


Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Кубанский государственный университет»  
Факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе,  
качеству образования – первый  
проректор  
Иванов А.Г.  
«01» *май* 2016 г.



## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### Б1.В.ДВ.15.01 СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Направление подготовки: 01.03.01 Математика

Направленность (профиль): Математическое моделирование;

Программа подготовки: академическая

Форма обучения: очная

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Краснодар 2016

Рабочая программа дисциплины Б1.В.ДВ.15.01 «СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 01.03.01 Математика.

Программу составил:

Бирюк А.Э., доцент, кандидат физ.-мат. наук



Рабочая программа дисциплины Б1.В.ДВ.15.01 «СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ» утверждена на заседании кафедры теории функций протокол № 10 «07» июня 2016 г.

Заведующий кафедрой (разработчика) Левицкий Б.Е.



Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры функционального анализа и алгебры протокол № 14 «07» июня 2016 г.

Заведующая кафедрой (выпускающей) Барсукова В.Ю.



Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук протокол № 3 «20» июня 2016 г.

Председатель УМК факультета Титов Г.Н.



Рецензенты:

Гусаков Валерий Александрович, канд. физ. – мат. наук,  
директор ООО «Просвещение – Юг»

Засядко О.В., доцент пед. наук, доцент кафедры информационных образовательных технологий ФГБОУ ВО КубГУ

## **1 Цели и задачи изучения дисциплины.**

### **1.1 Цель освоения дисциплины.**

Целями освоения дисциплины «Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения» являются: знакомство с теорией и применением стохастических дифференциальных уравнений, как обобщение обыкновенных дифференциальных уравнений, умение решать простейшие стохастические дифференциальные уравнения, изучение различных методов исследования качественных свойств решений стохастических дифференциальных уравнений, установление связи с другими математическими дисциплинами; привить обучающимся умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу по дисциплине и вести научно-исследовательскую работу.

### **1.2 Задачи дисциплины.**

Задачи преподавания дисциплины «Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения» состоят в том, что в итоге изучения дисциплины студент должен:

- знать и уметь излагать включенные в программу зачета определения, утверждения и их доказательства;
- уметь применять на практике методы решения задач теории случайных процессов, в том числе, для построения моделей и решения задач;
- владеть методологией и навыками решения научных и практических задач.

### **1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы.**

Дисциплина «Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения» относится к вариативной части Блока 1 учебного плана и является дисциплиной по выбору.

Изучение дисциплины предполагает знания основ теории вероятностей, математической статистики, математического анализа, методов решения дифференциальных уравнений и входит в вариативную часть блока 1 «Обязательные дисциплины (электронные курсы)» подготовки бакалавров по направлению «Математика, Математическое моделирование».

Изучив эту дисциплину, учащийся должен научиться исследовать качественные свойства решений некоторых простейших стохастических дифференциальных уравнений находить и решения простейших стохастических дифференциальных уравнений.

### **1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.**

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся компетенций: ОПК-1, ОПК-3 и ПК-3.

| № п.п. | Индекс компетенции | Содержание компетенции (или её части)  | В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны                                    |  |  |
|--------|--------------------|--|--|--|--|
|        |                    |  | знать  | уметь  | владеть  |
| 1.     | ОПК-1              | готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, | - основные понятия, определения и утверждения дисциплины, методы исследования и решения задач. | - применять полученные при изучении дисциплины знания к решению задач. | - навыками практического использования теории дисциплины при решении теоретических и прикладных задач. |

| №<br>п.п. | Индекс<br>компетенции | Содержание<br>компетенции (или<br>её части)  | В результате изучения учебной дисциплины<br>обучающиеся должны  |   |   |
|-----------|-----------------------|--|---|---|---|
|           |                       |  | знать   | уметь   | владеть   |
|           |                       | дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности |   |   |   |
| 2.        | ОПК-3                 | способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе   | - основные тенденции развития в соответствующей области;<br>- теоретические и методологические основы исследования проблем в области дисциплины;<br>- историю становления и развития основных научных подходов в области дисциплины;<br>- актуальные проблемы тенденции развития исследований в области дисциплины. | - ориентироваться в постановках задач;<br>- формулировать результат;<br>- осуществлять отбор материала, характеризующего достижения в области дисциплины; | - языком предметной области дисциплины;<br>- проблемно-задачной формой представления знаний в области дисциплины. |

| № п.п. | Индекс компетенции | Содержание компетенции (или её части)  | В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны                          |  |  |
|--------|--------------------|--|--|--|--|
|        |                    |  | знать  | уметь                                    | владеть  |
| 3.     | ПК-3               | способностью строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата | - понятия, определения дисциплины и формулировки всех основных утверждений и теорем. | - системно мыслить в области дисциплины. | - основными методами и приемами рассуждений в рамках дисциплины. |

## 2. Структура и содержание дисциплины.

### 2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ.

Общая трудоёмкость дисциплины составляет: 2 зачетные единицы (72 часа, из них – 50,2 ч. контактной работы: лекционных 24 ч., лабораторных 24 ч., КСР 2 ч., ИКР 0,2 ч.; 21,8 ч. СР).

| Вид учебной работы   | Всего часов | Семестры (часы) |
|--|-------------|-----------------|
|  |             | 8               |
| <b>Контактная работа, в том числе:</b>                     | <b>50,2</b> | <b>50,2</b>     |
| <b>Аудиторные занятия (всего):</b>                         | <b>48</b>   | <b>48</b>       |
| Занятия лекционного типа                                   | 24          | 24              |
| Лабораторные занятия                                       | 24          | 24              |
| Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия) | -           | -               |
| <b>Иная контактная работа:</b>                             | <b>2,2</b>  | <b>2,2</b>      |
| Контроль самостоятельной работы (КСР)                      | 2           | 2               |
| Промежуточная аттестация (ИКР)                             | 0,2         | 0,2             |
| <b>Самостоятельная работа, в том числе:</b>                | <b>21,8</b> | <b>21,8</b>     |
| Проработка учебного материала                              | 8           | 8               |
| Выполнение индивидуальных заданий                          | 8           | 8               |
| Подготовка к текущему контролю                             | 5,8         | 5,8             |
| <b>Контроль:</b>   | <b>-</b>    | <b>-</b>        |
| Подготовка к экзамену                                      | -           | -               |
| <b>Общая трудоемкость</b>                                  | <b>72</b>   | <b>72</b>       |
| час.   | <b>72</b>   | <b>72</b>       |
| <b>в том числе контактная работа</b>                       | <b>50,2</b> | <b>50,2</b>     |
| зач. ед  | <b>2</b>    | <b>2</b>        |

### 2.2 Структура дисциплины:

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины. Разделы дисциплины, изучаемые в 8 семестре (очная форма)

| № | Наименование разделов  | Количество часов |                   |    |    |                      |
|---|--|------------------|-------------------|----|----|----------------------|
|   |  | Всего            | Аудиторная работа |    |    | Внеаудиторная работа |
|   |  |                  | Л                 | ПЗ | ЛР | СРС                  |
| 1 | 2  | 3                | 4                 | 5  | 6  | 7                    |
| 1 | Введение. Задачи и модели, приводящие к стохастическим аналогам обыкновенных дифференциальных уравнений. | 7                | 2                 |    | 2  | 3                    |
| 2 | Элементы теории вероятностей и случайных процессов.  | 9                | 3                 |    | 3  | 3                    |
| 3 | Основные понятия теории случайных процессов.   | 9                | 3                 |    | 3  | 3                    |
| 4 | Элементы теории мартингалов.   | 11               | 4                 |    | 4  | 3                    |
| 5 | Стохастический интеграл.   | 11               | 4                 |    | 4  | 3                    |
| 6 | Стохастические дифференциальные уравнения.   | 11               | 4                 |    | 4  | 3                    |
| 7 | Применения стохастических дифференциальных уравнений.  | 11,8             | 4                 |    | 4  | 3,8                  |
|   | <i>Итого по дисциплине:</i>  |                  | 24                | -  | 24 | 21,8                 |

## 2.3 Содержание разделов дисциплины:

### 2.3.1 Занятия лекционного типа.

| №  | Наименование раздела   | Содержание раздела  | Форма текущего контроля        |
|----|--|---|--------------------------------|
| 1  | 2  | 3   | 4                              |
| 1. | Введение. Задачи и модели, приводящие к стохастическим аналогам обыкновенных дифференциальных уравнений. | Стохастические модели, возникающие в физике, технике, биологии и финансовой математике.   | Ответы на вопросы, блиц-опрос. |
| 2. | Элементы теории вероятностей и случайных процессов   | Вероятностное пространство, случайные величины, распределения, моменты, случайные процессы.   | Ответы на вопросы, блиц-опрос. |
| 3. | Основные понятия теории случайных процессов.   | Случайные процессы и их вероятностные характеристики. Конечномерные распределения случайного процесса. Теорема Колмогорова. Моментные характеристики случайного процесса. Основные классы случайных процессов. Гауссовские случайные процессы. Случайные процессы с конечными моментами второго порядка. Стационарные случайные процессы. Марковские процессы. Диффузионные процессы. | Ответы на вопросы, блиц-опрос. |
| 4. | Элементы теории мартингалов.   | Стационарные случайные последовательности. Линейные преобразования случайных последовательностей. Цепи Маркова. Разностные стохастические уравнения. Мартингалы с дискретным временем.  |                                |

|    |  |   |                                |
|----|--|---|--------------------------------|
|    |  | Случайные функции. Элементы анализа случайных функций. Стационарные случайные функции. Случайные функции с ортогональными и независимыми приращениями. Мартингалы (непрерывное время). Винеровский процесс. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы с дискретным и непрерывным временем. Фундаментальные неравенства. Теоремы о сходимости. Локальные мартингалы и семимартингалы. Разложение Дуба-Мейера. Непрерывные и квадратично интегрируемые мартингалы  |                                |
| 5. | Стохастический интеграл.                   | Теорема о плотности пространства ступенчатых процессов в пространстве предсказуемых процессов, интегрируемых с квадратом по характеристике локального квадратично интегрируемого мартингала. Стохастический интеграл от ступенчатого процесса по квадратично интегрируемому мартингалу и его свойства. Определение и свойства стохастического интеграла от предсказуемого процесса по локальному квадратично интегрируемому мартингалу. Семимартингалы. Стохастический интеграл по семимартингалу. Случайные меры и их компенсаторы. Целочисленные случайные меры. Мартингальные меры. Стохастический интеграл по мартингальной мере. Формула Ито. Оценки моментов стохастических интегралов по непрерывным локальным мартингалам и по мартингальным мерам.   | Ответы на вопросы, блиц-опрос. |
| 6. | Стохастические дифференциальные уравнения. | Лемма Гронуолла–Беллмана. Стохастическая лемма Гронуолла. Определение стохастического дифференциального уравнения по компонентам семимартингалов и его решения. Теорема существования и единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения. Слабая сходимость и относительная компактность семейств случайных процессов с непрерывными траекториями и семейств случайных процессов с непрерывными справа и имеющими пределы слева траекториями. Теорема существования слабого решения стохастического дифференциального уравнения. Стохастическое дифференциальное уравнение Ито по стандартному винеровскому процессу. Диффузионные процессы как решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Уравнения А.Н. Колмогорова. | Ответы на вопросы, блиц-опрос. |
| 7. | Применения стохастических                  | Проблемы фильтрации. Задача об оптимальной остановке. Стохастическое управление. Диффузионная модель цены акций: от модели  | Ответы на вопросы, блиц-опрос. |

|                             |  |  |
|-----------------------------|--|--|
| дифференциальных уравнений. | Башелье к модели Самюэлсона. Опционы, справедливая цена. Формула Блэка-Шоулса. Оптимальные инвестиции и потребление. |  |
|-----------------------------|--|--|

### 2.3.2 Занятия семинарского типа.

Занятия семинарского типа не предусмотрены.

### 2.3.3 Лабораторные занятия.

| №     | Наименование лабораторных работ  | Форма текущего контроля      |
|-------|--|------------------------------|
| 1     | 3  | 4                            |
| 1. 11 | Введение. Задачи и модели, приводящие к стохастическим аналогам обыкновенных дифференциальных уравнений. | Отчет по лабораторной работе |
| 2. 22 | Элементы теории вероятностей и случайных процессов   | Отчет по лабораторной работе |
| 3.    | Основные понятия теории случайных процессов.   | Отчет по лабораторной работе |
| 4.    | Элементы теории мартингалов.   | Отчет по лабораторной работе |
| 5.    | Стохастический интеграл.   | Отчет по лабораторной работе |
| 6.    | Стохастические дифференциальные уравнения.   | Отчет по лабораторной работе |
| 7.    | Применения стохастических дифференциальных уравнений   | Отчет по лабораторной работе |

### 2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Курсовые работы не предусмотрены.

## 2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

| № | Вид СРС                       | Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы   |
|---|-------------------------------|---|
| 1 | 2                             | 3   |
| 1 | Проработка учебного материала | 1. Дифференциальные уравнения : учебник / . - 4-е изд. - Москва : Физматлит, 2002. - 252 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6). - ISBN 978-5-9221-0277-3 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=145012">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=145012</a> |



|   |                                   |   |
|---|-----------------------------------|---|
|   |                                   | <p>2. Миллер, Б.М. Теория случайных процессов в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Б.М. Миллер, А.Р. Панков. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2007. — 320 с. — Режим доступа: <a href="https://e.lanbook.com/book/48168">https://e.lanbook.com/book/48168</a></p>  |
| 2 | Выполнение индивидуальных заданий | <p>1. Дифференциальные уравнения : учебник / . - 4-е изд. - Москва : Физматлит, 2002. - 252 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6). - ISBN 978-5-9221-0277-3 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=145012">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=145012</a></p> <p>2. Миллер, Б.М. Теория случайных процессов в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Б.М. Миллер, А.Р. Панков. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2007. — 320 с. — Режим доступа: <a href="https://e.lanbook.com/book/48168">https://e.lanbook.com/book/48168</a></p> |
| 3 | Подготовка к текущему контролю    | <p>1. Дифференциальные уравнения : учебник / . - 4-е изд. - Москва : Физматлит, 2002. - 252 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6). - ISBN 978-5-9221-0277-3 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=145012">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=145012</a></p> <p>2. Миллер, Б.М. Теория случайных процессов в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Б.М. Миллер, А.Р. Панков. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2007. — 320 с. — Режим доступа: <a href="https://e.lanbook.com/book/48168">https://e.lanbook.com/book/48168</a></p> |

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

### **3. Образовательные технологии.**

При изучении данного курса используются как традиционные лекции и лабораторные занятия, так и современные интерактивные образовательные технологии.

Цель лабораторных занятий – научить студента применять полученные на лекциях теоретические знания к решению и исследованию конкретных задач.

К образовательным технологиям также относятся интерактивные методы обучения. Интерактивность подачи материала по дисциплине «Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения» предполагает не только взаимодействия вида «преподаватель - студент» и «студент - преподаватель», но и «студент - студент». Все эти виды взаимодействия хорошо достигаются при изложении материала, в ходе дискуссий. Также используются занятия- визуализации и доклады студентов.

### Дискуссия

Возможность дискуссии предполагает умение высказать собственную идею, предложить свой путь решения, аргументировано отстаивать свою точку зрения, связно излагать мысли. Полезны следующие задания: составление плана решения задачи, поиск другого способа решения, сравнение различных способов решения, проведение выкладок для решения задачи и выкладок для проверки правильности полученного решения, рассмотрение задач с лишними и недостающими данными. Студентам предлагается проанализировать варианты решения, высказать своё мнение. Основным объемом использования интерактивных методов обучения реализуется именно в ходе дискуссий.

Общие вопросы, которые выносятся на дискуссию:

Описание модели.

Исследование модели или поиск различных способов решений задачи.

Выбор среди рассматриваемых способов наиболее рационального.

### Занятие-визуализация.

В данном типе передача преподавателем информации студентам сопровождается показом различных рисунков, структурно-логических схем, опорных конспектов, диаграмм и т. п. (например, с помощью слайдов) .

Всего учебным планом предусмотрено 24 часа в интерактивной форме

| Семестр | Вид занятия          | Используемые интерактивные образовательные технологии   | Количество часов |
|---------|----------------------|---|------------------|
| 8       | Лабораторные занятия | Занятие-визуализация: «Задачи и модели, приводящие к стохастическим аналогам обыкновенных дифференциальных уравнений» | 4                |
|         |                      | Дискуссия «Применения стохастических дифференциальных уравнений»  | 10               |
|         |                      | Занятие-визуализация: «Элементы теории мартингалов»   | 10               |
| Итого:  |                      |   | 24               |

Самостоятельная работа студентов является неотъемлемой частью процесса подготовки. Под самостоятельной работой понимается часть учебной планируемой работы, которая выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа направлена на усвоение системы научных и профессиональных знаний, формирования умений и навыков, приобретение опыта самостоятельной творческой деятельности. СРС помогает формировать культуру мышления студентов, расширять познавательную деятельность.

Виды самостоятельной работы по курсу:

**а) по целям:** подготовка к лекциям, к практическим занятиям, к контрольной работе, к коллоквиуму.

**б) по характеру работы:** изучение литературы, конспекта лекций; поиск литературы в библиотеке; конспектирование рекомендуемой для самостоятельного изучения научной литературы; решение задач, тестов

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций со студентом при помощи электронной информационно-образовательной среды ВУЗа.

#### 4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

##### 4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля.

**Задачи для контрольной работы:**

###### Задача 1.

Пусть  $X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  — функция, принимающая лишь счетное число значений  $a_1, a_2, \dots \in \mathbf{R}$ .

а) Покажите, что  $X$  есть случайная величина тогда и только тогда, когда

$$X^{-1}(a_k) \in \mathcal{F} \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots$$

б) Предположим, что справедливы включения а) . Покажите, что

$$E[|X|] = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| P[X = a_k].$$

с) При выполнении включений а) и при условии  $E[|X|] < \infty$  покажите, что

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P[X = a_k].$$

###### Задача 2.

Случайный процесс  $X_t$  называется *стационарным*, если  $\{X_t\}$  имеет то же распределение, что и  $\{X_{t+h}\}$  для любого  $h > 0$ . Докажите, что броуновское движение  $B_t$  имеет стационарные приращения, т. е. что процесс  $\{B_{t+h} - B_t\}_{h \geq 0}$  имеет одно и то же распределение для всех  $t$ .

**Задача 3.**

Пусть  $X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  — случайная величина. Функция распределения  $F$  величины  $X$  определяется формулой

$$F(x) = P[X \leq x].$$

а) Докажите, что  $F$  обладает следующими свойствами:

(i)  $0 \leq F \leq 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ ;

(ii)  $F$  является возрастающей (точнее, неубывающей);

(iii)  $F$  непрерывна справа, т. е.  $F(x) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} F(x + h)$ .

б) Пусть функция  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  измерима и  $E[|g(X)|] < \infty$ . Докажите, что

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x),$$

где интеграл в правой части равенства понимается в смысле Лебега—Стилтьеса.

**Задача 4.**

С помощью формулы Ито запишите следующие случайные процессы  $X_t$  в стандартной форме

$$dX_t = u(t, \omega)dt + v(t, \omega)dB_t,$$

соответствующим образом выбрав  $u \in \mathbf{R}^n$ ,  $v \in \mathbf{R}^{n \times m}$  и размерности  $n, m$ :

- a)  $X_t = B_t^2$ , где  $B_t$  — одномерное броуновское движение;
- b)  $X_t = 2 + t + e^{B_t}$  ( $B_t$  — одномерное броуновское движение);
- c)  $X_t = B_1^2(t) + B_2^2(t)$ , где  $(B_1, B_2)$  — двумерное броуновское движение;
- d)  $X_t = (t_0 + t, B_t)$  ( $B_t$  — одномерное броуновское движение);
- e)  $X_t = (B_1(t) + B_2(t) + B_3(t), B_2^2(t) - B_1(t)B_3(t))$ , где  $(B_1, B_2, B_3)$  — трехмерное броуновское движение.

Докажите с помощью формулы Ито, что

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds.$$

#### 4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации.

##### Вопросы для подготовки к зачету:

1. Стохастические модели, возникающие в физике, технике, биологии и финансовой математике.
2. Вероятностное пространство, случайные величины, распределения, моменты, случайные процессы.
3. Случайные процессы и их вероятностные характеристики.
4. Конечномерные распределения случайного процесса.
5. Моментные характеристики случайного процесса.
6. Основные классы случайных процессов.
7. Гауссовские случайные процессы.
8. Случайные процессы с конечными моментами второго порядка.
9. Стационарные случайные процессы.
10. Марковские процессы.
11. Диффузионные процессы.
12. Стационарные случайные последовательности.
13. Линейные преобразования случайных последовательностей.
14. Цепи Маркова.
15. Разностные стохастические уравнения.
16. Мартингалы с дискретным временем. Случайные функции.
17. Стационарные случайные функции.
18. Случайные функции с ортогональными и независимыми приращениями.
19. Мартингалы (непрерывное время).
20. Винеровский процесс.
21. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы с дискретным и непрерывным временем.
22. Фундаментальные неравенства.
23. Теоремы о сходимости.
24. Локальные мартингалы и семимартингалы.

25. Разложение Дуба-Мейера.
26. Непрерывные и квадратично интегрируемые мартингалы
27. Теорема о плотности пространства ступенчатых процессов в пространстве предсказуемых процессов, интегрируемых с квадратом по характеристике локального квадратично интегрируемого мартингала.
28. Стохастический интеграл от ступенчатого процесса по квадратично интегрируемому мартингалу и его свойства.
29. Определение и свойства стохастического интеграла от предсказуемого процесса по локальному квадратично интегрируемому мартингалу.
30. Стохастический интеграл по мартингальной мере.
31. Формула Ито.
32. Лемма Гронуолла–Беллмана.
33. Стохастическая лемма Гронуолла.
34. Определение стохастического дифференциального уравнения по компонентам семимартингалов и его решения.
35. Теорема существования и единственности сильного решения стохастического дифференциального уравнения.
36. Теорема существования слабого решения стохастического дифференциального уравнения.
37. Стохастическое дифференциальное уравнение Ито по стандартному винеровскому процессу.
38. Диффузионные процессы как решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Уравнения А.Н. Колмогорова.
39. Проблемы фильтрации.
40. Задача об оптимальной остановке.
41. Стохастическое управление.
42. Диффузионная модель цены акций: от модели Башелье к модели Самюэлсона.
43. Опционы, справедливая цена. Формула Блэка-Шоулса.

| Критерии оценивания  | Количество баллов |
|--|-------------------|
| Ответ грамотный, логично изложенный, существенные неточности отсутствуют. Проявлена достаточная научная и образовательнoкультурная эрудиция. | зачет             |
| В ответе значительные пробелы в фундаментальных знаниях, допускаются существенные ошибки.  | незачет           |

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

– в печатной форме увеличенным шрифтом,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

## **5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.**

### **5.1 Основная литература:**

1. Дифференциальные уравнения : учебник / . - 4-е изд. - Москва : Физматлит, 2002. - 252 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6). - ISBN 978-5-9221-0277-3 ; То же [Электронный ресурс]. -

URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=145012>

2. Миллер, Б.М. Теория случайных процессов в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Б.М. Миллер, А.Р. Панков. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2007. — 320 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/48168>

### **5.2 Дополнительная литература:**

1. Булинский, А.В. Теория случайных процессов [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2005. — 400 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59319>

2. Асташова, И.В. Дифференциальные уравнения / И.В. Асташова, В.А. Никишкин. - Москва : Евразийский открытый институт, 2011. - Ч. 2. - 108 с. - ISBN 978-5-374-00487-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90342>

### **5.3. Периодические издания:**

Не используются при изучении курса.

## **6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.**

1. Электронная библиотечная система издательства "Лань" – <http://e.lanbook.com/>

2. Электронная библиотечная система "Юрайт" – <http://www.biblio-online.ru/>

## **7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.**

Самостоятельная работа студента является необходимой и крайне важной при изучении любого теоретического или практического учебного курса и должна быть правильно организована. Прежде всего, необходимо, чтобы эта работа была систематической и регулярной. Самостоятельная работ делится между теоретической частью курса и практической, но это деление не носит формального характера, поскольку решение практических задач предусматривает знание основных теоретических понятий и методов, а теоретические знания в свою очередь не могут усваиваться без практической работы с теоретическими конструкциями.

При подготовке к практическому занятию студенту целесообразно познакомиться сначала с теоретическими понятиями, относящимися к данному разделу, чтобы уяснить для себя смысловую часть работы. Для этого рекомендуется прочитать лекции или учебники, в которых освещаются соответствующие вопросы. Естественно, студенту необязательно использовать лишь литературу, указанную в библиографии, но на начальных стадиях изучения материала это делать желательно. Со временем расширение использования литературных источников можно лишь приветствовать. Перед решением домашних задач студенту целесообразно познакомиться сначала с содержанием предыдущего занятия, уяснить для себя методы решения задач рассматриваемого типа. При этом у студента естественно возникают затруднения и вопросы, которые он может задать преподавателю на следующем практическом занятии. Любое практическое занятие начинается с разборов вопросов и затруднений по домашнему заданию. Форма практических занятий, особенно занятий лабораторных, предусматривает диалог между студентами и преподавателем. Практика показывает, что студенты охотно прибегают к прямому диалогу с преподавателем и умеют извлечь для себя пользу из соответствующего диалога. Каждая тема заканчивается итоговой контрольной работой с выставлением оценки. Студент должен получить по каждой контрольной работе хотя бы удовлетворительную оценку, иначе он получает дополнительное задание с обязательным условием отработки неудовлетворительной оценки по соответствующей контрольной работе. Эти отработки принимаются преподавателем, ведущим практические занятия в течение всего семестра. По результатам контрольных работ и их отработкам студенту выставляется итоговая оценка по практике, определённым образом влияющая на его зачётную оценку.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

### **8.1 Перечень информационных технологий**

- Сбор, хранение, систематизация и выдача учебной и научной информации;
- Обработка текстовой, графической и эмпирической информации;
- Подготовка, конструирование и презентация итогов исследовательской и аналитической деятельности;
- Использование электронных презентаций при проведении практических занятий;
- Работа с информационными справочными системами;
- Использование электронной почты преподавателей и обучающихся для рассылки, переписки и обсуждения возникших учебных проблем.

### **8.2 Перечень необходимого программного обеспечения**

- Офисный пакет приложений Microsoft Office.

### **8.3 Перечень необходимых информационных справочных систем**

- Электронные ресурсы библиотеки КубГУ – <https://kubsu.ru/node/1145> (см. п. 6)
- Могут использоваться иные информационно-поисковые системы сети Интернет.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**



| № | Вид работ                                  | Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) и оснащенность  |
|---|--|---|
|   | Лекционные занятия                         | Лекционная аудитория, специально оборудованная мультимедийными демонстрационными комплексами, учебной мебелью   |
|   | Лабораторные занятия                       | Помещение для проведения лабораторных занятий оснащенное учебной мебелью, доской маркером или мелом   |
|   | Групповые (индивидуальные) консультации    | Помещение для проведения групповых (индивидуальных) консультаций, учебной мебелью, доской маркером или мелом  |
|   | Текущий контроль, промежуточная аттестация | Помещение для проведения текущей и промежуточной аттестации, оснащенное учебной мебелью.  |
|   | Самостоятельная работа                     | Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета |

**Рецензия**  
на рабочую программу дисциплины  
**«Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения»**  
по направлению подготовки 01.03.01 Математика,  
очной формы обучения.

Составитель рабочей программы:  
доцент, канд. физ.-мат. наук ФГБОУ ВО «КубГУ» Бирюк А.Э.

Рабочая программа полностью соответствует требованиям ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.01 Математика (уровень бакалавриата).

Рабочая программы содержит тематический план, который раскрывает последовательность изучения тем и разделов программы, с указанием практических часов.

Содержащийся перечень и количество практических занятий достаточен для формирования уровня подготовки, определенного требованиями ФГОС.

Перечень тем и разделов, которые должны изучить слушатели, а также основные требования к уровню подготовки слушателей объема знаний и умений, которым они должны обладать по каждой из перечисленных тем. Информация о видах и объеме учебной работы содержит тематику лекционных занятий и лабораторных работ, призванных сформировать у студентов базовые знания и формирование основных навыков, необходимых для решения задач, возникающих в практической деятельности.

Самостоятельные задания развивают знания, умения и навыки, полученные в результате изучения предмета.

Перечень средств обучения исчерпывающий и соответствует предъявляемым требованиям.

Список литературы содержит достаточный состав источников, необходимых для качественного обучения студентов.

Рабочая программа дисциплины «Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения» способствует приобретению и развитию умений и навыков для решения профессиональных задач при помощи стохастических дифференциальных уравнений, формированию компетентного специалиста.

Рецензент,  
Гусаков В.А.,  
канд. физ. – мат. наук,  
директор ООО «Прозвещение Юг».



*Гусаков*

**Рецензия**  
на рабочую программу дисциплины  
**«Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения»**  
по направлению подготовки 01.03.01 Математика,  
очной формы обучения.  
Составитель рабочей программы:  
канд. физ.-мат. наук, доцент Бирюк А.Э.

Рецензируемая рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.01 Математика.

Тематический план имеет оптимальное распределение часов по разделам и темам по очной форме обучения, в соответствии с учебным планом.

Указан перечень тем и разделов, которые должны изучить слушатели, а также основные требования к уровню подготовки слушателей объему знаний и умений, которым они должны обладать по каждой из перечисленных тем.

Содержащийся перечень тем лабораторных занятий достаточен для формирования уровня подготовки, определенного требованиями ФГОС.

В программе приведены оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение.

Профильная направленности в программе реализуется путем использования приобретенных знаний и умений в решениях задач профильной направленности, выполнении исследовательских и проектных работ по своей специальности с использованием математических методов, получения опыта использования математики в содержательных и профессионально значимых ситуациях.

Изучение дисциплины формирует весь необходимый перечень компетенций, предусмотренных ФГОС ВО. Представленная программа содержательна, отвечает требованиям ФГОС ВО по построению и содержанию, поставленным задачам, включает достаточное количество разнообразных элементов, направленных на развитие умственных, творческих способностей обучающегося.

Засядко О.В., доцент, канд. пед. наук, доцент кафедры информационных образовательных технологий ФГБОУ ВО КубГУ.

