

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Кубанский государственный университет»  
факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ:  
Проректор по учебной работе,  
качеству образования – первый  
проректор

  
Кагуров Т. А.

«29» мая 2020 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### Б1.В.ДВ.05.02 Дополнительные главы теории функций комплексного переменного

Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальная математика и механика

Специализация: Фундаментальная математика и ее приложения

Форма обучения: очная

Квалификация: Математик. Механик. Преподаватель

Краснодар 2020

Рабочая программа дисциплины Б1.В.ДВ.05.02 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Программу составил:

Гаврилюк М.Н., кандидат физ.-мат. наук, доцент \_\_\_\_\_

Рабочая программа дисциплины Б1.В.ДВ.05.02 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО утверждена на заседании кафедры теории функций протокол № 8 «17» марта 2020 г.

Заведующий кафедрой теории функций Голуб М.В. \_\_\_\_\_

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры функционального анализа и алгебры протокол № 9 «10» апреля 2020 г.

Заведующая кафедрой функционального анализа и алгебры Барсукова В.Ю. \_\_\_\_\_

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук протокол № 2 «30» апреля 2020 г.

Председатель УМК факультета Шмалько С.П. \_\_\_\_\_

Рецензенты:

Гусаков Валерий Александрович, канд. физ. – мат. наук, директор ООО «Просвещение – Юг»

Засядко Ольга Владимировна, доцент кафедры информационных образовательных технологий, канд. физ. - мат. наук, доцент

## 1 Цели и задачи изучения дисциплины

### 1.1 Цель дисциплины

Освоение методов общей теории меры и теории интегрирования по мере.

### 1.2 Задачи дисциплины

Помочь студенту овладеть основами аксиоматической теории множеств и теории трансфинитных чисел, ознакомить с методами конструктивной теории меры Бореля, дать представление о пополнении меры, ознакомить с внутренними глубинными связями, объединяющими теорию меры Жордана, Бореля, Лебега, Хаусдорфа и дать представление об основных свойствах этих мер, Ознакомить с классификацией общих мер, ознакомить с процессами построения измеримых множеств, установить критерии регулярности борелевских мер, ознакомить с понятием размерности Хаусдорфа и её теоретико-множественными и топологическими свойствами, а также её применениями в теории фракталов, ознакомить с теорией измеримых функций, и дать введение в общую теорию интегрирования по мере Бореля, Лебега, Лебега – Стильеса, ознакомить с классами функций с ограниченным изменением, абсолютно непрерывными функциями, ознакомить с классификацией мер, порождаемых монотонными функциями, ознакомить с классом функций, обладающих обобщёнными производными.

### 1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дополнительные главы теории функций комплексного переменного» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1 «Дисциплины (модули)» учебного плана Б1.В.ДВ.05.02.

### 1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся общепрофессиональных и профессиональных компетенций (ПК-1, ПК-5)

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
1.	ПК-1	способен формулировать и решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики	теоретические основы оптимизации и исследования операций и содержательную сторону задач, возникающих в практике	использовать полученные знания для осуществления анализа управленческих ситуаций и идентифицировать проблему	навыками принятия решений в современных условиях хозяйствования
2.	ПК-5	способен находить и извлекать актуальную научно-техническую информацию из электронных	формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства	определять класс задач, для которых применим тот или иной аппарат, выби-	аппаратом математического анализа, методами применения этого аппарата

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
		библиотек, реферативных журналов и т.п.		рать метод решения конк-ретного типа задач	к решению задач

Курс “Дополнительные главы теории функций комплексного переменного” входит в число специальных, дисциплин, закладывающих базу знаний специалиста — математика в области теории функций. От изучающего настоящий курс требуется глубокое знание университетского курса анализа.

## 2. Структура и содержание дисциплины

### 2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы (72 часа, из них – 46,2 ч. контактной работы: лекционных 22 ч., лабораторных 22 ч., КСР 2 ч., ИКР 0,2 ч.; 25,8 ч. СР).

Вид учебной работы		Всего часов	Семестры (часы)
<b>Контактная работа, в том числе:</b>		<b>46,2</b>	<b>46,2</b>
<b>Аудиторные занятия (всего):</b>		<b>44</b>	<b>44</b>
Занятия лекционного типа		22	22
Лабораторные занятия		22	22
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)		-	-
		-	-
<b>Иная контактная работа:</b>		<b>2,2</b>	<b>2,2</b>
Контроль самостоятельной работы (КСР)		2	2
Промежуточная аттестация (ИКР)		0,2	0,2
<b>Самостоятельная работа, в том числе:</b>		<b>25,8</b>	<b>25,8</b>
Курсовая работа		-	-
Проработка учебного (теоретического) материала		10	10
Выполнение индивидуальных заданий (подготовка сообщений, презентаций)		5	5
Реферат		5,8	5,8
Подготовка к текущему контролю		5	5
<b>Контроль:</b>		<b>-</b>	<b>-</b>
Подготовка к зачету		-	-
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>час.</b>	<b>72</b>	<b>72</b>
	<b>в том числе контактная работа</b>	<b>46,2</b>	<b>46,2</b>
	<b>зач. ед</b>	<b>2</b>	<b>2</b>

### 2.2 Структура дисциплины:

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы дисциплины, изучаемые в 9 семестре (для студентов ОФО)

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Самостоятельная работа
			Л	ПЗ	ЛР	
1	2	3	4	5	6	7
1.	Общая теория меры.	24	4	-	10	10
2.	Классы измеримых функций	24	8	-	6	10
3.	Теория интегрирования по мере	21,8	10	-	6	5,8
<i>Итого по дисциплине:</i>			22	-	22	25,8

**2.3 Содержание разделов дисциплины:**

**2.3.1 Занятия лекционного типа**

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Общая теория меры.	<p>Множества, измеримые по Жордану. Необходимые и достаточные условия измеримости множеств по Жордану. Характеристические свойства системы омега натуральных чисел и аксиомы Пеано системы <math>\mathbb{N}</math> натуральных чисел. Упорядоченные и вполне упорядоченные множества. Теорема о сравнении трансфинитов. Теорема С.Н. Бернштейна. Борелевские множества. Мера Бореля на системе борелевских множеств. Множество Кантора, его мощность. Теорема о существовании множеств, не измеримых по Борелю. Полные меры, пополнение меры Бореля. Множество Кантора, его мощность. Полукольца, кольца, сигма-кольца. Теорема о существовании минимального сигма кольца для заданной системы множеств. Внешняя мера Лебега множеств в конечно-мерных евклидовых пространствах, её счётная полуаддитивность. Класс измеримых по Лебегу множеств. Сравнение конструкций Жордана и Лебега построения системы измеримых множеств. Конструкция Каратеодори построения системы мю-измеримых множеств.</p>	Опрос
2.	Классы измеримых функций	<p>Общее определение меры. Регулярные меры. Регулярные меры Бореля. Мера Радона. Примеры мер. Критерий Каратеодори наличия борелевского свойства у меры. Мера Хаусдорфа. Теорема о регулярности меры Хаусдорфа. Элементарные свойства меры</p>	Опрос

		<p>Хаусдорфа. Понятие размерности Хаусдорфа, её свойства. Теорема о непрерывности меры на кольце (прямая и обратная).</p> <p>Измеримые функции. Необходимое и достаточное условие измеримости функции по Борелю.</p> <p>Теорема Егорова о почти равномерной сходимости последовательности измеримых функций. Связь со сходимостью почти всюду.</p> <p>Теорема Н.Н. Лузина о связи между измеримыми и непрерывными функциями. Монотонные функции и меры Лебега - Стильеса.</p> <p>Функции с ограниченным изменением и их свойства. Сходимость измеримых функций по мере. Связь со сходимостью почти всюду.</p> <p>Лемма Рисса о невидимых справа (слева) точках.</p> <p>Теорема о дифференцируемости монотонной функции.</p>	
3.	Теория интегрирования по мере	<p>Интеграл Лебега. Его свойства.</p> <p>Теорема об интегрируемости монотонной функции.</p> <p>Теорема о точках Лебега.</p> <p>Абсолютно непрерывные функции. Теорема Лебега о производной абсолютно непрерывной функции.</p> <p>Понятие обобщённой производной локально интегрируемой функции. Описание класса функций с обобщёнными производными.</p>	Опрос

### 2.3.2 Занятия семинарского типа

Не предусмотрены.

### 2.3.3 Лабораторные занятия

№	Наименование раздела	Наименование лабораторных работ	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Общая теория меры.	<p>Примеры измеримых по Жордану множеств. Борелевские множества. Полукольца, кольца, сигма-кольца.</p> <p>Теорема о существовании минимального сигма кольца для заданной системы множеств. Измеримость по Лебегу.</p>	Проверка домашних заданий, ответы у доски
2.	Классы измеримых функций	<p>Регулярные меры. Регулярные меры Бореля. Мера Радона. Мера Хаусдорфа.</p> <p>Примеры мер. Понятие размерности Хаусдорфа, её свойства. Измеримые функции. Необходимое и достаточное условие измеримости функции по Борелю. Сходимость измеримых функций по мере. Связь со сходимостью почти всюду.</p>	Проверка домашних заданий, ответы у доски

3.	Теория интегрирования по мере	Интеграл Лебега. Его свойства. Теорема об интегрируемости монотонной функции. Описание класса функций с обобщёнными производными.	Проверка домашних заданий, ответы у доски
----	-------------------------------	---	---

### 2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Не предусмотрены.

## 2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

№	Наименование раздела	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
1.	Общая теория меры.	Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Физматлит, 2006
2.	Классы измеримых функций	Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Физматлит, 2006
3.	Теория интегрирования по мере	Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Физматлит, 2006

## 3. Образовательные технологии

При изучении данного курса используются как традиционные лекции и лабораторные занятия, так и современные интерактивные образовательные технологии.

Цель лабораторных занятий – научить студента применять полученные на лекциях теоретические знания к решению и исследованию конкретных задач.

К образовательным технологиям также относятся интерактивные методы обучения. Интерактивность подачи материала по дисциплине «Дополнительные главы теории функций комплексного переменного» предполагает не только взаимодействия вида «преподаватель - студент» и «студент - преподаватель», но и «студент - студент». Все эти виды взаимодействия хорошо достигаются при изложении материала, в ходе дискуссий. Также используются занятия-визуализации и доклады студентов.

### Дискуссия

Возможность дискуссии предполагает умение высказать собственную идею, предложить свой путь решения, аргументировано отстаивать свою точку зрения, связно излагать мысли. Полезны следующие задания: составление плана решения задачи, поиск другого способа решения, сравнение различных способов решения, проведение выкладок для решения задачи и выкладок для проверки правильности полученного решения, рассмотрение задач с лишними и недостающими данными. Студентам предлагается проанализировать варианты решения, высказать своё мнение. Основной объем использования интерактивных методов обучения реализуется именно в ходе дискуссий.

Общие вопросы, которые выносятся на дискуссию:

Описание модели.

Исследование модели или поиск различных способов решений задачи.

Выбор среди рассматриваемых способов наиболее рационального.

#### **Занятие-визуализация.**

В данном типе передача преподавателем информации студентам сопровождается показом различных рисунков, структурно-логических схем, опорных конспектов, диаграмм и т. п. (например, с помощью слайдов) .

Всего учебным планом предусмотрено 14 часа в интерактивной форме

Семестр	Вид занятия	Используемые интерактивные образовательные технологии	Количество часов
9	Лабораторные занятия	Занятие-визуализация: «Примеры измеримых по Жордану множеств»	4
		Дискуссия «Интеграл Лебега»	5
		Занятие-визуализация: «Борелевские множества»	5
Итого:			14

Самостоятельная работа студентов является неотъемлемой частью процесса подготовки. Под самостоятельной работой понимается часть учебной планируемой работы, которая выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа направлена на усвоение системы научных и профессиональных знаний, формирования умений и навыков, приобретение опыта самостоятельной творческой деятельности. СРС помогает формировать культуру мышления студентов, расширять познавательную деятельность.

Виды самостоятельной работы по курсу:

**а) по целям:** подготовка к лекциям, к практическим занятиям, к контрольной работе, к коллоквиуму.

**б) по характеру работы:** изучение литературы, конспекта лекций; поиск литературы в библиотеке; конспектирование рекомендуемой для самостоятельного изучения научной литературы; решение задач, тестов

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций со студентом при помощи электронной информационно-образовательной среды ВУЗа.

#### **4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

##### **4.1. Фонд оценочных средств для проведения текущей аттестации**

1. Пусть  $\varphi$  – неотрицательная аддитивная функция, заданная на полукольце множеств  $P$ . Доказать, что  $\varphi$  можно и притом единственным образом, продолжить до аддитивной функции на кольце  $R(P)$ , порождённом на  $P$ . Если функция  $\varphi$  была  $\sigma$  –аддитивна на  $P$ , то продолженная на  $R(P)$  функция будет  $\sigma$  –аддитивной, т.е. будет мерой, если  $\varphi(\emptyset) = 0$ .



2. Доказать, что все ограниченные борелевские множества измеримы.
3. Доказать, что каждое множество положительной меры имеет мощность континуума.
4. Доказать, что для любых множеств  $A, B \subset \mathbb{R}$  справедливо следующее включение:  

$$\partial(A \cup B) \subset \partial(A) \cup \partial(B)$$
 $\partial X$  – граница множества  $X$ .
5. Посчитать меру Хаусдорфа канторова множества.

#### **4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации Вопросы для подготовки к зачёту**

1. Определение измеримых по Жордану множеств. Необходимые и достаточные условия измеримости множеств по Жордану. Привести пример не измеримого по Жордану множества.
2. Построить в системе аксиом ZFC систему омега натуральных чисел. Характеристические свойства системы омега натуральных чисел и аксиомы Пеано системы  $\mathbb{N}$  натуральных чисел.
3. Упорядоченные и вполне упорядоченные множества. Теорема о сравнении трансфинитов. Теорема С.Н. Бернштейна.
4. Система борелевских множеств. Построение системы борелевских множеств. Мощность системы борелевских множеств.
5. Мера Бореля на системе борелевских множеств. Множество Кантора, его мощность. Теорема о существовании множеств, не измеримых по Борелю. Полные меры, пополнение меры Бореля.
6. Полукольца, кольца, сигма-кольца. Теорема о существовании минимального сигма кольца для заданной системы множеств.
7. Внешняя мера Лебега множеств в конечно-мерных евклидовых пространствах, её счётная полуаддитивность. Класс измеримых по Лебегу множеств. Сравнение конструкций Жордана и Лебега построения системы измеримых множеств. Конструкция Каратеодори построения системы измеримых множеств.
8. Общее определение меры. Регулярные меры. Регулярные меры Бореля. Мера Радона. Примеры мер.
9. Критерий Каратеодори наличия борелевского свойства у меры.
10. Мера Хаусдорфа. Теорема о регулярности меры Хаусдорфа.
11. Элементарные свойства меры Хаусдорфа. Понятие размерности Хаусдорфа, её свойства.
12. Теорема о непрерывности меры на кольце (прямая и обратная).
13. Измеримые функции. Необходимое и достаточное условие измеримости функции по Борелю.
14. Теорема Егорова о почти равномерной сходимости последовательности измеримых функций. Связь со сходимостью почти всюду.
15. Теорема Н.Н. Лузина о связи между измеримыми и непрерывными функциями.
16. Монотонные функции и меры Лебега - Стильеса.
17. Функции с ограниченным изменением и их свойства.
18. Сходимость измеримых функций по мере. Связь со сходимостью почти всюду.
19. Лемма Рисса о невидимых справа (слева) точках.
20. Теорема о дифференцируемости монотонной функции.
21. Интеграл Лебега. Его свойства.
22. Теорема об интегрируемости монотонной функции.
23. Теорема о точках Лебега.
24. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Лебега о производной абсолютно непрерывной функции.

25. Понятие обобщённой производной локально интегрируемой функции. Описание класса функций с обобщёнными производными.

Пример экзаменационного билета.

1. Элементарные свойства меры Хаусдорфа. Понятие размерности Хаусдорфа.
2. В каких топологических пространствах, определённых на  $\mathbb{R}$ , система открытых множеств представляет собой кольцо.  
Чему равен предел последовательности  $\{1/n\}$  в таких пространствах?

## **5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

### **5.1 Основная литература:**

1. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2009. — 572 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2206>
3. Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной [Электронный ресурс] : учебник / И.П. Натансон. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. — 560 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/284>

### **5.1 Основная литература:**

1. Геворкян, П.С. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебное пособие / П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2016. — 176 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/91142>

2. Миллер, Б.М. Теория случайных процессов в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Б.М. Миллер, А.Р. Панков. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2007. — 320 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/48168>

### **5.2 Дополнительная литература**

1. Малыхин, Константин Владимирович (КубГУ).  
Избранные главы комплексного анализа [Текст] : учебное пособие / К. В. Малыхин, Н. М. Черных ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Кубанский гос. ун-т. - Краснодар : [Кубанский государственный университет], 2014. - 122 с. : ил. - Библиогр.: с. 121. - ISBN 9785820910685 : 34.21. (20 шт.)

2. Пендин, Вадим Владимирович.

**Комплексный количественный анализ** информации в инженерной геологии [Текст] : учебное пособие для студентов вузов / В. В. Пендин ; Рос. гос. геологоразведочный ун-т им. Серго Орджоникидзе (РГГРУ). - М. : Книжный дом "Университет", 2009. - 349 с. : ил. - Библиогр. : с. 324-349. - ISBN 9785982275165. (25 шт.)

### **5.3. Периодические издания:**

Не предусмотрены.

## **6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. Электронная библиотечная система издательства "Лань" – <http://e.lanbook.com/>

2. Электронная библиотечная система "Юрайт" – <http://www.biblio-online.ru/>

### **7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Текущий контроль осуществляется преподавателем, ведущим практические занятия на основе выполнения студентами домашних заданий и ответов у доски.

Итоговый контроль осуществляется в форме зачета.

На практических занятиях контроль осуществляется при ответе у доски и при проверке домашних заданий.

Самостоятельная работа студентов заключается в еженедельном выполнении домашних заданий, работе с литературой.

### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.**

#### **8.1 Перечень информационных технологий**

- Сбор, хранение, систематизация и выдача учебной и научной информации;
- Обработка текстовой, графической и эмпирической информации;
- Подготовка, конструирование и презентация итогов исследовательской и аналитической деятельности;
- Использование электронных презентаций при проведении практических занятий;
- Работа с информационными справочными системами;
- Использование электронной почты преподавателей и обучающихся для рассылки, переписки и обсуждения возникших учебных проблем.

#### **8.2 Перечень необходимого программного обеспечения**

- Офисный пакет приложений Microsoft Office.

#### **8.3 Перечень необходимых информационных справочных систем**

- Электронные ресурсы библиотеки КубГУ – <https://kubsu.ru/node/1145> (см. п. 6)
- Могут использоваться иные информационно-поисковые системы сети Интернет.

### **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) и оснащенность
	Лекционные занятия	Лекционная аудитория, специально оборудованная мультимедийными демонстрационными комплексами, учебной мебелью
	Лабораторные занятия	Помещение для проведения лабораторных занятий оснащенное учебной мебелью, доской маркером или мелом
	Групповые (индивидуальные) консультации	Помещение для проведения групповых (индивидуальных) консультаций, учебной мебелью, доской маркером или мелом
	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Помещение для проведения текущей и промежуточной аттестации, оснащенное учебной мебелью.
	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и

		обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета
--	--	--

