

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кубанский государственный университет»
Факультет компьютерных технологий и прикладной математики



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.06 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Направление подготовки **01.04.02 Прикладная математика и информатика**

Направленность (профиль) _____ Математическое моделирование

Программа подготовки _____ академическая

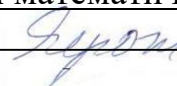
Форма обучения _____ очная

Квалификация (степень) выпускника _____ магистр

Краснодар 2017

Рабочая программа дисциплины «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА» составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки **01.04.02 Прикладная математика и информатика** (уровень магистратуры), утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации № 911 от 28 августа 2015 г.

Программу составил: канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования КубГУ, Сыромятников П.В.



Рабочая программа дисциплины «Математические модели механики деформируемого твердого тела» утверждена на заседании кафедры математического моделирования
протокол № 16 «21» июня 2017 г.

Заведующий кафедрой математического моделирования, акад. РАН,
д-р физ.-мат. наук, проф. Бабешко В.А.



Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета
компьютерных технологий и прикладной математики
протокол № 4 «29» июня 2017 г.

Председатель УМК факультета
канд. физ.-мат. наук, доцент Малыхин К.В.



Рецензенты:

Калинчук В.В., д-р физ.-мат. наук, заведующий комплексным отделом механики, химии, физики и нанотехнологий Южного научного центра РАН

Глушков Е.В., д-р физ.-мат. наук, директор Института математики, механики и информатики КубГУ

1 Цели и задачи изучения дисциплины

1.1 Цель освоения дисциплины

Цели изучения дисциплины определены Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования. Цели изучения дисциплины соотнесены с общими целями ООП ВО по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика», в рамках которой преподается дисциплина.

Данная дисциплина ставит своей **целью** изучение методов построения математических моделей механики деформируемого твердого тела, овладение необходимым математическим аппаратом и выработку у будущих специалистов теоретических знаний и умений формулировать задачи прикладного исследования в области механики деформируемого твердого тела и оценивать средства, необходимые для его проведения, получение опыта эффективного применения математических методов в научной деятельности, формирование профессиональных навыков исследователя.

Процесс освоения данной дисциплины направлен на получения необходимого объема теоретических знаний, отвечающих требованиям ФГОС ВО и обеспечивающих успешное проведение магистром профессиональной деятельности, владение методологией формулирования и решения прикладных задач, а также на выработку умений применять на практике методы прикладной математики и информатики. Цели дисциплины соответствуют следующим формируемым компетенциям: ОПК-4, ПК-1, ПК-2.

1.2 Задачи дисциплины

Основные **задачи** дисциплины:

- усвоение идей и методов механики деформируемого твердого тела, необходимых для решения теоретических и прикладных задач применения дисциплины;
- формирование навыков построения математических моделей, выбора адекватного математического аппарата их исследования, анализа и практической интерпретации полученных математических результатов;
- формирование творческого подхода к моделированию различных механических процессов; привитие практических навыков использования методов механики деформируемого твердого тела при решении прикладных задач.

1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Математические модели механики деформируемого твердого тела» относится к вариативной части Блока 1 "Дисциплины (модули)" части учебного плана подготовки магистра, базируется на знаниях, полученных по стандарту высшего образования, и является необходимой для теоретической подготовки магистров по программе «Математическое моделирование».

Место курса в профессиональной подготовке магистра определяется ролью механики деформируемого твердого тела в формировании высококвалифицированного специалиста в любой области знаний, использующей математические модели. Данная дисциплина является важным звеном в обеспечении магистра знаниями, позволяющими прикладнику успешно вести профессиональную деятельность в сфере разработки математических моделей решаемых задач, а также обеспечивать полный цикл процесса моделирования. Имеется логическая и содержательно-методическая взаимосвязь с другими частями ООП ВО. Дисциплина «Математические модели механики деформируемого твердого тела» связана с дисциплинами базового цикла и другими дисциплинами, относящимися к вариативной части. Данный курс наиболее тесно связан с курсами: непрерывные математические модели, математические модели механики разрушения, интегральные уравнения, интегральные преобразования и операционное исчисление.

Необходимым требованием к «входным» знаниям, умениям и опыту деятельности обучающегося при освоении данной дисциплины, приобретенным в результате освоения предшествующих дисциплин является уверенное владение материалом следующих курсов: уравнения математической физики, дифференциальные уравнения, математический анализ, теория функций комплексного переменного.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения курса «Математические модели механики деформируемого твердого тела» обучающийся должен обладать следующими общепрофессиональными и профессиональными компетенциями (ОПК и ПК):

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
1.	ОПК-4	способностью использовать и применять углубленные знания в области прикладной математики и информатики	– основные понятия и концепции механики деформируемого твердого тела; – подходы к исследованию уравнений механики деформируемого твердого тела, лежащие в основе построения эффективных аналитических и численных методов решения задач.	– описать конкретную прикладную задачу из области механики деформируемого твердого тела в виде краевой задачи для дифференциальных уравнений с частными производными или интегральных уравнений и определить пути ее решения. – использовать современные теории для решения научно-исследовательских и прикладных задач.	– методологи ей формулирования и решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела ; – навыками анализа, сопоставления и обобщения результатов теоретических и практических исследований в области механики деформируемого твердого тела.
2.	ПК-1	способностью проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты самостоятельно	– современные тенденции развития научных и прикладных достижений в области механики деформируемого твердого	– использовать современные теории для решения научно-исследовательских и прикладных задач; – исследовать математическую	– навыками построения математических моделей механики деформируемого твердого тела; – основными методами исследования и решения

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
		и в составе научного коллектива	тела; – принципы выбора методов и средств изучения математической модели деформируемого твердого тела.	модель деформируемого твердого тела и оценивать ее адекватность.	линейных дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений; – навыками использования пакетов прикладных программ для моделирования и исследования задач механики деформируемого твердого тела.
3.	ПК-2	способностью разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач	– способы использования современных методов для решения научных и практических задач.	– обобщать и содержательно интерпретировать аналитические и численные результаты.	– приемами и способами отыскания тенденций в подходах и методах решения задач, в оценке эффективности различных методов.

Процесс освоения дисциплины «Математические модели механики деформируемого твердого тела» направлен на получения необходимого объема теоретических знаний, отвечающих требованиям ФГОС ВО и обеспечивающих успешное ведение магистром научно-исследовательской деятельности, владение методологией формулирования и решения прикладных задач, а также на выработку умений применять на практике методы прикладной математики и информатики.

2. Структура и содержание дисциплины

2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 академических часа (из них 32 аудиторных). Курс «Математические модели механики деформируемого твердого тела» состоит из лекционных и лабораторных занятий, сопровождаемых регулярной индивидуальной работой преподавателя со студентами в процессе самостоятельной работы. В конце семестра проводится зачет. Программой дисциплины предусмотрены 8 часов лекционных и 24 часа лабораторных занятий.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр (часы)
		1
Контактная работа (всего)	32,2	32,2
В том числе:		
Занятия лекционного типа	8	8
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)	–	–
Лабораторные занятия	24	24
Иная контактная работа:		
Контроль самостоятельной работы (КСР)	–	–
Промежуточная аттестация (ИКР)	0,2	0,2
Самостоятельная работа (всего)	39,8	39,8
В том числе:		
Курсовая работа	–	–
Проработка учебного (теоретического) материала	20	20
Подготовка к текущему контролю	19,8	19,8
Контроль: зачет		
Общая трудоемкость	час.	72
	в том числе контактная работа	32,2
	зач. ед	2

2.2 Структура дисциплины:

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.
Разделы дисциплины, изучаемые в 1 семестре:

№	Наименование разделов	Количество часов			
		Всего	Аудиторная работа		Внеаудиторная работа
			Л	ЛР	СРС
1	2	3	4	5	7
1.	Основные постулаты и фундаментальные законы механики сплошной среды.	18	2	6	10
2.	Линейное упругое тело. Постановка задач теории упругости в перемещениях.	18	2	6	10
3.	Фундаментальные решения уравнений теории упругости.	18	2	6	10
4.	Интегральные уравнения краевых задач теории упругости.	14	2	4	8
5.	Обзор изученного материала и проведение зачета	3,8	–	2	1,8
Промежуточная аттестация (ИКР)		0,2	–	–	–
Итого:		72	8	24	39,8

Примечание: Л – лекции, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента

2.3 Содержание разделов дисциплины:

2.3.1 Занятия лекционного типа

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Основные постулаты и фундаментальные законы механики сплошной среды.	Меры и тензоры деформации Коши-Грина и Альманзи. Эквивалентность способов описания. Способы выражения тензоров деформации через вектор перемещения. Представления тензора напряжения. (2 ч.).	Опрос по результатам индивидуального задания.
2.	Линейное упругое тело. Определение вектора перемещения по тензору деформаций. Постановка задач теории упругости в перемещениях.	Закон Гука. Условия совместности. Тензор несовместности. Условия совместности в форме Сен-Венана. Определение вектора перемещения по линейному тензору деформаций. Формула Чезаро. Уравнения Ламе. Постановка задач теории упругости в напряжениях. Уравнения Бельтрами – Мичелла. Теорема единственности Кирхгоффа. Теорема взаимности Бетти. (2 ч.).	Опрос по результатам индивидуального задания.
3.	Фундаментальные решения уравнений теории упругости.	Тензор влияния. Теорема Максвелла. Действие сосредоточенной силы в неограниченном пространстве. Тензор Кельвина. Задачи Буссинеска и Черрути. (2 ч.).	Опрос по результатам индивидуального задания.
4.	Интегральные уравнения краевых задач теории упругости.	Интегральные уравнения и их классификация. Уравнения Фредгольма первого и второго рода. Сведение краевых задач теории упругости к интегральным уравнениям. Теоремы существования и единственности. (2 ч.).	Подготовка презентации. Защита группового задания..

2.3.2 Занятия семинарского типа

Учебный план не предусматривает занятий семинарского типа по дисциплине «Математические модели механики деформируемого твердого тела»

2.3.3 Лабораторные занятия

№	Наименование лабораторных работ	Форма текущего контроля
1	3	4
1	Способы выражения тензоров деформации через вектор перемещения. Представления тензора напряжения.	Отчет по ЛР
2	Закон Гука. Условия совместности Сен-Венана. Уравнения Ламе.	Отчет по ЛР
3	Действие сосредоточенной силы в неограниченном пространстве и полупространстве.	Отчет по ЛР
4	Интегральные уравнения.	Отчет по ЛР

2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Учебный план не предусматривает курсовых работ по дисциплине «Математические модели механики деформируемого твердого тела».

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
1	Подготовка к текущему контролю, подготовка индивидуальных заданий	Андреев В.К. Математические модели механики сплошных сред. Санкт-Петербург: Лань, 2015. 240 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/67464 .

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

2.5 Самостоятельное изучение разделов дисциплины

Целью самостоятельной работы является углубление знаний, полученных в результате аудиторных занятий. Содержание приведенной основной и дополнительной литературы позволяет охватить широкий круг задач и методов механики деформируемого твердого тела.

Раздел 1. Подходы Лагранжа и Эйлера для описания движения сплошной среды. Закон движения. Скорость и ускорение. Теория напряженного и деформируемого состояний. Малые деформации и малые вращения. Физический смысл компонент тензора деформаций.

Раздел 2. Закон Гука для изотропного и анизотропного тела. Тензор упругих постоянных. Частные случаи анизотропии. Постоянные Ламе. Технические постоянные. Модуль объёмного сжатия. Обратная форма закона Гука. Продольные и поперечные колебания в неограниченной упругой среде. Общее решение уравнения колебаний.

Раздел 3. Распределенная нормальная нагрузка. Применение функций Папковича-Нейбера к решению задачи Буссинеска-Черутти. Тензор влияния упругого полупространства. Постановка основных задач теории упругости. Первая краевая задача. Вторая краевая задача. Смешанные задачи. Теоремы о существовании и единственности.

Раздел 4. Альтернатива Фредгольма. Интегральные уравнения Вольтерра. Собственные значения и собственные функции интегрального уравнения. Резольвента интегрального уравнения. Сведение задач теории упругости к интегральным уравнениям. Применение интегральных преобразований Фурье, Бесселя и Лапласа к решению интегральных уравнений.

3. Образовательные технологии

С точки зрения применяемых методов используются как традиционные информационно-объяснительные лекции, так и интерактивная подача материала с мультимедийной системой. Компьютерные технологии в данном случае обеспечивают возможность разнопланового отображения алгоритмов и демонстрационного материала. Такое сочетание позволяет оптимально использовать отведенное время и раскрывать логику и содержание дисциплины.

Семе стр	Вид занятия	Используемые интерактивные образовательные технологии		Общее количество часов
1	Л	Интерактивная подача материала с мульти- медийной системой. Обсуждение сложных и дискуссионных вопросов.		2
		№	Тема	количество часов
		1	Постановка задач теории упругости в перемещениях. Уравнения Ламе.	2
	ЛР	Компьютерные занятия в режимах взаимодействия «преподаватель – студент» и «студент – студент»		6
Итого:				8

Цель *лекции* – обзор методов построения математических моделей механики деформируемого твердого тела, знакомство с проблемами и математическим аппаратом. На лекциях студенты получают общее представление о подходах и методах исследования и решения задач в данной области.

Цель *лабораторного занятия* – научить применять теоретические знания при решении и исследовании конкретных задач. Лабораторные занятия проводятся в компьютерных классах, при этом практикуется работа в группах.

Темы, задания и вопросы для самостоятельной работы призваны сформировать навыки поиска информации, умения самостоятельно расширять и углублять знания, полученные в ходе лекционных и лабораторных занятий.

Подход разбора конкретных ситуаций широко используется как преподавателем, так и студентами при проведении анализа результатов самостоятельной работы. Это обусловлено тем, что в процессе моделирования часто встречаются задачи, для которых единых подходов не существует. Каждая конкретная задача при своем моделировании (исследовании) имеет множество подходов, а это требует разбора и оценки целой совокупности конкретных ситуаций. Этот подход особенно широко используется при определении адекватности математической модели и результатов моделирования на отдельных этапах.

Групповые индивидуальные задания формируют навыки исследовательской работы в коллективе.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Учебная деятельность проходит в соответствии с графиком учебного процесса. Процесс самостоятельной работы контролируется во время аудиторных занятий и индивидуальных консультаций. Самостоятельная работа студентов проводится в форме изучения отдельных теоретических вопросов по предлагаемой литературе.

Фонд оценочных средств дисциплины состоит из средств текущего контроля и итоговой аттестации (зачета).

В качестве оценочных средств, используемых для текущего контроля успеваемости, предлагается перечень вопросов, которые прорабатываются в процессе освоения курса. Данный перечень охватывает все основные разделы курса, включая знания, получаемые во время самостоятельной работы. Кроме того, важным элементом технологии является самостоятельное решение студентами и сдача заданий. Это полностью индивидуальная форма обучения. Студент рассказывает свое решение преподавателю, отвечает на дополнительные вопросы.

Оценка успеваемости осуществляется по результатам: самостоятельного выполнения лабораторных работ, устного опроса при сдаче выполненных самостоятельных заданий, индивидуальных лабораторных заданий и защиты групповых заданий, ответа на экзамене (для выявления знания и понимания теоретического материала дисциплины, контроля ОПК-4). Проверка индивидуальных занятий и устный опрос по их результатам позволяет проверить компетенции ОПК-4, ПК-1. Существенным элементом образовательных технологий является не только умение студента найти решение поставленной задачи, но и донести его до всей аудитории. Защита групповых заданий проводится в виде представления результатов (средствами MS Office) и их обсуждения и служит контролем для проверки ПК-1, ПК-2.

Соответствие компетенций, формируемых при изучении дисциплины, и видов занятий

Перечень компетенций	Виды занятий					Формы контроля
	Л.	Лаб.	Пр.	КР	СРС	
ОПК-4	+				+	– Защита реферата; – Защита группового задания
ПК-1		+			+	– Защита реферата – Опрос по результатам выполнения индивидуальных заданий; – Опрос по результатам самостоятельной работы;
ПК-2					+	– Аналитический обзор

4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Примерные задания на лабораторные работы

Раздел 1. Основные постулаты и фундаментальные законы механики сплошной среды.

Примеры заданий:

1. Получить формулу, определяющую средние значения по объему составляющих тензора напряжений, возникающих в твердом теле от действия поверхностных нагрузок.
2. Определить поле перемещений и напряженное состояние для случая

$$h(z) = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \theta + i\omega = \frac{A}{x+iy} = \frac{A}{z}$$

Показать, что данное напряженное состояние соответствует действию сил, равномерно распределенных по прямой, проходящей через начало координат нормально к плоскости x, y и направленных по оси z .

3. Найти комплексные потенциалы $\varphi(z), \psi(z)$, соответствующие решению предыдущей задачи.

Раздел 2. Линейное упругое тело. Определение вектора перемещения по тензору деформаций. Постановка задач теории упругости в перемещениях. Уравнения Ламе. Решение задач с использованием средств Maple.

Примеры заданий:

1. Пусть σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, удовлетворяющие однородным уравнениям равновесия и связанные с компонентами тензора деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Показать что функции

$$G_1 = \sigma_{xz} + \frac{1}{2(1+\nu)} z \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad G_2 = \sigma_{yz} + \frac{1}{2(1+\nu)} z \frac{\partial \sigma}{\partial y} \quad G_3 = \sigma_{zz} + \frac{1}{2(1+\nu)} z \frac{\partial \sigma}{\partial z}$$

где

$$\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

являются гармоническими.

2. Показать, что уравнениям равновесия в случае отсутствия массовых сил можно удовлетворить, полагая

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial x}$$

Найти условия, налагаемые на функции φ_i сплошностью тела. Показать, что указанное решение уравнений равновесия можно получить, исходя из следующих общих выражений для перемещений:

$$2\mu u = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3), \quad 2\mu v = \frac{\partial}{\partial y}(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_1), \quad 2\mu w = \frac{\partial}{\partial z}(\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2)$$

3. Пусть функции $\varphi_i(x_1, x_2, x_3), i = 1, 2, 3$ и $\psi(x_1, x_2, x_3)$ являются гармоническими.

При каком условии формулы

$$u_i = \varphi_i + (r^2 - a^2) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad a = \text{const}$$

определяют решение однородных уравнений Ламе?

4. Пусть u, v, w - компоненты вектора перемещения, удовлетворяющие однородным уравнениям Ламе. Показать, что функции

$$\Phi_1 = 2u - \frac{1}{2(1-\nu)} \left[y \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

$$\Phi_2 = 2v - \frac{1}{2(1-\nu)} \left[z \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - x \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

$$\Phi_3 = 2w + \frac{1}{2(1-\nu)} z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

являются гармоническими.

3. Пусть функции $\varphi_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$ и $\psi(x, y, z)$ являются гармоническими. При каком условии формулы

$$2\mu u = \varphi_1 + z \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad 2\mu v = \varphi_2 + z \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad 2\mu w = \varphi_3 + z \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

определяют решение однородных уравнений Ламе?

5. Пусть $\bar{f}$ - произвольный бигармонический вектор ($\Delta \Delta \bar{f} = 0$). При каком значении постоянной A выражение:

$$\bar{u} = \bar{f} + A \cdot \text{grad div} \bar{f}$$

будет определять решение однородных уравнений Ламе?

6. Найти общее решение однородных уравнений статической теории упругости, считая напряженное состояние плоским, т. е.

$$\sigma_{13} \equiv \sigma_{23} \equiv \sigma_{33} \equiv 0$$

7. Найти общий вид плоского напряженного состояния ($\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$) в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , при условии, что

$$u_r = u_r(r, z), \quad u_z = u_z(r, z), \quad u_\varphi = 0.$$

Раздел 3. Фундаментальные решения уравнений теории упругости. Решение задач с использованием средств Maple.

Примеры заданий:

1. Доказать, что перемещения, возникающие в неограниченной упругой среде от действия сосредоточенной силы, приложенной в начале координат, являются однородными функциями степени —1. Показать, что решение

$$u = Axz/r^3, \quad v = Ayz/r^3, \quad w = A \left[z^2/r^3 + (3-4\nu)/r \right]$$

соответствует действию сосредоточенной силы, направленной вдоль оси Oz.

2. Получить общее решение задачи теории упругости при отсутствии массовых сил для полупространства $z > 0$ в двух случаях: на границе $z = 0$ равны нулю касательные

а) перемещения; б) напряжения.

3. Определить деформированное состояние, возникающее в упругом полупространстве $z > 0$ от действия сосредоточенной силы P , приложенной в точке $(0, 0, d > 0)$ и направленной вдоль оси Oz , если на границе $z = 0$ равны нулю:

а) перемещения; б) напряжения $\tau_{xz}, \tau_{zy}, \sigma_{zz}$.

4. Найти распределение напряжений в полубесконечном теле $z \geq 0$, подверженном воздействию радиально-симметричного давления, нормального к его поверхности и определяемого формулой:

$$p(r) = \frac{Pa}{2\pi(r^2 + a^2)^{3/2}}, \quad a > 0, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Рассмотреть предельный случай $a \rightarrow 0$.

5. Определить плоское деформированное состояние в упругой полуплоскости $x \geq 0$, нагруженной внутри сосредоточенной силой R_x , действующей вдоль оси x . Границу $x=0$ считать свободной от внешних усилий.

Раздел 4. Интегральные уравнения краевых задач. Решение интегральных уравнений с использованием средств Maple.

Примеры заданий:

1. Найти собственные значения и собственные функции для уравнения:

$$y(x) = \lambda \int_0^1 (-\exp(x+s))y(s)ds$$

2. Решить уравнение:

$$y(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x+s)y(s)ds + \sin x - \cos x$$

3. Методом преобразования Фурье решить уравнение:

$$y(x) = \lambda \int_0^\pi \exp(-a|x-s|)y(s)ds + \exp(-b|x|), \quad (a > 0, b > 0)$$

4. Решить уравнение Вольтерра:

$$x^2 = \int_0^x (x+s+1)y(s)ds$$

5. Построить резольвенту уравнения:

$$y(x) = \int_0^x (x-s)y(s)ds + x^2$$

Примерные темы рефератов

1. Закон Гука для изотропного и анизотропного тела.
2. Уравнения Ламе. Общее решение уравнения колебаний.
3. Начально-краевые задачи теории упругости.
4. Фундаментальные решения краевых задач теории упругости.
5. Применение интегральных преобразований в задачах теории упругости.
6. Сведение краевых задач теории упругости к интегральным уравнениям.

4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Основные требования к результатам освоения дисциплины представлены в таблице в виде признаков сформированности компетенций. Требования формулируются по двум уровням: пороговый и повышенный и в соответствии со структурой, принятой в ФГОС ВО: знать, уметь, владеть.

Название компетенции (или ее части)	Структура компетенции	Основные признаки сформированности компетенции
ОПК-4 способностью использовать и применять углубленные знания в области прикладной математики и информатики	Знать основные понятия и концепции механики деформируемого твердого тела, подходы к исследованию уравнений механики деформируемого твердого тела, лежащие в основе построения аналитических и численных методов решения задач.	Знает основные понятия и модели и механики деформируемого твердого тела: основные уравнения, постановки задач, приводит примеры моделей.
		Знает основные подходы и методы решения задач механики деформируемого твердого тела.
	Уметь перевести конкретную прикладную задачу на язык дифференциальных уравнений с частными производными или интегральных уравнений и определить пути ее решения.	Умеет ставить задачи и исследовать их корректность.
		Умеет использовать основные методы исследования и решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений.
ПК-1 способностью проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты самостоятельно и в составе научного коллектива	Владеть методологией формулирования и решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела, навыками построения математических моделей из области механики деформируемого твердого тела.	Владеет методами построения математических моделей механических процессов в деформируемом твердом теле.
	Знать современные проблемы анализа и принципы выбора методов и средств изучения математической модели в области механики деформируемого твердого тела.	Может анализировать, сопоставлять и содержательно интерпретировать полученные результаты.
	Уметь применять знание современных методов к построению и анализу механических моделей.	Может выбрать методы исследования и решения поставленной задачи.
	Владеть навыками использования результатов теоретических исследований и компьютерных технологий для анализа моделей механики деформируемого твердого тела.	Умеет производить верификацию модели.
ПК-2 способностью разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач	Имеет представление об общих современных проблемах и методах механики деформируемого твердого тела.	Владеет инструментарием математических пакетов (Maple, Comsol и др.) для решения уравнений в частных производных, интегральных уравнений, краевых задач.
		Умеет анализировать, сопоставлять и обобщать известные и новые результаты из области механики деформируемого твердого тела.

Перечень вопросов, выносимых на зачет:

1. Напряженное состояние линейно-упругого тела. Дифференциальные уравнения равновесия.
2. Напряжения на площадках, наклоненных к координатным плоскостям. Условия на поверхности.
3. Главные площадки и главные напряжения.
4. Инварианты тензора напряжений.
5. Компоненты перемещения и компоненты деформации. Зависимость между ними.
6. Уравнения неразрывности деформаций (уравнения Сен-Венана).
7. Закон Гука для изотропного и анизотропного тела.
8. Закон Гука для изотропного тела, выражение деформаций через напряжения.
9. Закон Гука для изотропного тела, выражение напряжений через деформации.
10. Форма зависимостей между напряжениями и деформациями; гипотеза о естественном состоянии тела.
11. Основные уравнения теории упругости.
12. Уравнения Ламе.
13. Продольные и поперечные колебания в неограниченной упругой среде.
14. Общее решение уравнения колебаний.
15. Три рода задач теории упругости. Единственность решения первой задачи теории упругости.
16. Постановки смешанных краевых задач теории упругости. Сведение смешанных задач теории упругости к интегральным уравнениям.
17. Методы решения интегральных уравнений смешанных задач теории упругости.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

5.1 Основная литература:

1. Андреев В.К. Математические модели механики сплошных сред. Санкт-Петербург: Лань, 2015. 240 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/67464>
2. Иванов Н.Б. Теория деформируемого твердого тела: тексты лекций. Казань: КНИТУ, 2013. 124 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=258827>
3. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. Москва : URSS: ЛЕНАНД, 2014. 367 с.
4. Темам Р. Математическое моделирование в механике сплошных сред: М.: "Лаборатория знаний", 2014. 319 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/50538>
5. Учайкин В.В. Механика. Основы механики сплошных сред. Санкт-Петербург: Лань, 2016. 860 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/87596>

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах: «Лань», «Университетская библиотека online», «Юрайт», «Znanium».

5.2 Дополнительная литература:

6. Бажанов В. Л. Механика деформируемого твердого тела. М. Юрайт, 2017. 78 с. [Электронный ресурс] - Режим доступа: <https://biblio-online.ru/viewer/EEFE37F5-FAEA-4C5A-91B9-62BCB1DF4394/mehanika-deformiruemogo-tverdogo-tela#page/1>.
7. Баженов В.Г. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / В.Г. Баженов, Л.А. Игумнов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 351 с.
8. Димитриенко, Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды [Электронный ресурс] М.: Физматлит, 2009. 624 с. [Электронный ресурс] - Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59577>.
9. Ландау Л.Д. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.- М.: ФИЗМАТЛИТ , 2007. 259 с.
10. Ханефт, А.В. Основы теории упругости. Теория упругости. Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2009. 100 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=232319>.
11. Хлуднев, А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 251 с.

5.3. Периодические издания:

1. Прикладная математика и механика // Академиздатцентр "Наука". ISSN 0032-8235. <http://pmm.ipmnet.ru>
2. Физика твердого тела //Академиздатцентр "Наука". ISSN 0367-3294. <http://www.ioffe.ru/journals/ftt>

6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля).

1. Мир математических уравнений EqWorld. <http://eqworld.ipmnet.ru/library.htm>
2. Физика, химия, математика. <http://www.ph4s.ru/index.html>
3. Кафедра теории упругости механико-математического факультета МГУ: <http://www.math.msu.su/departament/uprug/courses.htm#mtu>

7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной систематизированный материал и лабораторных занятий, на которых студенты применяют полученные теоретические знания к решению конкретных задач. Уровень усвоения теоретического материала проверяется посредством опроса по основным вопросам темы и результатам выполнения индивидуальных и групповых лабораторных заданий.

Важнейшим этапом курса является самостоятельная работа по дисциплине. Перечень разделов для самостоятельного изучения приведен в разделе 2.5.

Перечень вопросов для самоподготовки

1. Что представляют собой условия на поверхности тела?
2. Почему коэффициенты кубического уравнения относительно главных напряжений являются инвариантами напряженного состояния?
3. Каким деформациям соответствуют шаровой тензор напряжений и девиатор напряжений?
4. Сформулируйте и обоснуйте правила знаков для линейных и угловых деформаций.
5. Напишите выражения для инвариантов тензора деформаций. Каков геометрический смысл первого инварианта тензора деформаций?
6. В чем заключается энергетический смысл уравнений неразрывности деформаций?
7. Какие тела называются однородными, изотропными, анизотропными, ортотропными?
8. Сколько независимых упругих постоянных имеется в случаях изотропного и анизотропного тел?
9. Напишите выражения закона Гука, связывающие объемную деформацию и среднее нормальное напряжение.
10. Каким комплексом уравнений мы располагаем для определения неизвестных компонентов напряжений, деформаций и перемещений в точке тела?
11. Какие задачи теории упругости называются простейшими? Приведите примеры простейших задач.
12. Сформулируйте принцип Сен-Венана и приведите примеры его применения.
13. Укажите три типа граничных условий на поверхности тела.
14. Какая разница между плоской деформацией и обобщенным плоским напряженным состоянием? Приведите основные уравнения для обоих видов плоской задачи.
15. Какая функция называется бигармонической?
16. Чему равна наивысшая степень полинома, при которой тождественно удовлетворяется бигармоническое уравнение плоской задачи?
17. Полиному какой степени соответствует однородное напряженное состояние?
18. Чем отличаются друг от друга простое и сложное нагружения?
19. Что представляют собой активная и пассивная деформации?
20. Приведите общий вид уравнения Фредгольма первого и второго рода.
21. Какое интегральное уравнение называется регулярным, сингулярным?
22. Дайте определение вырожденного ядра и приведите примеры.
23. Дайте определение собственных значений и собственных функций интегрального уравнения.
24. Дайте определение резольвенты интегрального уравнения.
25. Сформулируйте альтернативу Фредгольма.

Примерные задачи для самостоятельной работы

1. Доказать, что значение гармонической функции в точке равно среднему арифметическому от этой функции по объему шара с центром в той же точке.

2. Определить деформацию полого шара (внутренний радиус - a , наружный - b), находящегося под действием равномерного внутреннего давления p_0 и равномерного внешнего давления p_1 .

3. Определить деформацию сплошной сферы радиуса a под влиянием собственного гравитационного поля. Найти области сжатия и растяжения.

4. Пусть $\bar{u}_0$ — вектор перемещений, удовлетворяющий однородным уравнениям Ламе с коэффициентом Пуассона ν_0 . Показать, что вектор

$$\bar{u} = \frac{1-\nu_0}{1-\nu} \frac{7-8\nu}{7-8\nu_0} \bar{u}_0 - \frac{\nu-\nu_0}{1-\nu} \frac{1}{7-8\nu_0} \left[2 \frac{1-\nu_0}{1-2\nu_0} \operatorname{div} \bar{u}_0 + \bar{r} \times \operatorname{rot} \bar{u}_0 \right]$$

удовлетворяет также однородным уравнениям Ламе, но с коэффициентом Пуассона ν .

5. Получить выражения для объемного расширения и вращения в цилиндрических координатах r, z , если деформация симметрична относительно оси z . Выписать для этого случая систему уравнений, которым должны удовлетворять объемное расширение и вращение, предполагая материал линейно-упругим, однородным и изотропным.

6. Пусть два твердых тела соприкасаются друг с другом в точке, не являющейся особой точкой их поверхностей. Определить контур, ограничивающий поверхность контакта, и распределение давления по поверхности контакта, если результирующая сила давления между телами равна F . Трением на поверхности контакта пренебречь. Рассмотреть случай соприкосновения двух шаров.

7. Показать, что интеграл однородных уравнений Ламе можно написать в виде:

$$\mu \bar{u} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial z} - \frac{1}{3-4\nu} z \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{H}$$

где $\bar{H}$ — гармонический вектор. Найти выражения для напряжений $\tau_{xz}, \tau_{zy}, \sigma_{zz}$.

8. Предполагая плотность массовых сил равной нулю и поле перемещений плоским $u = u(x, y), v = v(x, y), w = 0$, показать, что:

а) напряженное состояние можно представить в виде:

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

где F - бигармоническая функция напряжений ($\Delta \Delta F = 0$);

б) выражение

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu} \theta + i\omega = h(z)$$

где

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

есть функция от комплексного переменного $z = x + iy$;

в) перемещения u, v выражаются через функцию напряжений F по формулам

$$2\mu u = -\frac{\partial F}{\partial x} + 2\mu\xi, \quad 2\mu v = -\frac{\partial F}{\partial y} + 2\mu\eta,$$

где

$$\xi + i\eta = \int h(z)dz$$

г) общее решение уравнений теории упругости в комплексной форме можно представить в виде:

$$2\mu(u + iv) = (3 - 4\nu)\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \psi(z)$$

где $\varphi(z), \psi(z)$ аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$;

д) граничные условия для определения аналитических функций $\varphi(z), \psi(z)$ имеют вид:

$$\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + i \int_0^s (X_n + iY_n)ds + const = i(X + iY) + const$$

где (X, Y) — главный вектор усилий, приложенных на границе со стороны положительной нормали к дуге $(0, s)$.

9. Показать, что напряженное состояние, возникающее в неограниченном пространстве от действия сосредоточенной силы, приложенной в начале координат и направленной вдоль оси Oz, является чисто радиальным для несжимаемого материала.

10. Доказать, что значение бигармонической функции f в центре шара радиуса R определяется по формуле:

$$f(0) = \frac{3}{8\pi} \left[\frac{5}{R^3} \int_{v(R)} f dv - \frac{1}{R^2} \int_{s(R)} f ds \right]$$

11. Определить распределение напряжений в неограниченной упругой среде с шаровой полостью, подвергаемой на бесконечности однородной деформации. На поверхности полости считать перемещения равными нулю. Рассмотреть отдельно случаи простого растяжения и чистого сдвига.

12. Определить, имеет ли уравнение нетривиальное решение:

$$y(x) = \lambda \int_0^\pi \cos x \sin sy(s)ds$$

13. Решить уравнение Вольтерра:

$$y(x) = \int_0^x (x-s)y(s)ds + x^2$$

14. Найти собственные значения и собственные функции для уравнения:

$$y(x) = \lambda \int_0^1 (x-s)y(s)ds$$

Поиск информации для ответов на вопросы для самостоятельной работы и выполнения заданий в некоторых случаях предполагает не только изучение основной учебной литературы, но и привлечение дополнительной литературы, а также использование ресурсов сети Интернет.

В рамках самостоятельной работы студент готовит реферативную работу, объемом не менее 10 страниц. Каждый студент выполняет работу по одной теме.

Для написания реферата необходимо подобрать литературу. Общее количество литературных источников, включая тексты из Интернета, (публикации в журналах), должно составлять не менее 10 наименований. Учебники, как правило, в литературные источники не входят.

Рефераты выполняют на листах формата А4. Страницы текста, рисунки, формулы нумеруют, рисунки снабжают подрисуночными надписями. Текст следует печатать шрифтом № 14 с интервалом между строками в 1,5 интервала, без недопустимых сокращений. В конце реферата должны быть сделаны выводы.

В конце работы приводят список использованных источников.

Реферат должен быть подписан магистрантом с указанием даты ее оформления.

Работы, выполненные без соблюдения перечисленных требований, возвращаются на доработку.

Выполненная магистрантом работа определяется на проверку преподавателю в установленные сроки. Если у преподавателя есть замечания, работа возвращается и после исправлений либо вновь отправляется на проверку, если исправления существенные, либо предъявляется на экзамене, где происходит ее защита.

Примерные темы рефератов представлены в п. 4.1.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

8.1 Перечень информационных технологий

– Проверка индивидуальных заданий и консультирование посредством электронной почты.

– Использование электронных презентаций при проведении лекционных и лабораторных занятий.

– Использование математических пакетов при проведении лабораторных занятий.

8.2 Перечень необходимого лицензионного и свободного программного обеспечения

1.Операционная система MS Windows.

2.Интегрированное офисное приложение MS Office.

3.Программное обеспечение для организации управляемого коллективного и безопасного доступа в Интернет.

4.Математические пакеты Matlab (Comsol)

8.3 Перечень информационных справочных систем:

- Электронная библиотечная система "Юрайт" (<http://www.biblio-online.ru>).
- Электронная библиотечная система "Университетская библиотека ONLINE" (<http://www.biblioclub.ru>).
- Электронная библиотечная система издательства "Лань" (<http://e.lanbook.com>).
- База данных Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU <https://elibrary.ru/>
- База данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) РАН <http://www2.viniti.ru/>
- Базы данных и аналитические публикации «Университетская информационная система РОССИЯ» <https://uisrussia.msu.ru/>

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины и оснащенность
1.	Лекционные занятия	Лекционная аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук), соответствующим программным обеспечением, а также необходимой мебелью (доска, столы, стулья). (аудитории: 129, 131, 133, А305, А307).
2.	Лабораторные занятия	Компьютерный класс, укомплектованный компьютерами с лицензионным программным обеспечением, необходимой мебелью (доска, столы, стулья). (аудитории: 101, 102, 106, 106а, 105/1, 107(2), 107(3), 107(5), А301).
3.	Групповые (индивидуальные) консультации	Аудитория для семинарских занятий, групповых и индивидуальных консультаций, укомплектованная необходимой мебелью (доска, столы, стулья). (аудитории: 129, 131).
4.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Аудитория для семинарских занятий, текущего контроля и промежуточной аттестации, укомплектованная необходимой мебелью (доска, столы, стулья) (аудитории: 129, 131, 133, А305, А307, 147, 148, 149, 150, 100С, А301б, А512), компьютерами с лицензионным программным обеспечением и выходом в интернет (106, 106а, А301)
5.	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения, обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета, необходимой мебелью (доска, столы, стулья). (Аудитория 102а, читальный зал).

Осуществление учебного процесса предполагает наличие необходимого для реализации данной программы перечня материально-технического обеспечения: аудитории, оборудованные видеопроекторным оборудованием для презентаций (цифровой проектор, экран, ноутбук) и необходимой мебелью (доска, столы, стулья); компьютерные классы с компьютерной техникой с лицензионным программным обеспечением и необходимой мебелью (доска, столы, стулья) для проведения занятий.

Компьютерная поддержка учебного процесса по направлению 01.04.02 Прикладная математика и информатика обеспечивается по всем дисциплинам. Факультет компьютерных технологий и прикладной математики, оснащен компьютерными классами, установлена локальная сеть, все компьютеры факультета подключены к сети Интернет. Магистрантам доступны современные ПЭВМ, современное лицензионное программное обеспечение.

Магистранты и преподаватели вуза имеют постоянный доступ к электронному каталогу учебной, методической, научной литературе, периодическим изданиям и архиву статей.