — Москва : Издательство "Лаборатория знаний", 2016. — 303 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/84089>
2. Волковвысский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.И. Волковвысский, Г.Л.

Луниц, И.Г. Араманович. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2006. — 312 с.  
— Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2763>

### 5.3. Периодические издания:

- 1) Вестник МГУ. Серия: Математика. Механика;
- 2) Вестник СПбГУ. Серия: Математика. Механика. Астрономия;
- 3) Известия ВУЗов. Серия: Математика;
- 4) Известия РАН (до 1993 г. Известия АН СССР). Серия: Математическая;
- 5) Математика. Реферативный журнал. ВИНТИ; 6) Математические заметки;
- 7) Математический сборник.

(перечисленные издания хранятся в фонде библиотеки КубГУ)

### 6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

1. ЭБС "Университетская библиотека ONLINE" – <http://biblioclub.ru/>
2. Электронная библиотечная система издательства "Лань" – <http://e.lanbook.com/>
3. Электронная библиотечная система "Юрайт" – <http://www.biblio-online.ru/>
4. Scopus – база данных рефератов и цитирования – <http://www.scopus.com/>
5. Web of Science (WoS) – [http://apps.webofknowledge.com/WOS\\_GeneralSearch\\_input.do?product=WOS&search\\_mode=GeneralSearch&SID=V2yRRW6FP9RssAaul78&preferencesSaved](http://apps.webofknowledge.com/WOS_GeneralSearch_input.do?product=WOS&search_mode=GeneralSearch&SID=V2yRRW6FP9RssAaul78&preferencesSaved)
6. Научная электронная библиотека (НЭБ) – <http://www.elibrary.ru/>
7. Архив научных журналов – <http://archive.neicon.ru/>
8. Электронная Библиотека Диссертаций – <https://dvs.rsl.ru/>
9. Национальная электронная библиотека – <http://нэб.рф/>
10. База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций – <http://infoneeds.kubsu.ru/>

### 7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины .

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной систематизированный материал и поднимаются проблемные вопросы; практических занятий, на которых широко используются активные и интерактивные образовательные технологии; лабораторных, в процессе проведения которых обучающиеся отработывают навыки решения конкретных научных задач.

Важнейшими составляющими курса являются такие виды занятий, как самостоятельная работа студентов, такая как разбор лекций, работа с литературой, отработка навыков решения практических задач, подготовка реферата. В процессе самостоятельной работы обучающимися активно используются информационные справочные системы.

Текущий контроль осуществляется преподавателем, ведущим практические занятия на основе дискуссии с студентами, дающей представление о динамике роста знаний студентов и их научном потенциале; учета активности студента на занятиях и оценке выступления обучающегося при изложении реферата. Контроль также осуществляется путем проведения контрольных работ. Итоговый контроль осуществляется в форме зачета в 4 семестре и экзамена – в 5.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.**

### **8.1 Перечень информационных технологий**

- Сбор, хранение, систематизация и выдача учебной и научной информации;
- Обработка текстовой, графической и эмпирической информации;
- Подготовка, конструирование и презентация итогов исследовательской и аналитической деятельности;
- Использование электронных презентаций при проведении практических занятий;
- Работа с информационными справочными системами;
- Использование электронной почты преподавателей и обучающихся для рассылки, переписки и обсуждения возникших учебных проблем.

### **8.2 Перечень необходимого программного обеспечения – Офисный пакет приложений Microsoft Office.**

### **8.3 Перечень необходимых информационных справочных систем**

- Электронные ресурсы библиотеки КубГУ – <https://kubsu.ru/node/1145> (см. п. 6)
- Могут использоваться иные информационно-поисковые системы сети Интернет.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) и оснащенность
1.	Лекционные занятия	Лекционная аудитория, специально оборудованная мультимедийными демонстрационными комплексами, учебной мебелью
2.	Лабораторные занятия	Помещение для проведения лабораторных занятий оснащенное учебной мебелью, доской маркером или мелом
3.	Групповые (индивидуальные) консультации	Помещение для проведения групповых (индивидуальных) консультаций, учебной мебелью, доской маркером или мелом

4.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Помещение для проведения текущей и промежуточной аттестации, оснащенное учебной мебелью.
5.	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета

**Рецензия**  
на рабочую программу дисциплины  
**«Комплексный анализ»**  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки,  
очной формы обучения.  
Составитель рабочей программы:  
доцент каф. теории функций ФГБОУ ВО «КубГУ» Мавроди Н.Н.

Рабочая программа полностью соответствует требованиям ФГОС ВО по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки (уровень бакалавриата).

Все основные разделы программы нашли свое отражение в перечне представленных в программе необходимых знаний и компетенций.

Распределение времени, отводимого на изучение различных разделов курса, включая самостоятельную работу, соответствует их трудоемкости.

Содержащийся перечень и количество практических занятий достаточен для формирования уровня подготовки, определенного требованиями ФГОС.

Перечень тем и разделов, которые должны изучить слушатели, а также основные требования к уровню подготовки слушателей объему знаний и умений, которым они должны обладать по каждой из перечисленных тем.

Информация о видах и объеме учебной работы содержит тематику лекционных занятий и лабораторных работ, призванных сформировать у студентов базовые знания и формирование основных навыков по комплексному анализу, необходимых для решения задач, возникающих в практической деятельности.

Самостоятельные задания развивают знания, умения и навыки, полученные в результате изучения предмета.

Рабочая программа дисциплины позволяет усвоить связи между различными разделами и теоремами комплексного анализа, а также способствует развитию и углублению межпредметных связей между изучением данного курса и прохождением других дисциплин естественнонаучного цикла.

Рабочая программа дисциплины «Комплексный анализ» способствует приобретению и развитию умений и навыков для решения профессиональных задач методами комплексного анализа, формированию компетентного специалиста.

Рецензент,  
Гусаков В.А.,  
канд. физ. – мат. наук,  
директор ООО «Просвещение–Юг».

