Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кубанский государственный университет»
факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе,
качеству образования – первый
проректор
__________ Хагуров Т.А.

«29» мая 2020 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.22 Комплексный анализ

Направление подготовки: 01.03.01 Математика

Направленность (профиль): Преподавание математики и информатики;
Математическое моделирование

Форма обучения: очная

Квалификация: бакалавр

Краснодар 2020

Рабочая программа дисциплины Б1.О.22 КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 01.03.01 Математика

Программу составил:

Левицкий Б.Е., доцент, кандидат физ.-мат. наук ____________

Рабочая программа дисциплины Б1.О.22 КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ утверждена на заседании кафедры теории функций
протокол № 8 «17» марта 2020 г.

Заведующий кафедрой теории функций Голуб М.В. ________________

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры теории функций протокол № 8 «17» марта 2020 г.

Заведующий кафедрой теории функций Голуб М.В ______________

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук
протокол № 2 «30» апреля 2020 г.

Председатель УМК факультета Шмалько С.П. ________________

Рецензенты:

Гусаков Валерий Александрович, канд. физ. – мат. наук,
директор ООО «Просвещение – Юг»

Засядко Ольга Владимировна, доцент кафедры информационных образовательных технологий, канд. физ. - мат. наук, доцент

1. Цели и задачи изучения дисциплины.

1.1. Цель дисциплины

Комплексный анализ – область математического анализа, являющегося частью единой современной математики, предметом изучения которой являются функции одной и нескольких комплексных переменных, свойства которых порождены комплексной структурой их области определения.

В отличие от вещественного анализа, в котором стройная теория развивается лишь для однозначных функций, переход к функциям комплексного переменного позволяет выяснить природу многозначности и построить безупречную теорию многозначных функций.

Комплексный анализ (теория функций комплексного переменного) дает эффективные методы вычисления интегралов и получения асимптотических оценок, новые способы решений дифференциальных уравнений, позволяет изучать специальные векторные поля, встречающиеся в разнообразных приложениях.

Интересные и неожиданные приложения, в частности, в теоретической физике, получила теория функций многих комплексных переменных. Оба направления изучения функций комплексного переменного получили современное название «Комплексный анализ». Отличительной особенностью комплексного анализа является его подлинная комплексность. В нем сочетаются аналитические и геометрические методы, находят новые применения классические подходы и развиваются новые методы, появляются новые приложения. Понятия комплексного анализа служат отправной точкой построения новых абстрактных теорий, объединяющих разные разделы математики и разные прикладные науки.

Главная цель курса – освоение методов исследования функций комплексного переменного и приложений этих методов к решению задач комплексного и вещественного анализа.

1.2. Задачи дисциплины

- обобщить и систематизировать знания о свойствах и особенностях голоморфных (аналитических) функций, их аналитическом продолжении, рядах голоморфных функций, теории интеграла Коши, гармонических функциях, геометрических принципах конформных отображений и возможностях применений этих знаний;
- сформировать навыки построения конформных отображений с помощью элементарных функций и применения принципа симметрии, определения характера особенностей функции, применения теории вычетов к вычислению некоторых типов определенных интегралов.
- научить применять методы комплексного анализа для решения прикладных задач.

1.3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Комплексный анализ» относится к базовой части профессионального цикла Б1, являющегося структурным элементом ООП ВПО. Дисциплина читается в 4 и 5-м семестрах. Знания, полученные в этом курсе, используются в математическом анализе, функциональном анализе, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнениях, уравнениях математической физики, теории чисел, методах оптимизации и др. Слушатели должны владеть математическими знаниями в рамках разделов программы учебного курса по математическому анализу, которые изучаются 1 – 4 семестрах для направлений подготовки 01.03.01 – Математика.

1.4. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесен-

ных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций: ОПК-1, ПК-1.

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	**уметь**	**владеть**
1.	ОПК-1	способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	основные понятия и теоремы комплексного анализа и способы их применения в других областях знаний	• производить арифметические операции над комплексными числами, используя различные формы представления комплексных чисел, их геометрическую интерпретацию; • определять разными способами дифференцируемость в смысле комплексного анализа и голоморфность (аналитичность) комплекснозначных функций двух вещественных переменных; • вычислять значения в точке элементарных функций комплексного переменного; • определять конформность в точке отображения, осуществляемого голоморфной функцией, и применять знания о геометрическом смысле модуля и аргумента производной; • решать задачи комплексного анализа, а также применять знания комплексного анализа при решении задач других дисциплин.	навыками практического использования методов и результатов комплексного анализа при решении различных задач.
2.	ПК-1	способен решать актуальные и важные задачи фундаментальной и прикладной математики	• Различные формы представления комплексных чисел, определения и свойства операций над ними, их геометрическую интерпретацию, основные понятия топологии комплексной плоскости.	• использовать аналитическое представление и геометрические свойства отображений, осуществляемых элементарными функциями комплексного переменного, для построения конформных отображений и отыскания образа области при заданном конформном отображении;	навыками корректной и адекватной постановки задач используя методы комплексного анализа

№ п.п.	Индекс компе-тенции	Содержание компетен-ции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	**уметь**	**владеть**
			• Эквивалентные определения поня-тия голоморфности функции ком-плексного пере-менного. • Понятие кон-формного отобра-жения, геометри-ческий смысл мо-дуля и аргумента производной голо-морфной функции. • Определения и геометрические свойства элемен-тарных функций комплексного пе-ременного. • Интегральную теорему Коши для односвязной и многосвязной об-ласти, интеграль-ную формулу Ко-ши. • Определение и свойства интеграла типа Коши. • Свойства степен-ных рядов и рав-номерно сходя-щихся рядов голо-морфных функций. • Внутреннюю тео-рему единственно-сти и принцип максимума модуля для голо-морфных функций. • Разные способы классификации изолированных особых точек го-ломорфных функ-ций. • Характер поведе-ния функции в	• осуществлять элемен-тарные геометрические преобразования на плос-кости с использованием дробно-линейных отобра-жений; • вычислять криволиней-ные интегралы от функ-ций комплексного пере-менного; • восстанавливать голо-морфную функцию по ее вещественной или мнимой части; • находить коэффи-циенты разложения в ряд Тэйлора голоморфных функций и ради-ус сходи-мости степенного ряда; • находить коэффициенты разложения в ряд Лорана функций, голоморфных в коль-це, и, в частности, в окрестности изолирован-ной особой точки (м.б. бесконечно удаленной); • использовать приемы разложения в ряд Лорана голомофных функций для разло-жения в ряд Фурье функций вещественного переменного; • определять разными способами характер изо-лированной особой точки голоморф-ной функции, определять порядок нуля и порядок полюса; • разными методами вы-числять вычеты голо-морфных функций в изо-лированных особых точ-ках; • находить значения кри-волинейных интегралов с помощью вычетов; • вычислять некоторые типы определенных (в том	

№ п.п.	Индекс компе-тенции	Содержание компетен-ции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	**уметь**	**владеть**
			окрестности суще-ственно особой точки (теорему Сохоцкого – Вей-ерштрасса). • Понятие вычета и способы примене-ния вычетов для вычисления криво-линейных и несоб-ственных интегра-лов. • Принцип аргу-мента и теорему Руше. • Понятие аналити-ческого продолже-ния по цепи обла-стей и вдоль кри-вой, понятие пол-ной аналитической функции и ветви аналитической функции, понятие римановой поверх-ности полной ана-литической функ-ции. • Теорема о моно-дромии. • Принцип симмет-рии Римана – Шварца. • Геометрические принципы кон-формных отобра-жений (принцип сохранения обла-сти, принцип вза-имно-однозначного соответствия, тео-рема Римана, принцип граничного соответствия). • Понятие гармони-ческой функции, свойства гармони-ческих функций,	числе несобственных) ин-тегра-лов с помощью вы-четов; • применять принцип ар-гумента и теорему Руше для определения соотно-шения между нулями и полюсами функции в об-ласти; • применять принцип симметрии для построе-ния конформных отобра-жений; • определять однозначные ветви многозначной функции и строить рима-нову поверхность много-значной функции. • применять конформные отображения для решения задачи Дирихле.	

№ п.п.	Индекс компе-тенции	Содержание компетен-ции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	**уметь**	**владеть**
			интегралы Пуассона и Шварца, применение конформных отображений для решения задачи Дирихле.		

2. Структура и содержание дисциплины

2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц (216 часов, из них – 146,5 ч. контактной работы: лекционных 68 ч., лабораторных 68 ч., 10 ч. КСР, 0,5 ч. ИКР; 33,8 ч. СРС; 35,7 ч. контроля).

Вид учебной работы		Всего часов	Семестры (часы)	
			4	5
Контактная работа, в том числе:		**146,5**	**76,2**	**70,3**
Аудиторные занятия (всего):		**136**	**68**	**68**
Занятия лекционного типа		68	34	34
Лабораторные занятия		68	34	34
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)		-	-	-
Иная контактная работа:		**10,5**	**8,2**	**2,3**
Контроль самостоятельной работы (КСР)		10	8	2
Промежуточная аттестация (ИКР)		0,5	0,2	0,3
Самостоятельная работа, в том числе:		**33,8**	**31,8**	**2**
Подготовка домашнего задания		22	20	2
Подготовка к текущему контролю		11,8	11,8	-
Контроль:		**35,7**	**-**	**35,7**
Подготовка к экзамену		35,7	-	35,7
Общая трудоемкость	**час.**	**216**	**108**	**108**
	в том числе контактная работа	**146,5**	**76,2**	**70,3**
	зач. ед	**6**	**3**	**3**

2.2 Структура дисциплины:

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы дисциплины, изучаемые в IV семестре:

№ раз-дела	**Наименование разделов**	**Количество часов**			
		Всего	**Аудиторная работа**		**СРС**
			Л	**Лаб**	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

1	Комплексные числа и действия над ними. Геометрия и топология комплексной плоскости.	34	8	10	6
2	Комплексная дифференцируемость. Голоморфные функции и конформные отображения	20	8	8	4
3	Теория интеграла Коши	33,8	10	12	11,8
4	Степенные ряды и ряды голоморфных функций	22	8	4	10
	Итого:		34	34	31,8

Практические занятия не предусмотрены.

Разделы дисциплины, изучаемые в V семестре:

№ раздела	**Наименование разделов**	**Количество часов**			
		Всего	**Аудиторная работа**		**СРС**
			Л	**Лаб**	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	Ряды Лорана. Изолированные особые точки голоморфных функций.	16	8	8	-
2	Теория вычетов	26	10	16	-
3	Аналитическое продолжение	10	8	2	-
4	Геометрические принципы конформных отображений	18	8	8	2
	Итого:		34	34	2

Практические занятия не предусмотрены.

2.3 Содержание разделов дисциплины:

2.3.1 Занятия лекционного типа

№ п/п	**Наименование раздела**	**Содержание раздела**	**Форма текущего контроля**
1	Комплексные числа и действия над ними. Геометрия и топология комплексной плоскости.	Введение. Поле комплексных чисел, операции над комплексными числами (к.ч.). Тригонометрическая форма представления к.ч.. Извлечение корня n-степени из к.ч. Геометрия и топология комплексной плоскости. Стереографическая проекция и ее свойства; сфера Римана, расширенная комплексная плоскость. Открытые, замкнутые, компактные множества на C и C, лемма Гейне-Бореля-Лебега. Понятие связного и линейного связного множества, односвязные и многосвязные области. Кривые на комплексной плоскости.	Коллоквиум
2	Комплексная дифференцируемость. Голоморфные функции и конформные отображения.	Предел последовательности к.ч., сходимость числовых рядов. Функции комплексного переменного: предел, непрерывность, однолистность. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. R-	Коллоквиум

		дифференцируемые и C-дифференцируемые функции. Сопряженные гармонические функции. Достаточное условие локальной однолистности голоморфной функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции. Понятие конформного отображения. Критерий конформности отображения. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Степенные функции. Функция $\sqrt[n]{z}$ и ее риманова поверхность. Отображения двуугольников. Функция Жуковского. Показательная функция. Функция Ln Z и ее риманова поверхность. Общая степенная функция. Выделение однозначной ветви многозначной функции. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Дробно-линейные отображения. Непрерывность, однолистность и конформность дробно-линейных отображений. Круговое свойство. Понятие инверсии, свойство сохранения симметричных точек, свойство сохранения сложного (ангармонического) отношения. Дробно-линейные изоморфизмы и автоморфизмы (общий вид дробно-линейного отображения круга на себя и верхней полуплоскости на круг). Гидродинамический смысл комплексной дифференцируемости, гидродинамическое истолкование гармонических и аналитических функций. Примеры приложений.	
3	Теория интеграла Коши	Определение и свойства криволинейного интеграла от функций комплексного переменного. Лемма Гурса. Интегральная теорема Коши для односвязных и многосвязных областей. Первообразная функция, формула Ньютона-Лейбница, другое определение логарифмической функции. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем значении. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций, формулы Коши для производных. Теорема Морера. Принцип максимума модуля.	Коллоквиум
4	Степенные ряды и ряды голоморфных функций	Последовательности и ряды голоморфных функций в области, 1-я и 2-я теоремы Вейерштрасса. Степенные ряды, теорема Абеля, радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Ряды Тейлора. Теорема Тейлора, единственность разложения голоморфной функции в степенной ряд. Неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда и теорема Ли-	Коллоквиум

		увилля. Нули голоморфной функции. Внутренняя теорема единственности для голоморфных функций. Ряд Лорана, область его сходимости. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана (теорема Лорана), единственность разложения). Формулы и неравенства Коши для коэффициентов. Изолированные особые точки однозначного характера; классификация изолированных особых точек однозначного характера по поведению функции и ряду Лорана; полюс, порядок полюса; существенная особая точка, теорема Сохоцкого-Вейерштрасса, понятие о теореме Пикара; бесконечно удаленная точка как особая. Целые функции, их порядок и тип; мероморфные функции, функции, мероморфные в расширенной плоскости. Понятие о теореме Миттаг-Лефлера.	
5	Теория вычетов	Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Приемы вычисления вычетов. Теорема о полной сумме вычетов. Применение вычетов к вычислению определенных и несобственных интегралов. Лемма Жордана. Интегралы в смысле главного значения. Логарифмические вычеты в нулях и полюсах. Принцип аргумента. Теорема Руше и основная теорема алгебры. Теорема Гурвица. Коллоквиум.	Коллоквиум
6	Аналитическое продолжение	Аналитический элемент, аналитическое продолжение по цепи областей. Канонический аналитический элемент, аналитическое продолжение по кривой. Понятие полной аналитической функции, ветвь полной аналитической функции, теорема о монодромии (формулировка). Риманова поверхность полной аналитической функции и ее особые точки. Принцип непрерывности. Принцип симметрии Римана – Шварца. Построение конформных отображений с применением принципа симметрии.	Рефераты по теме, обсуждение на практических занятиях.
7	Геометрические принципы конформных отображений	Отображения посредством голомофных функций: принцип открытости и принцип области; теорема о локальном обращении; однолистные функции, критерий локальной однолистности и критерий конформности в точке, достаточное условие однолистности (принцип взаимнооднозначного соответствия). Конформно эквивалентные области на плоскости. Теорема Римана (формулировка). Понятие о соответствии границ при конформном отображении. Отображение верхней полуплоскости на многоугольник.	Проверка домашних заданий

		Формула Кристоффеля-Шварца. Свойства гармонических функций: бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем, теорема единственности и принцип максимума-минимума; инвариантность гармоничности при голоморфной замене переменных; теорема Лиувилля и теорема Харнака об устранимой особой точке; интегралы Пуассона и Шварца; разложение гармонических функций в ряды, связь с тригонометрическими рядами; задача Дирихле, применение конформных отображений для ее решения.	

2.3.2 Лабораторные занятия

№	Наименование раздела	Наименование лабораторных работ	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Комплексные числа и действия над ними. Геометрия и топология комплексной плоскости.	Операции над комплексными числами. Геометрия комплексной плоскости. Кривые на комплексной плоскости. Неравенства	Решение задач на практических занятиях. Проверка домашних заданий, контрольная работа
2.	Комплексная дифференцируемость. Голоморфные функции и конформные отображения.	Элементарные функции комплексного переменного и их свойства. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции. Восстановление голоморфной функции по ее вещественной (или мнимой) части. Дробно-линейные функции. Построение конформных отображений.	Решение задач на практических занятиях. Проверка домашних заданий, контрольная работа
3.	Теория интеграла Коши	Интегрирование функций комплексного переменного. Применение интегральной теоремы Коши и формулы Коши.	Решение задач на практических занятиях. Проверка домашних заданий,
4.	Степенные ряды и ряды голоморфных функций	Разложение функций в ряды Тэйлора и Лорана. Классификация изолированных особых точек голоморфных функций	Решение задач на практических занятиях. Проверка домашних заданий,
5.	Теория вычетов	Вычисление вычетов. Применение теоремы Коши о вычетах и теоремы о полной сумме вычетов. Применение вычетов к вычислению определенных и несобственных интегралов	Решение задач на практических занятиях. Проверка домаш-

			них заданий, контрольная работа
6.	Аналитическое продолжение	Построение римановой поверхности полной аналитической функции	Рефераты по теме, обсуждение на практических занятиях.
7.	Геометрические принципы конформных отображений	Применение принципа аргумента. Теорема Руше. Применение принципа симметрии Римана – Шварца.	

Практические занятия не предусмотрены.

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

№	Наименование раздела	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
	Комплексные числа и действия над ними. Геометрия и топология комплексной плоскости.	1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. (http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=322)
	Комплексная дифференцируемость. Голоморфные функции и конформные отображения.	Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 365 с. (см. https://e.lanbook.com/book/70732#book_name)
	Теория интеграла Коши	Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 365 с. (см. https://e.lanbook.com/book/70732#book_name)
	Степенные ряды и ряды голоморфных функций	Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 365 с. (см. https://e.lanbook.com/book/70732#book_name)
	Теория вычетов	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. (http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=322)
	Аналитическое продолжение	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. (http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=322)
	Геометрические принципы конформных отображений	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. (http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=322)

3. Образовательные технологии

Активные и интерактивные формы, лекции, практические занятия, блиц - опросы, контрольные работы, коллоквиумы, зачёты. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому практическому занятию. Зачёт выставляется после отчёта по всем пройденным темам как минимум на «удовлетворительно».

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

В семестре студенты должны выполнить типовые индивидуальные задания (Из) для самостоятельной работы по темам: «Дифференцирование и интегрирование функции комплексного переменного», «Теория вычетов и ее применение». Зачет выставляется после решения всех задач контрольных работ и выполнения самостоятельной работы. Итоговый контроль осуществляется в форме экзамена

Интерактивные методы включают: метод презентации, дискуссии, метод текущего контроля, метод тестирования и др.

Вопросы, вынесенные на дискуссию

1. Проверка существенности условий теорем (по усмотрению лектора).
2. Самостоятельное доказательство теорем с данной формулировкой и планом доказательства (по усмотрению лектора)
3. Составление плана и поиск решения задачи.
4. Решение задач различными способами.
5. Взаимная и самопроверка знаний и обсуждение полученных результатов.
6. Самостоятельное составление задач по указанной теме.

Интерактивные методы включают: метод презентации, дискуссии, метод текущего контроля, метод тестирования и др.

Студентам предлагаются несколько тем для подготовки рефератов по разделам, выделенным для самостоятельного изучения. Например: «Гидродинамический смысл комплексной дифференцируемости, гидродинамическое истолкование гармонических и аналитических функций»

4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Текущий контроль осуществляется преподавателем, ведущим практические занятия на основе выполнения студентами домашних заданий и лабораторного практикума. В течение каждого семестра проводятся контрольные работы и теоретический коллоквиум.

4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущей аттестации

Типовые задачи для контрольных работ

Контрольная работа №1

1. Найти действительную и мнимую часть комплексного числа $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{10}$.
2. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота касательной α для отображения f(z)=$\dfrac{e^{iz}-i}{e^{iz}+i}$ в точке $z_0=\pi$.
3. Найти образ области $D=\{z:|z|>1, \operatorname{Im} z>0\}$ при отображении дробно-линейной функцией $w=f(z)$, удовлетворяющей условиям $f(0)=\infty,\ f(1+i)=1,\ f(2i)=0$.

   Или:

   Найти функцию $w=f(z)$, конформно отображающую область $D=\{z : \operatorname{Im} z>0\}\setminus[0;i]$ на верхнюю полуплоскость.

Контрольная работа №2

1. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию по известной действительной части U(x,y) и значению f (z_0):

$$U(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + 1,\ f(0) = 1.$$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(iz^2 - 2z\right)dz$, где кривая *L* – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \frac{\pi i}{2}$.

3. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки z=0 функцию:

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2 + 4z - 5}$$

и найти радиус сходимости ряда.

Контрольная работа №3

1. Разложить по степеням *z–a* в кольце $D = \{z : |z-2| > 0\}$ функцию $f(z) = z^4 (z-2)^{-2}, a = 2$.
2. Вычислить интеграл, считая, что обход замкнутого контура происходит в положительном направлении:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}.$$

3. Вычислить с помощью теории вычетов несобственный интеграл вида:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)},$$

или несобственный интеграл вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2 - 2x + 10} dx.$

4. Вычислить с помощью теории вычетов следующий определенный интеграл: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3\cos\varphi}$.

Перечень типовых контрольных вопросов и задач для самостоятельной работы.

Типовые задачи для самостоятельной работы

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа:
$$z = (1+i)^9 - (1-i)^2 + i.$$
2. Найти модуль и главное значение $(0 \le \arg z < 2\pi)$ аргумента комплексного числа:
$$z = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.$$
3. Найти модуль и главное значение аргумента $(0 \le \arg z < 2\pi)$ комплексного числа: $z = (1 - i\sqrt{3})^3$
4. Найти все значения корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[5]{32}$

.

5. Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству:

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \le 1.$$

6. Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству:

$$\mathrm{Re}((1+i)z^2)>0.$$

7. Представить в алгебраической форме значение функции комплексного переменного:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+2i\right).$$

8. Представить в алгебраической форме значение функции комплексного переменного:

$$Ln(1+\sqrt{3}i).$$

9. Представить в алгебраической форме значение функции комплексного переменного:

$$(1+i)^i.$$

10. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота α для отображения f (z) в точке

$$z_0=1-i,\ f(z)=\frac{(z-2i)^2}{z+i}\ .$$

11. Найти образ области

$$D=\left\{z:|z|<1;\mathrm{Im}\,z<0;\mathrm{Re}\,z>-\frac{1}{2}\right\}$$

при отображении дробно-линейной функцией $W=f(z)$, удовлетворяющей условиям: f (0)=–i; f (–1)=∞; f (∞)=i.

12. Найти функцию, конформно отображающую область

$$D=\left\{|z-1|<1;\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}\right\}$$

на верхнюю полуплоскость..

13. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по кривой:

$$\int_{AB}(3z^2+2z)dz; AB=\left\{z=x+iy: y=x^2: 0\le x\le 1\right\}$$

где A=0,B=1+i.

14. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по кривой:

$$\int_{ABC}(z^2+\cos z)dz,\text{ где}$$

ABC– ломаная, соединяющая точки A(0), B(i), C(1);

15. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки z=0 функцию $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+4z-5}$ и найти радиус сходимости ряда.

16. Определить радиус сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k^2 (z+i)^{3^k}\ .$$

17. Найти разложение функции

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(2-z)}$$

в ряд Лорана в кольце К={z: 1<|z|<2}.

18. Найти все особые точки функции

$$f(z)=\frac{z}{\left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)^2}$$

в расширенной комплексной плоскости и выяснить их характер.

19. Найти все особые точки функции

$$f(z)=\frac{1}{e^{\frac{1}{z}}+1}$$

в расширенной комплексной плоскости и выяснить их характер.

20. Разложить по степеням z–a в кольце $D=\{z:|z-2|>0\}$ функцию $f(z)=z^4(z-2)^{-2}, a=2$.

21. Вычислить интеграл, считая, что обход замкнутого контура происходит в положительном направлении:

1) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$.

2) $\int\limits_{|z|=3}\frac{z-1}{z^2+4}dz$

3) $\int\limits_{|z-i|=1}\frac{e^{\frac{\pi}{2}z}}{\left(z^2+1\right)^2}dz$

4) $\int\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{dz}{(z^4-1)(z+2)}$.

22. Вычислить с помощью теории вычетов несобственный интеграл:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}$,

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx.$

23. Вычислить с помощью теории вычетов следующий определенный интеграл: $\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{5+3\cos\varphi}$.

Вопросы к коллоквиуму

I. Определения и формулировки теорем.

1. Функция, дифференцируемая в смысле комплексного анализа, и функция, голоморфная в точке.
2. Условия Коши-Римана
3. Геометрический смысл модуля и аргумента производной
4. Понятие конформного отображения, достаточное условие конформности.
5. Теорема Коши для односвязной области.
6. Теорема Коши для многосвязной области.
7. Интегральная формула Коши.
8. Интеграл типа Коши.
9. Определение гармонической функции.
10. Определение инверсии.
11. Теорема о среднем
12. Теорема Морера.
13. Принцип максимума модуля.
14. Первая теорема Вейерштрасса.
15. Вторая теорема Вейерштрасса
16. Теорема Абеля
17. Формула Коши Адамара
18. Внутренняя теорема единственности
19. Классификация изолированных особых точек
20. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса
21. Определение вычета в конечной изолированной особой точке и в ∞.

II. Доказательства утверждений

1. Круговое свойство дробно-линейных отображений.
2. Свойство сохранения симметричных точек для дробно-линейных отображений.
3. Теорема Коши для односвязной области (доказательство Э.Гурса).
4. Теорема о существовании первообразной.
5. Интегральная формула Коши.
6. Теорема о среднем.
7. Дифференцируемость интеграла типа Коши.
8. Теорема Морера.
9. Принцип максимума модуля.
10. Теорема Абеля.
11. Теорема Тейлора.
12. Внутренняя теорема единственности
13. Неравенства Коши и теорема Лиувилля.
14. Теорема Лорана.
15. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса
16. Выражение вычета через коэффициент разложения в ряд Лоран в конечной точке и в бесконечности.
17. Теорема Коши о вычетах.
18. Теорема о полной сумме вычетов.
19. Лемма Жордана.

4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Итоговый контроль осуществляется в форме экзамена.

Контрольные проводятся в письменной форме, либо в форме тестирования, коллоквиумы – в письменной и устной форме. Контрольные и коллоквиумы оцениваются по пятибалльной системе. Экзамены оцениваются по системе: неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично. На лабораторных занятиях контроль осуществляется при ответе у доски и при проверке домашних заданий.

Вопросы к экзамену

1. Комплексные числа и действия над ними. Тригонометрическая и показательная форма представления комплексных чисел. Формула Муавра. Извлечение $\sqrt[n]{Z}$.
2. Расширенная комплексная плоскость. Стереографическая проекция и ее свойства.
3. Топология комплексной плоскости. Понятие открытого, замкнутого, связного множества. Область, порядок связности.
4. Пути и кривые. Предел и непрерывность функций комплексного переменного.
5. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.
6. Функции, дифференцируемые в смысле вещественного и комплексного анализа. Формальные производные. Понятие голоморфной функции.
7. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.
8. Понятие конформного отображения. Достаточный признак конформности отображения.
9. Гармонические функции, восстановление голоморфной функции по ее вещественной части.
10. Дробно-линейные отображения, их конформность в $\ddot{C}$ и круговое свойство.
11. Понятие инверсии, ее свойства. Свойство сохранения симметричных точек при дробно-линейных отображениях.
12. Построение дробно-линейного отображения по заданному соответствию трех пар точек, свойство сохранения сложного (ангармонического) отношения.
13. Дробно-линейные изоморфизмы верхней полуплоскости на единичный круг и автоморфизмы единичного круга.
14. Свойства функции Z^n .
15. Функция Жуковского.
16. Показательная функция.
17. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства.
18. Интегральная теорема Коши для односвязной области (доказательство с помощью формулы Грина).
19. Лемма Гурса.
20. Интегральная теорема Коши для односвязной области (доказательство Э. Гурса).
21. Интегральная теорема Коши для многосвязной области.
22. Теорема о существовании первообразной.
23. Интегральная формула Коши и теорема о среднем.
24. Интеграл типа Коши.
25. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций, интегральная формула Коши для производных, теорема Морера.
26. Принцип максимума модуля.
27. Сходимость и равномерная сходимость функциональных рядов. Свойства равномерно сходящихся рядов, признак Вейерштрасса.
28. Первая теорема Вейерштрасса.
29. Вторая теорема Вейерштрасса.
30. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда.
31. Признак Коши сходимости числового ряда. Формула Коши – Адамара.
32. Теорема Тэйлора.
33. Неравенства Коши и теорема Лиувилля.
34. Внутренняя теорема единственности для голоморфных функций.
35. Нули голоморфной функции.
36. Ряд Лорана. Теорема Лорана.
37. Теорема об единственности разложения в ряд Лорана, неравенства Коши для коэффициентов.

38. Классификация изолированных особых точек, критерий устранимости особой точки.
39. Полюсы голоморфной функции, порядок полюса, связь между нулями и полюсами.
40. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса.
41. Целые и мероморфные функции. Представление мероморфной функции, имеющей конечное число полюсов.
42. Вычеты. Выражение вычета через коэффициент разложения в ряд Лорана. Вычисление вычета в случае полюсов разной кратности.
43. Теорема Коши о вычетах.
44. Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов.
45. Лемма Жордана и ее применение.
46. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов.
47. Несобственный интеграл в смысле главного значения. Вычисления в случае простых полюсов. Пример.
48. Логарифмический вычет в нулях и полюсах. Теорема о полной сумме логарифмических вычетов функции, мероморфной в области.
49. Принцип аргумента.
50. Теорема Руше и основная теорема алгебры.
51. Принцип сохранения области.
52. Достаточное условие локальной однолистности и необходимое условие однолистности голоморфной функции.
53. Аналитический элемент, аналитическое продолжение по цепи областей. Канонический аналитический элемент, аналитическое продолжение по кривой.
54. Понятие полной аналитической функции, ветвь полной аналитической функции, теорема о монодромии (формулировка). Риманова поверхность полной аналитической функции.
55. Принцип непрерывности.
56. Принцип симметрии Римана-Шварца.
57. Конформно эквивалентные области на плоскости. Теорема Римана (формулировка). Соответствие границ при конформном отображении.
58. Принцип взаимно-однозначного соответствия.
59. Отображение верхней полуплоскости на многоугольник. Формула Кристоффеля-Шварца.

5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

5.1 Основная литература:

1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2009, 432 с. (см. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=322)

2. Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 365 с. (см. https://e.lanbook.com/book/70732#book_name)

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах «Лань» и «Юрайт».

5.2 Дополнительная литература

1. Малыхин, Константин Владимирович (КубГУ).
Избранные главы комплексного анализа [Текст] : учебное пособие / К. В. Малыхин, Н. М. Черных ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Кубанский гос. ун-т. - Краснодар : [Кубанский государственный университет], 2014. - 122 с. : ил. - Библиогр.: с. 121. (20 шт.)
2. Кытманов, А.М. Интегральные представления и их приложения в многомерном комплексном анализе : монография / А.М. Кытманов, С.Г. Мысливец ; Министерство образования и науки РФ, Сибирский Федеральный университет. - Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2010. - 390 с. - ISBN 978-5-7638-1990-8 ; То же [Электронный ресурс]. -
URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=229174

5.3. Периодические издания:

Не используются при изучении курса.

6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Электронная библиотечная система издательства "Лань" – http://e.lanbook.com/

2. Электронная библиотечная система "Юрайт" – http://www.biblio-online.ru/

7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Самостоятельная работа студентов заключается в еженедельном выполнении домашних заданий, написании контрольных работ (две контрольных работы в семестр) и участии в коллоквиумах (один коллоквиум в семестр). Методические рекомендации приведены в Приложениях 1 и 2 к рабочей программе.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

Для облегчения освоения курса и подготовки к экзаменам с участием студентов ведется разработка онтологии предметной области «Теория функций комплексного переменного», использующая технологию онтологического инжиниринга на базе программного редактора онтологий Protege, а также разработка концептуальных карт отдельных разделов предметной области на базе программной среды CmapTools (см. Приложение 2 к Рабочей программе).

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) и оснащенность
1.	Лекционные занятия	Лекционная аудитория, специально оборудованная мультимедийными демонстрационными комплексами, учебной мебелью
2.	Лабораторные занятия	Помещение для проведения лабораторных занятий осна-

		щенное учебной мебелью, доской маркером или мелом
3.	Групповые (индивидуальные) консультации	Помещение для проведения групповых (индивидуальных) консультаций, учебной мебелью, доской маркером или мелом
4.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Помещение для проведения текущей и промежуточной аттестации, оснащенное учебной мебелью.
5.	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета

Рецензия
на рабочую программу дисциплины
«Комплексный анализ»
по направлению подготовки 01.03.01 Математика,
очной формы обучения.
Составитель рабочей программы:
доцент каф. теории функций ФГБОУ ВО «КубГУ» Мавроди Н.Н.

Рабочая программа полностью соответствует требованиям ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.01 Математика (уровень бакалавриата).

Все основные разделы программы нашли свое отражение в перечне представленных в программе необходимых знаний и компетенций.

Распределение времени, отводимого на изучение различных разделов курса, включая самостоятельную работу, соответствует их трудоемкости.

Содержащийся перечень и количество практических занятий достаточен для формирования уровня подготовки, определенного требованиями ФГОС.

Перечень тем и разделов, которые должны изучить слушатели, а также основные требования к уровню подготовки слушателей объему знаний и умений, которым они должны обладать по каждой из перечисленных тем.

Информация о видах и объеме учебной работы содержит тематику лекционных занятий и лабораторных работ, призванных сформировать у студентов базовые знания и формирование основных навыков по комплексному анализу, необходимых для решения задач, возникающих в практической деятельности.

Самостоятельные задания развивают знания, умения и навыки, полученные в результате изучения предмета.

Рабочая программа дисциплины позволяет усвоить связи между различными разделами и теоремами комплексного анализа, а также способствует развитию и углублению межпредметных связей между изучением данного курса и прохождением других дисциплин естественнонаучного цикла.

Рабочая программа дисциплины «Комплексный анализ» способствует приобретению и развитию умений и навыков для решения профессиональных задач методами комплексного анализа, формированию компетентного специалиста.

Рецензент,
Гусаков В.А.,
канд. физ. – мат. наук,
директор ООО «Просвещение–Юг».

Краснодарский край г.Краснодар
с ограниченной ответственностью
ПРОСВЕЩЕНИЕ-ЮГ
Для документов
ИНН 2312054196
Российская Федерация