

Министерство науки и высшего образования российской федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Кубанский государственный университет»  
Факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по учебной работе,  
качества образования – первый  
проректор

Хагуров Т.А.

31 мая 2019 г.



### РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) Б1.О.24 УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

|                                   |                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Направление подготовки            | 02.03.01 Математика и компьютерные науки                                                                                                                              |
| Направленность (профиль)          | Вычислительные, программные, информационные системы и компьютерные технологии; Алгебра, теория чисел и дискретный анализ; Математическое и компьютерное моделирование |
| Форма обучения                    | очная                                                                                                                                                                 |
| Квалификация (степень) выпускника | бакалавр                                                                                                                                                              |

Краснодар 2019

Рабочая программа дисциплины Б1.О.24 Уравнения в частных производных в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Программу составил:

С.В. Гайденко, зав. каф. доцент, канд. физ.-мат. наук, доцент

  
подпись

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры вычислительной математики и информатики протокол № 13 «18» апреля 2019 г.  
Заведующий кафедрой (разработчик) Гайденко С.В.

  
подпись

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры вычислительной математики и информатики протокол № 13 «18» апреля 2019 г.  
Заведующий кафедрой (выпускающей) Гайденко С.В.

  
подпись

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук протокол № 2 «24» апреля 2019 г.  
Председатель УМК факультета Титов Г.Н.

  
подпись

Рецензенты:

Профессор кафедры прикладной математики Кубанского государственного университета кандидат физико-математических наук доцент Кармазин В.Н.

Доктор экономических наук, кандидат технических наук, профессор кафедры компьютерных технологий и систем КубГАУ Луценко Е.В.

## 1 Цели и задачи изучения дисциплины (модуля)

### 1.1 Цель освоения дисциплины

Дать студентам представление о применении достижений современной математики к исследованию реальных объектов, математические модели которых приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных; продемонстрировать исследование корректности типичных задач математической физики.

Пробудить интерес студентов к научной деятельности, показать возможность практического применения математического образования.

### 1.3 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы.

Дисциплина относится к базовой части Блока 1 «Дисциплины(модули)» учебного плана. Для полноценного понимания курса «Уравнения в частных производных» необходимы знания, умения и навыки, заложенные в курсах математического анализа, линейной алгебры, аналитической геометрии, комплексного анализа, функционального анализа и дифференциальных уравнений. Дисциплина является предшествующей для курсов «Численные методы» и «Теоретическая механика». Студенты должны быть готовы использовать полученные в этой области знания, как при продолжении образования в магистратуре и в аспирантуре, так и в профессиональной деятельности.

### 1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся следующих общепрофессиональных и профессиональных компетенций: ОПК-1, ПК-3.

| № п.п. | Код и наименование компетенции                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Индикаторы достижения компетенции                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                             |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | знает                                                                                                                           | умеет                                                                                                                                                                                                                              | владеет                                                                                                     |
| 1.     | ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности | классификацию квазилинейных уравнений второго порядка и корректные постановки основных краевых задач для каждого типа уравнений | приводить к каноническому виду линейные уравнения с двумя переменными, интегрировать их, когда это возможно; строить решения простейших уравнений с постоянными коэффициентами методами разделения переменных и теории потенциалов | техникой преобразования дифференциальных уравнений в результате невырожденной замены независимых переменных |
| 2.     | ПК-3 Способен математически корректно ставить                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | корректные постановки                                                                                                           | строить решения                                                                                                                                                                                                                    | техническими приемами                                                                                       |

| №<br>п.п. | Код и наименование<br>компетенции                                          | Индикаторы достижения компетенции                                                                                                                         |                                                                                     |                                                               |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
|           |                                                                            | знает                                                                                                                                                     | умеет                                                                               | владеет                                                       |
|           | естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики | граничных задач для линейных уравнений эллиптического типа, задачи Коши и смешанных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов. | указанных краевых задач методами теории потенциала и методом разделения переменных. | доказательства корректности указанных дифференциальных задач. |

## 2. Структура и содержание дисциплины

### 2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 4 зач. ед. (144 часа), их распределение по видам работ представлено в таблице (для студентов ОФО)

| Вид учебной работы                                              |                               | Всего часов | Семестры (часы) |  |  |  |
|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------|-------------|-----------------|--|--|--|
|                                                                 |                               |             | 5               |  |  |  |
| Контактная работа, в том числе:                                 |                               |             |                 |  |  |  |
| Аудиторные занятия (всего):                                     |                               | 68          | 68              |  |  |  |
| Занятия лекционного типа                                        |                               | 34          | 34              |  |  |  |
| Лабораторные занятия                                            |                               | 34          | 34              |  |  |  |
| Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)      |                               | -           | -               |  |  |  |
|                                                                 |                               |             |                 |  |  |  |
| Иная контактная работа:                                         |                               | 4,3         | 4,3             |  |  |  |
| Контроль самостоятельной работы (КСР)                           |                               | 4           | 4               |  |  |  |
| Промежуточная аттестация (ИКР)                                  |                               | 0,3         | 0,3             |  |  |  |
| Самостоятельная работа, в том числе:                            |                               | 36          | 36              |  |  |  |
| Курсовая работа                                                 |                               | -           | -               |  |  |  |
| Проработка учебного (теоретического) материала                  |                               | 12          | 12              |  |  |  |
| Выполнение индивидуальных заданий (подготовка домашних заданий) |                               | 12          | 12              |  |  |  |
| Реферат                                                         |                               | -           | -               |  |  |  |
|                                                                 |                               |             |                 |  |  |  |
| Подготовка к текущему контролю                                  |                               | 12          | 12              |  |  |  |
| Контроль:                                                       |                               |             |                 |  |  |  |
| Подготовка к экзамену                                           |                               | 35,7        | 35,7            |  |  |  |
| Общая трудоемкость                                              |                               | 144         | 144             |  |  |  |
|                                                                 | в том числе контактная работа | 72,3        | 72,3            |  |  |  |
|                                                                 | зач. ед                       | 4           | 4               |  |  |  |

## 2.2 Структура дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.  
Разделы (темы) дисциплины, изучаемые в \_\_\_\_\_ семестре (очная форма)

| №                                   | Наименование разделов (тем)                          | Количество часов |                   |    |    |                      |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------|-------------------|----|----|----------------------|
|                                     |                                                      | Всего            | Аудиторная работа |    |    | Внеаудиторная работа |
|                                     |                                                      |                  | Л                 | ПЗ | ЛР | СРС                  |
| 1                                   | 2                                                    | 3                | 4                 | 5  | 6  | 7                    |
| 1.                                  | Введение в теорию уравнений с частными производными. | 22               | 8                 | -  | 8  | 8                    |
| 2.                                  | Волновое уравнение.                                  | 27               | 8                 | -  | 8  | 6                    |
| 3.                                  | Одномерное уравнение теплопроводности.               | 24               | 6                 | -  | 6  | 8                    |
| 4.                                  | Уравнения с оператором Лапласа.                      | 23               | 8                 | -  | 8  | 8                    |
| 5.                                  | Теория потенциала для оператора Лапласа.             | 12               | 4                 | -  | 4  | 6                    |
| <b>ИТОГО по разделам дисциплины</b> |                                                      |                  | 34                |    | 34 | 36                   |
|                                     | Контроль самостоятельной работы (КСР)                | 4                |                   |    |    |                      |
|                                     | Промежуточная аттестация (ИКР)                       | 0,3              |                   |    |    |                      |
|                                     | Подготовка к текущему контролю                       | 12               |                   |    |    |                      |
|                                     | Общая трудоемкость по дисциплине                     | 144              |                   |    |    |                      |

Примечание: Л – лекции, ПЗ – практические занятия / семинары, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента

## 2.3 Содержание разделов (тем) дисциплины

### 2.3.1 Занятия лекционного типа

| №  | Наименование раздела                                 | Содержание раздела                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Форма текущего контроля                                                                                                                                   |
|----|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | 2                                                    | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 4                                                                                                                                                         |
| 1. | Введение в теорию уравнений с частными производными. | Классификация квазилинейных уравнений второго порядка. Характеристики дифференциальных уравнений, теорема Ковалевской. Приведение к каноническому виду уравнений с двумя независимыми переменными.                                                                                                                                                                                   | ЛР: практическое использование теории на лабораторных занятиях при приведении к каноническому виду уравнений всех трех типов.                             |
| 2. | Волновое уравнение.                                  | Задача Коши для уравнения колебаний струны, формула Даламбера для однородного уравнения, понятие обобщенного решения. Метод распространяющихся волн для полугораниченной струны. Формулы Кирхгофа и Пуассона решений задачи Коши для волнового уравнения при трех и двух пространственных переменных, анализ качественного поведения решений. Построение решений смешанных задач для | ЛР: непосредственным дифференцированием проверить, что добавление интегрального слагаемого в формулу Даламбера дает решение задачи Коши для неоднородного |

|    |                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                              |
|----|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    |                                          | уравнения колебаний струны методом разделения переменных.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | уравнения теплопроводности; практическое использование схемы метода Фурье при решении конкретных примеров.                                                                                                   |
| 3. | Одномерное уравнение теплопроводности.   | Постановка задачи Коши и смешанных задач для уравнения теплопроводности. Принцип максимума, единственность и устойчивость решения первой смешанной задачи. Построение решений смешанных задач с одной пространственной переменной методом разделения переменных.                                                                                                                                                                                                                                                      | ЛР: непосредственным дифференцированием проверить, что интегральная формула Пуассона дает решение уравнения теплопроводности; практическое использование схемы метода Фурье при решении конкретных примеров. |
| 4. | Уравнения с оператором Лапласа.          | Уравнения эллиптического типа. Классическая постановка граничных задач. Гармонические функции. Ньютонов и логарифмический потенциалы. Свойства минимума и максимума гармонических функций, единственность решения внутренней задачи Дирихле. Формула Пуассона для гармонических функций, ее следствия: теоремы Лиувилля и Гарнака, теорема об устранимой особенности. Метод Фурье для уравнения Пуассона в полярных координатах. Представление решений первой и второй граничных задач в круге, вне круга и в кольце. | ЛР: решение теоретических задач на основе свойств гармонических функций; практическое использование схемы метода Фурье при решении конкретных примеров построения гармонических функций в круговых областях. |
| 5. | Теория потенциала для оператора Лапласа. | Фундаментальное решение оператора Лапласа, Ньютонов и логарифмический потенциалы. Объёмный потенциал. Поверхностные потенциалы. Сведение краевых задач для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям.                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | ЛР: выписывание интегральных уравнений, к которым сводятся задачи Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в круговых областях.                                                                               |

Защита лабораторной работы (ЛР).

### 2.3.2 Занятия семинарского типа не предусмотрены.

### 2.3.3 Лабораторные занятия

| №  | Наименование раздела                                 | Тематика практических занятий                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Форма текущего контроля                                                                                                                                                                                                                                                |
|----|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | 2                                                    | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 4                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 1. | Введение в теорию уравнений с частными производными. | Приведение к каноническому виду уравнений с двумя независимыми переменными. Интегрирование некоторых уравнений, нахождение их общих решений.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <i>Контрольная работа.</i>                                                                                                                                                                                                                                             |
| 2. | Волновое уравнение.                                  | Метод распространяющихся волн для полуограниченной струны. Построение решений смешанных задач для уравнения колебаний струны методом разделения переменных. Решение первой смешанной задачи для волнового уравнения, когда начальное возмущение близко к одной из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля, явление резонанса.                                                                                                                                                                                                                                      | <i>Отчет по лабораторной работе:</i><br>практическое использование схемы метода Фурье при решении конкретных примеров.<br><i>Контрольная работа</i> по методу Фурье для нестационарных уравнений.                                                                      |
| 3. | Одномерное уравнение теплопроводности.               | Построение решений смешанных задач для однородного и неоднородного уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной методом разделения переменных в случае нулевых граничных условий. Сведение неоднородных граничных условий к однородным.                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <i>Отчет по лабораторной работе:</i><br>практическое использование схемы метода Фурье при решении конкретных примеров.                                                                                                                                                 |
| 4. | Уравнения оператором Лапласа.                        | Уравнения эллиптического типа. Классическая постановка граничных задач. Гармонические функции. Ньютонов и логарифмический потенциалы. Свойства минимума и максимума гармонических функций, единственность решения внутренней задачи Дирихле. Формула Пуассона для гармонических функций, ее следствия: теоремы Лиувилля и Гарнака, теорема об устранимой особенности. Вывод оператора Лапласа в полярных координатах. Метод Фурье для уравнения Пуассона в полярных координатах. Представление решений первой и второй граничных задач в круге, вне круга и в кольце. | <i>Отчет по лабораторной работе:</i><br>практическое использование схемы метода Фурье при решении конкретных примеров построения гармонических функций в круговых областях.<br><i>Контрольная работа</i> по методу Фурье для уравнения Лапласа в полярных координатах. |

|    |                                          |                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                    |
|----|------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5. | Теория потенциала для оператора Лапласа. | Фундаментальное решение оператора Лапласа, Ньютонов и логарифмический потенциалы. Объёмный потенциал. Поверхностные потенциалы. Сведение краевых задач для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям. | <i>Отчет по лабораторной работе:</i><br>выписывание интегральных уравнений, к которым сводятся задачи Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в круговых областях. |
|----|------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### 2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Курсовые работы не предусмотрены.

## 2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

| № | Вид СРС                                                                                                 | Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы                                                                               |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Изучение лекционного материала;<br>Подготовка отчета по лабораторной работе;<br>Подготовка к экзаменам. | Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов утвержденные кафедрой вычислительной математики и информатики, протокол № 14 от 14.06.2017 г. |

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме аудиофайла;
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме аудиофайла;
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

Подробные постановки задач для самостоятельной работы студенты получают в очном индивидуальном общении с преподавателем. Очные консультации не составляют проблемы: еженедельно преподаватель работает в аудитории со студентами в среднем по четыре часа.

Для лиц с ограниченными возможностями восприятия информации (нарушения зрения либо слуха, а также с нарушениями опорно-двигательного аппарата) возможна

видео и аудио запись лекций: лектор имеет привычку все произнесенные слова записывать на доске, а записанные на доске формулы повторять устно.

### 3. Образовательные технологии

Сочетание традиционных образовательных технологий в форме лекций и лабораторных работ, предполагающих активное участие студентов в решении конкретных задач по схемам, подробно изложенным на лекциях. Публичная защита каждым студентом выданного ему индивидуального задания по контролируемой самостоятельной работе.

Проведение контрольных мероприятий в форме отчетов преподавателю по выполненным лабораторным работам, а также традиционные контрольные работы, результаты которых учитываются на экзамене.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

### 4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

#### 4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущей аттестации

Текущий контроль качества подготовки осуществляется путем проверки теоретических знаний и практических навыков посредством

1) Проверки и приема текущих семестровых заданий и лабораторных работ. Проведение контрольных мероприятий в форме отчетов преподавателю по выполненным лабораторным работам с публичной защитой во время лабораторных занятий. Контрольные работы по приведению уравнений к каноническому виду и по методу Фурье для уравнений всех типов.

2) Подготовки к экзамену в конце семестра.

#### Примерные задания для самостоятельной работы

| №  | Задания                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | Привести к каноническому виду уравнение с постоянными коэффициентами $a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x, y, u) = 0$ . Подобрать ненулевые коэффициенты так, чтобы получились уравнения всех трех типов. |
| 2. | Придумать и привести к каноническому виду уравнение с переменными коэффициентами в каждой из областей, где сохраняется тип рассматриваемого уравнения. Например, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .                                                     |
| 3. | Вывести выражение оператора Лапласа в полярных, цилиндрических и в сферических координатах. На плоскости и в трехмерном пространстве найти все гармонические функции, которые не зависят от угловых переменных.                                                                                       |
| 4. | Придумать пример и найти точки экстремума гармонической функции $u(x, y)$ в замкнутой области. Например, $u = xy$ , $x^2 + y^2 \leq 1$ , либо $u = x^2 - y^2$ , $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$ .                                                                                              |
| 5. | В круге $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ , а также вне этого круга решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа с полиномиальной граничной функцией $g(x, y)$ . Например, граничная функция $g(x, y) = xy^2$ . Во внешней задаче учесть условие                                                                 |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|     | ограниченности решения. Реализовать ту же схему для задачи Неймана, учесть при этом необходимое условие для граничной функции.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 6.  | В круге $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона с полиномиальными свободным членом $f(x, y)$ и граничной функцией $g(x, y)$ . Рассмотреть примеры многочленов первой-второй степени.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 7.  | Вычислить потенциал простого слоя $u(x, y)$ масс, распределенных по окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с плотностью $\mu(x, y) = 1$ . Найти потенциал двойного слоя $u(x, y)$ зарядов, распределенных по окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с плотностью $\mu(x, y) = x$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 8.  | Привести первую краевую задачу для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$ в прямоугольнике $0 < t < T, 0 < x < 1$ , с неоднородными граничными условиями на боковых сторонах $u(0, t) = \alpha(t), u(1, t) = \beta(t), 0 \leq t \leq T$ , к первой краевой задаче, но уже с однородными краевыми условиями на боковых сторонах. Построить частное решение неоднородного уравнения теплопроводности для $f(x, t) = \sin(nx) \cdot f_n(t)$ , где $f_n(x)$ – заданная функция.                                                                                                                    |
| 9.  | Непосредственной проверкой убедиться в том, что функция $U(x, t) = \frac{1}{(t - t_0)^{n/2}} \exp \left[ -\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{4(t - t_0)} \right],$ где $y_1, \dots, y_n$ – действительные параметры, при $t > t_0$ является решением однородного уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 10. | Непосредственной проверкой показать, что формула Кирхгофа $u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi} t M(\psi) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[ t M(\varphi) \right]$ дает решение задачи Коши для однородного волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$ с достаточно гладкими начальными функциями: $u(x, 0) = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$ . Здесь $M(\mu) = \int_{ y =1} \mu(x_1 + ty_1, x_2 + ty_2, x_3 + ty_3) dS_y,$ а $\mu(x_1, x_2, x_3)$ – заданная в пространстве $R^3$ функция с непрерывными частными производными второго порядка. |
| 11. | Вывести из формулы Кирхгофа принцип Гюйгенса: соответствующая задаче Коши для однородного волнового уравнения волна в точке $(x_1, x_2, x_3, t)$ пространства $R^4$ однозначно определяется значениями $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \psi$ на сфере $\sum_{i=1}^3 (z_i - x_i)^2 = t^2$ радиуса $t$ с центром в точке $(x_1, x_2, x_3)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 12. | В предположении, что $\varphi$ и $\psi$ зависят только от двух пространственных переменных $x_1$ и $x_2$ , вывести из формулы Кирхгофа формулу Пуассона $u(x_1, x_2, t) =$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $= \frac{1}{2\pi} \int_K \frac{\psi(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 + (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_K \frac{\varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 + (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}},$ <p>где <math>K</math> – круг <math>(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \leq t^2</math>.</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## 4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Теоретический экзамен в конце семестра.

### Вопросы к экзамену по лекционному курсу

1. Классификация квазилинейных уравнений второго порядка. Классические краевые задачи для уравнений всех трех типов.
2. Характеристики линейных уравнений. Теорема Ковалевской. Пример Адамара.
3. Задача Коши для волнового уравнения. Вывод формулы Даламбера для уравнения колебаний струны. Передний и задний фронты волны.
4. Формулы Пуассона и Кирхгофа решений задачи Коши для двух и трех мерного волнового уравнения, диффузия волн.
5. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Интегральное представление решения формулой Пуассона.
6. Метод Фурье в случае одной пространственной переменной для волнового уравнения и для уравнения теплопроводности.
7. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Единственность решения первой смешанной задачи и единственность решения задачи Коши в классе ограниченных функций.
8. Задача на собственные значения для самосопряженного эллиптического оператора в ограниченной области.
9. Общая схема метода Фурье решения смешанных задач для уравнений гиперболического и параболического типов.
10. Гармонические функции, их основные свойства.
11. Понятие о функции Грина задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона.
12. Функция Грина задачи Дирихле для шара и круга. Формула Пуассона для гармонических функций, ее следствия.
13. Метод Фурье для уравнения Пуассона в полярных координатах. Свойства тригонометрических рядов Фурье.
14. Теория потенциала. Объёмный потенциал. Поверхностные потенциалы, теоремы о скачках на поверхности Ляпунова.
15. Сведение краевых задач для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям.

### Примерный билет к экзамену

#### Билет № 1

**по курсу «Уравнения в частных производных» для направления бакалавриата «Математика и компьютерные науки»**

1. Классификация квазилинейных уравнений второго порядка. Классические краевые задачи для уравнений всех трех типов.
2. Непосредственной проверкой показать, что формула Кирхгофа 
$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi} t M(\psi) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} [t M(\varphi)]$$
 дает решение задачи Коши для однородного волнового уравнения 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x).$$
 Здесь 
$$M(\mu) = \int_{|y|=1} \mu(x_1 + t y_1, x_2 + t y_2, x_3 + t y_3) dS_y.$$

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в форме электронного документа.

## **5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

### **5.1 Основная литература:**

1. Ильин А.М., Уравнения математической физики, издательство «Физматлит», 2009, 192 стр., <http://e.lanbook.com/view>, электронные ресурсы библиотеки КубГУ.

2. Владимиров В.С., Жаринов В.В., Уравнения математической физики, издательство «Лань», 2000, 400 стр., <http://e.lanbook.com/view>, электронные ресурсы библиотеки КубГУ.

### **5.2 Дополнительная литература:**

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, издательство «Наука», любое издание.

2. Петровский И.Г., Лекции об уравнениях с частными производными, «Физматлит», «Наука», любое издание.

3. Михайлов В.П., Дифференциальные уравнения в частных производных, издательство «Наука», 1983, 424 стр.

## **6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. Электронный каталог Научной библиотеки КубГУ

<http://megapro.kubsu.ru/MegaPro/Web>

2. Электронная библиотечная система "Университетская библиотека ONLINE"

<http://biblioclub.ru/>

3. Электронная библиотечная система издательства "Лань" <https://e.lanbook.com/>

4. Электронная библиотечная система «Юрайт» <http://www.biblio-online.ru>

5. Электронная библиотечная система «ZNANIUM.COM» [www.znanium.com](http://www.znanium.com)

6. Электронная библиотечная система «BOOK.ru» <https://www.book.ru>

7. Электронная библиотечная система eLIBRARY.RU (<http://www.elibrary.ru/>)

## **7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Лекции и лабораторные занятия проводятся еженедельно. Общение преподавателя и студентов на лабораторных занятиях предполагает предварительную проработку студентами конспекта лекций. Задача преподавателя состоит в расстановке акцентов и разъяснении смысла и необходимости введения ключевых понятий теории уравнений в частных производных. Для полноценного восприятия новых объектов необходима иллюстрация их практического применения. Такими примерами в курсе являются дифференциальные задачи для простейших уравнений математической физики, представляющих каждый из трех типов классификации.

В данном ознакомительном курсе показаны способы понижения размерности дифференциальной задачи с помощью разделения переменных, либо сведения посредством теории потенциала дифференциальных задач в области к интегральным уравнениям на границе этой области. Решение задач меньшей размерности возможно специальными численными методами, что соответствует специализации кафедры.

На лабораторных занятиях студентам предлагаются примеры для применения теории, изложенной на лекциях. Обсуждение способов решения предлагаемых задач призвано активизировать познавательную деятельность студентов. Этому должна способствовать практическая направленность итоговых результатов.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

**8.1 Перечень информационных технологий.** Возможно консультирование по электронной почте.

**8.2 Перечень необходимого программного обеспечения.** Необходимости в применении программного обеспечения в данном ознакомительном курсе нет. Однако на основе этого курса впоследствии изучаются и реализуются на языках программирования высокого уровня методы численного решения рассмотренных в данном курсе краевых задач.

### **8.2 Перечень необходимых информационных справочных систем**

1. Электронно-библиотечная система издательства «Лань» (<http://e.lanbook.com>).
2. Электронная библиотечная система «Университетская библиотека ONLAIN» (<http://www.elibrary.ru/>).
3. Электронная библиотечная система eLIBRARY.RU (<http://www.elibrary.ru/>)

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

| №  | Вид работ                               | Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) и оснащенность                                                              |
|----|-----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | Лекционные занятия                      | Лекционная аудитория, оборудованная обычной доской.<br>Ауд. 303 Н, 308 Н, 505 Н, 507 Н.                                             |
| 2. | Лабораторные занятия                    | Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, оборудованная обычной доской.<br>Ауд. 302 Н, 303Н, 308 Н, 505 Н, 507 Н. |
| 3. | Групповые (индивидуальные) консультации | Учебная аудитория для проведения индивидуальных и групповых консультаций. Ауд. 302 Н, 303Н, 308 Н, 505 Н, 507 Н.                    |

|    |                                            |                                                                                                                       |
|----|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4. | Текущий контроль, промежуточная аттестация | Учебная аудитория для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации. Ауд. 302 Н, 303Н, 308 Н, 505 Н, 507 Н. |
|----|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|