

Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кубанский государственный университет»
Факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе,
качеству образования – первый
проректор

Иванов А.Г.

«01» июля 2016 г.



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.06.02 КОНЕЧНЫЕ ГРУППОИДЫ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Направление подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль): Алгебра, теория чисел и дискретный анализ

Программа подготовки академическая

Форма обучения очная

Квалификация (степень) выпускника бакалавр

Краснодар 2016

Рабочая программа дисциплины «КОНЕЧНЫЕ ГРУППОИДЫ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки по профилю «Алгебра, теория чисел и дискретный анализ».

Программу составил

Г.Н. Титов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Титов

Рабочая программа дисциплины «КОНЕЧНЫЕ ГРУППОИДЫ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ» утверждена на заседании кафедры (разработчика) функционального анализа и алгебры протокол № 14 «7» июня 2016 г.

Заведующая кафедрой (разработчика) Барсукова В.Ю.

Барсукова

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры (выпускающей) функционального анализа и алгебры протокол № 14 «7» июня 2016 г.

Заведующая кафедрой (выпускающей) Барсукова В.Ю.

Барсукова

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук протокол № 3 «20» июня 2016 г.

Председатель УМК факультета Титов Г.Н.

Титов

Рецензенты:

Терещенко И.В., заведующий кафедрой общей математики ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», кандидат физ.-мат. наук, доцент;

Гаркуша О.В., доцент кафедры информационных технологий ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», кандидат физ.-мат. наук, доцент.

1. Цели и задачи освоения дисциплины.

1.1 Цель дисциплины

Дальнейшее формирование у студентов приобретенных на первых двух курсах знаний по фундаментальной и компьютерной алгебре.

1.2. Задачи дисциплины

Получение базовых теоретических сведений по алгебраическим системам с одной бинарной операцией, в том числе по теории групп; развитие познавательной деятельности и приобретение практических навыков работы с алгебраическими понятиями

1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Конечные группоиды и их представления» относится к блоку 1 вариативной части (В) дисциплин по выбору студента (ДВ) учебного плана, являющегося структурным элементом ООП ВО. Названный курс продолжает начатое на первых двух курсах алгебраическое образование студентов соответствующего направления подготовки. Знания, полученные в этом курсе, могут быть использованы в дискретной математике и математической логике, теории чисел, методах оптимизации и др. Слушатели должны владеть математическими знаниями в рамках программы курса «Фундаментальная и компьютерная алгебра».

1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

При освоении дисциплины вырабатывается общематематическая культура: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения алгебраических задач и задач, связанных с компьютерными приложениями алгебраических методов. Получаемые знания лежат в основе математического образования и необходимы для понимания и освоения всех курсов математики, а также для продолжения обучения в магистратуре по соответствующему направлению подготовки.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций: ОК-7, ОПК-1, ПК-2.

№ п. п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
1.	ОК-7	Способностью к самоорганизации и самообразованию.	основные понятия и утверждения дисциплины, пути поиска информации, связанной с этими понятиями, для дальнейшего самостоятельного изучения;	использовать полученные знания и различные источники литературы с целью самостоятельного продолжения исследований по тематике дисциплины;	навыками самоорганизации и самообразования в процессе обучения и в ходе подготовки творческих реферативных отчетов;
2.	ОПК-1	Готовностью использовать фундаментальные знания в области алгебры в будущей профессиональной деятельности.	основные теоретические результаты и алгоритмы, позволяющие компьютерную реализацию	использовать приобретенные знания в последующей научной работе или в будущей профессии	некоторыми навыками исследований в теории групп, некоторыми навыками построения и реализации алгоритмов с целью их

№ п. п.	Индекс компе- тенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обу- чающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
			решения неко- торых вопро- сов дисципли- ны;	ональной дея- тельности;	использования для решения вопросов в области научно- профессиональной деятельности
3.	ПК-2	Способностью ма- тематически кор- ректно ставить есте- ственно научные задачи, знание по- становок классиче- ских задач матема- тики.	классические задачи, соот- ветствующие тематике кур- са;	математически корректно формулиро- вать задачи по теории групп;	навыками исполь- зования решений известных задач для определения путей подхода к решению возника- ющих по теме кур- са заданий.

2 Структура и содержание дисциплины

2.1 Распределение трудоемкости дисциплины по видам работ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы (108 часов, из них контактных 76,2 часов: лекционные 36 часов, лабораторные занятия 36 часов, контролируемая самостоятельная работа 4 часа и зачет 0,2 часа; самостоятельная работа 31,8 часа), промежуточная аттестация осуществляется в виде зачета, распределение часов по видам работ представлено в таблице.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры (часы)			
		6			
Контактная работа, в том числе:					
Аудиторные занятия (всего):	72	72	-	-	-
Занятия лекционного типа	36	36	-	-	-
Лабораторные занятия	36	36	-	-	-
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-
Иная контактная работа:					
Контроль самостоятельной работы (КСР)	4	4	-	-	-
Промежуточная аттестация (ИКР)	0,2	0,2	-	-	-
Самостоятельная работа, в том числе:					
<i>Курсовая работа</i>	-	-	-	-	-
<i>Проработка учебного (теоретического) материала</i>	8	8	-	-	-
<i>Выполнение домашних заданий</i>	8	8	-	-	-
<i>Реферативный отчет</i>	4	4	-	-	-
Подготовка к текущему контролю	11,8	11,8	-	-	-
Контроль:					
Подготовка к зачёту	-	-	-	-	-

Общая трудоемкость	час.	108	108	-	-	-
	в том числе кон- тактная работа	76,2	76,2	-	-	-
	зач. ед	3	3	-	-	-

2.2 Структура дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы дисциплины, изучаемые в 6 семестре (очная форма)

№	Наименование разделов (тем)	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеауди- торная работа СРС
			Л	ПЗ	ЛР	
1	2	3	4	5	6	7
1	Группоиды, представление конечного группоида преобразованиями	34	12	-	12	10
2	Группы, представление конечной группы подстановками смежных классов по подгруппе	34	12	-	12	10
3	Представление конечной группы в терминах образующих и соотношений	35,8	12	-	12	11,8
	Итого по дисциплине:		36	-	36	31,8

Примечание: Л – лекции, ПЗ – практические занятия / семинары, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента

2.3 Содержание разделов дисциплины

2.3.1 Занятия лекционного типа

№ п/п	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	Группоиды, представление конечного группоида преобразованиями	Отображения множеств, их виды. Бинарные операции на множествах, свойства. Группоиды: полугруппа, моноид, квазигруппа, лупа, группа, коммутативный группоид. Числовые и матричные примеры группоидов. Таблица Кэли конечного группоида. Классификация группоидов по таблице Кэли. Латинские квадраты и некоторые связанные с ними нерешенные проблемы. Умножение отображений, ассоциативность. Симметрическая полугруппа преобразований множества. Преобразования n -й степени, симметрическая полугруппа Σ_n . Симметрическая группа подстановок.	Устный опрос, контролирование подготовки доклада

		Подстановки n-й степени, симметрическая группа S_n. Умножение подстановок, записанных в цикленном виде. Понятие о подобных множествах элементов симметрической полугруппы (группы). Представление группоидов преобразованиями. Эквивалентные представления. Изоморфизм, инверсный изоморфизм группоидов. Изоморфизм инверсно изоморфных групп. Регулярные представления конечного моноида преобразованиями. Регулярные представления конечной группы подстановками. Перестановочность преобразований (подстановок) левого и правого регулярных представлений конечного моноида (конечной группы). Критерий эквивалентности левого и правого регулярного представлений конечного моноида (конечной группы).	
2	Группы, представление конечной группы подстановками смежных классов по подгруппе	Подгруппа, критерий подгруппы. Порядок элемента группы, свойства. Циклическая группа, ее подгруппы. Смежные классы группы по подгруппе, свойства. Теорема Лагранжа для конечной группы. Сопряжение элементов группы, простейшие свойства. Алгоритм сопряжения подстановок, записанных в цикленном виде. Нормальная подгруппа группы, эквивалентные определения. Прямое произведение групп (подгрупп). Теорема об инвариантах конечной абелевой группы. Факторгруппа. Гомоморфизмы групп, их виды. Ядро и образ гомоморфизма. Критерий мономорфизма. Естественный гомоморфизм. Основная теорема о гомоморфизмах групп. Обобщенная теорема Кэли о представлении группы подстановками смежных классов по подгруппе. Иллюстрация теоремы Кэли на группах диэдра D_n и на группах подстановок n-й степени.	Устный опрос, контролирование подготовки доклада
3	Представления конечных групп в терминах образующих и соотношений	Порождающее множество элементов подгруппы. Вид элементов подгруппы, порожденной данным мно-	Устный опрос, контролирование подготовки до-

		жеством элементов группы. Свободная группа. Теорема о том, что всякая группа является гомоморфным образом некоторой свободной группы. Определяющее множество соотношений группы. Метод перечисления смежных классов для обоснования построенного представления конечной группы в терминах образующих и соотношений. Генетические коды групп: абелевых групп, группы диэдра D_n, симметрической группы S_n, знакопеременной группы A_n, групп порядков pq, p^2 и p^3, где p, q – простые числа.	клада
--	--	--	-------

2.3.2 Занятия семинарского типа

Не предусмотрены.

2.3.3 Лабораторные занятия

№ п/п	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	Группоиды, представление конечного группоида преобразованиями	Классификация отображений множеств. Построение бинарной операции на конечном множестве, имеющей заданные свойства. Классификация группоидов: полугруппа, моноид, квазигруппа, лупа, группа, коммутативный группоид. Числовые и матричные примеры группоидов. Задание группоида таблицей Кэли. Классификация группоидов по таблице Кэли. Латинские квадраты и некоторые связанные с ними нерешенные проблемы. Вычисления в полугруппе преобразований Σ_n и в группе подстановок S_n. Умножение подстановок, записанных в циклическом виде. Понятие о подобных множествах элементов симметрической полугруппы (группы). Представление группоидов преобразованиями. Эквивалентные представления. Изоморфизм, инверсный изоморфизм группоидов. Изоморфизм инверсно изоморфных групп. Регулярные представления конечного моноида преобразованиями. Регулярные представления конечной группы подстановками. Перестано-	Проверка домашнего задания, реферативный доклад, контрольная работа

		вочность преобразований (подстановок) левого и правого регулярных представлений конечного моноида (конечной группы). Критерий эквивалентности левого и правого регулярного представлений конечного моноида (конечной группы).	
2	Группы, представление конечной группы подстановками смежных классов по подгруппе	Проверка подмножества элементов группы по критерию подгруппы. Описание подгрупп циклической группы. Разбиение заданной группы подстановок на односторонние смежные классы по подгруппе. Применение теоремы Лагранжа конечных групп при построении таблицы декодирования с исправлением ошибок. Сопряжение элементов группы, алгоритм сопряжения подстановок n -й степени. Иллюстрация на примерах эквивалентных определений нормальной подгруппы. Построение прямого произведения групп (подгрупп). Иллюстрация на примерах теоремы об инвариантах конечной абелевой группы. Построение таблицы Кэли факторгруппы. Классификация гомоморфизмов групп. Нахождение ядра и образ гомоморфизма. Обобщенная теорема Кэли о представлении группы подстановками смежных классов по подгруппе. Иллюстрация теоремы Кэли на группах диэдра D_n и на группах подстановок n -й степени.	Проверка домашнего задания, реферативный доклад, контрольная работа
3	Представления конечных групп в терминах образующих и соотношений	Порождающее множество элементов подгруппы. Описание подгрупп некоторых конечных групп. Задание конечной группы образующими и определяющими соотношениями, вычисления в таких группах. Применение метода перечисления смежных классов. Вычисления в абелевых группах, группе диэдра D_n , симметрической группы S_n , знакопеременной группе A_n , а также в группах порядков pq , p^2 и p^3 , где p, q – простые числа.	Проверка домашнего задания, реферативный доклад, контрольная работа, зачет

2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Курсовые работы не предусмотрены.

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

№	Наименование раздела	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
-	Группоиды, представление конечного группоида преобразованиями	Методические указания по организации самостоятельной работы, утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры протокол № 1 от 31.08.2017 г.
-	Группы, представление конечной группы подстановками смежных классов по подгруппе	Методические указания по организации самостоятельной работы, утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры протокол № 1 от 31.08.2017 г.
-	Представления конечных групп в терминах образующих и соотношений	Методические указания по организации самостоятельной работы, утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры протокол № 1 от 31.08.2017 г.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

3 Образовательные технологии

Активные и интерактивные формы, лекции, лабораторные занятия, контрольные работы, реферативно-творческие отчеты (по некоторым темам в виде презентации) и зачет. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому лабораторному занятию. Проводятся три контрольных работы (каждая продолжительностью в 1 акад. час) по темам разделов 1-3 в пункте 4.1.1. Каждый студент готовит реферативно-творческий отчет по одной из ниже предложенных в пункте 4.1.2 тем. Зачет выставляется после выполнения определенного количества (практических и теоретических) заданий контрольных работ и реферативно-творческого отчета. В случае невыполнения какого-то из приведенных требований, студенту для сдачи зачета предлагаются теоретические и практические задания в соответствии с ниже указанными пунктами 4.2.1 и 4.2.2.

К образовательным технологиям также относятся интерактивные методы обучения. Интерактивность подачи материала по дисциплине «Конечные группоиды и их представления» предполагает не только взаимодействия вида «преподаватель - студент» и «студент - преподаватель», но и «студент - студент». Все эти виды взаимодействия хорошо достигаются при изложении материала на занятиях в ходе дискуссий, а также на лабораторных занятиях в ходе студенческих реферативно-творческих отчетов с использованием компьютерных технологий.

3.1 Дискуссия

Возможность дискуссии предполагает умение высказать собственную идею, предложить свой путь решения, аргументировано отстаивать свою точку зрения, связно излагать мысли. Полезны следующие задания: составление плана решения задачи, поиск другого способа решения, сравнение различных способов решения, проведение выкладок для решения задачи и выкладок для проверки правильности полученного решения, рассмотрение задач с лишними и недостающими данными, реферативно-творческие доклады. Студентам предлагается проанализировать варианты решения, обсудить доклад, высказать своё мнение. Основным объемом использования интерактивных методов обучения реализуется именно в ходе дискуссий, как на лекционных, так и на лабораторных занятиях.

Общие вопросы, которые выносятся на дискуссию:

1. Составления плана доказательства утверждения или решения задачи.
2. Определение возможных способов доказательства утверждения или поиск различных способов решений задачи.
3. Выбор среди рассматриваемых способов наиболее рационального.
4. Обсуждение логической составляющей в формулировке той или иной теоремы, а также обсуждение возможности построения иллюстрирующих ее примеров и контрпримеров.
5. Самостоятельное составление студентами опорных заданий по теме, характеризующих глубину понимания соответствующего материала.

3.2 Использование компьютерных технологий

Применение на занятии компьютерных технологий позволяет студентам при рассмотрении определенных тем курса конечные группоиды и их представления более глубоко освоить некоторые понятия и наглядно на блок-схемах или в ходе описания компьютерных программ изучить указанные в содержании дисциплины алгоритмы. В этой связи определенные лекционные и лабораторные занятия преподавателю целесообразно проводить в виде презентации. Также в виде презентации в соответствии с темой лабораторного занятия студенты могут представлять некоторые свои реферативно-творческие отчеты.

Вид занятия (Л, ЛЗ)	Используемые интерактивные образовательные технологии	Количество часов
Л	«Латинские квадраты и некоторые связанные с ними нерешенные проблемы» (раздел 1) – лекция в виде презентации.	2
ЛЗ	«Левое и правое регулярные представления конечного моноида (конечной группы) преобразованиями (подстановками)» (раздел 1) - лабораторное занятие в виде презентации.	2
Л	«Обобщенная теорема Кэли о представлении конечной группы подстановками смежных классов по подгруппе» (раздел 2) – лекция в виде презентации.	2
Л	«Метод перечисления смежных классов при	2

	обосновании представления конечной группы в терминах образующих и соотношений» (раздел 3) – лекция в виде презентации.	
--	--	--

4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущей аттестации

Контрольные работы и реферативно-творческие отчеты оцениваются по пятибалльной системе. На лабораторных занятиях контроль осуществляется при ответе у доски и при проверке домашних заданий.

4.1.1 Примерные контрольные работы

Контрольная работа № 1

1. По таблице Кэли группоида $G = \{a, b, c\}$ определите его вид:

b	b	a	b	b	a	c	a	b
a) b	b	a ;	b) b	a	c ;	c) b	c	a .
a	a	c	a	c	a	a	b	c

2. В группе S_5 вычислите $(\alpha\beta)^{-4321}$, где $\alpha = (13)(254)$, $\beta = (25)(34)$.
3. Постройте правое и левое регулярные представления моноида $\langle \mathbb{Z}_4, \cdot \rangle$. Эквивалентны ли эти представления?
4. Изоморфизм и инверсный изоморфизм группоидов, изоморфизм инверсно изоморфных групп (теория).

Контрольная работа №2

1. Разбейте знакопеременную группу A_4 на правые смежные классы по подгруппе $H = \{e, (12)(34)\}$.
2. Среди двух данных подгрупп A и B группы G выбрать являющуюся нормальной и построить таблицу Кэли факторгруппы группы G по выбранной подгруппе, где $G = S_3$, $A = \{e, (12)\}$ и $B = \{e, (123), (132)\}$.
3. Найдите представление подстановками смежных классов по подгруппе $H = \{1; b\}$ группы диэдра $D_3 = \{1; a; a^2; b; ab; a^2b\}$, где $|a| = 3, |b| = 2$, а также $bab = a^2$.
4. Нормальная подгруппа группы, эквивалентные определения (теория).

Контрольная работа №3

1. Установить генетический код из двух слов для абелевой группы, разложимой в прямое произведение циклических подгрупп порядков 6, 10 и 20.
2. В группе диэдра $D_7 = \langle a, b | a^7 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$ для некоторых чисел $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $y \in \{0, 1\}$ выполняется равенство $a^x b^y = (ba^2)^3$. Найдите пару $(x; y)$.
3. Методом перечисления смежных классов покажите, что запись вида $\langle x; y | x^2 = y^2 = (xy)^7 = 1 \rangle$ может служить представлением группы диэдра D_7 из задания 2.
4. Теорема о том, что всякая группа (с заданной системой порождающих ее элементов) является гомоморфным образом некоторой свободной группы (теория).

4.1.2 Примерные темы реферативных докладов

1. Описание свойств бинарной операции по таблице Кэли группоида, тест ассоциативности по Лайту. Примеры (доклад на лабораторном занятии).
2. Латинские квадраты, их преобразования и применение в теории кодирования (доклад на лабораторном занятии в виде презентации).
3. Группа автоморфизмов группоида. Примеры (отчет в письменной форме).
4. Действие группы на множестве. Орбита, стационарная подгруппа. Примеры (отчет в письменной форме).
5. Транзитивность и кратная транзитивность групп подстановок. Некоторые утверждения и примеры (отчет в письменной форме).
6. Подгруппы циклических групп (доклад на лабораторном занятии в виде презентации).
7. Теоремы о гомоморфизмах групп (отчет в письменной форме).
8. Теорема Кэли о представлении конечной группы подстановками и ее обобщение (доклад на лабораторном занятии).
9. Понятия частично упорядоченного множества и решетки. Решетка подгрупп группы (отчет в письменной форме).
10. Генетические коды групп: абелевых групп, группы диэдра D_n , симметрической группы S_n , знакопеременной группы A_n (доклад на лабораторном занятии в виде презентации).
11. Генетические коды групп порядков pq , p, p^2 и p^3 , где p, q – простые числа (доклад на лабораторном занятии в виде презентации).
12. Исторические сведения о развитии теории представлений конечных групп в терминах образующих и соотношений (отчет в письменной форме).

4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация проводится в форме зачета.

4.2.1 Список теоретических вопросов (для контрольных работ и зачета)

1. Отображения множеств, их виды и примеры.
2. Бинарная операция, возможные свойства, терминология.
3. Полугруппа, моноид. Примеры. Таблица Кэли конечной полугруппы.
4. Квазигруппа, лупа. Примеры. Таблица Кэли конечной квазигруппы.
5. Латинские квадраты, некоторые связанные с ними нерешенные проблемы.
6. Группа, абелева группа. Примеры. Таблица Кэли конечной группы.
7. Умножение отображений, ассоциативность.
8. Симметрическая полугруппа преобразований множества.
9. Преобразования n -й степени, симметрическая полугруппа Σ_n и некоторые ее свойства.
10. Подстановки n -й степени, симметрическая группа S_n и некоторые ее свойства.
11. Подобные множества элементов симметрической полугруппы (группы). Примеры.
12. Представление конечного множества преобразованиями, понятие об эквивалентных представлениях. Примеры.
13. Изоморфизм и инверсный изоморфизм группоидов, изоморфизм инверсно изоморфных групп.
14. Левое и правое регулярные представления конечного моноида преобразованиями. Примеры.

15. Левое и правое регулярные представления конечной группы преобразованиями. Примеры.
16. Перестановочность преобразований (подстановок) при левом и при правом регулярном представлении конечного моноида (конечной группы).
17. Критерий эквивалентности левого и правого регулярного представлений конечного моноида (конечной группы).
18. Подгруппа, критерий подгруппы.
19. Порядок элемента группы, свойства.
20. Циклическая группа, ее подгруппы.
21. Смежные классы группы по подгруппе, свойства.
22. Теорема Лагранжа для конечной группы.
23. Сопряжение элементов группы, простейшие свойства.
24. Нормальная подгруппа группы, эквивалентные определения.
25. Прямое произведение групп (подгрупп).
26. Теорема об инвариантах конечной абелевой группы.
27. Факторгруппа.
28. Гомоморфизмы групп, их виды.
29. Ядро и образ гомоморфизма. Критерий мономорфизма.
30. Естественный гомоморфизм. Основная теорема о гомоморфизмах групп.
31. Обобщенная теорема Кэли о представлении группы подстановками смежных классов по подгруппе.
32. Порождающее множество элементов подгруппы.
33. Вид элементов подгруппы, порожденной данным множеством элементов группы.
34. Свободная группа.
35. Теорема о том, что всякая группа является гомоморфным образом некоторой свободной группы.
36. Понятие об определяющем множестве соотношений группы. Примеры.
37. Метод перечисления смежных классов с иллюстрацией на примере группы S_4 .

4.2.2 Список типовых практических заданий (для лабораторных занятий, контрольных работ и зачета)

1. Определить вид отображения, заданного по правилу $x \mapsto x^2 \quad \forall x \in X$, у которого область определения X и область значений Y соответственно равны: а) $X=Y=N$, б) $X=Y=\sqrt[3]{1}$; в) $X=Z, Y=N$; д) $X=\sqrt[4]{1}, Y=\sqrt[6]{1}$.
2. Определить виды числовых и матричных группоидов: а) $\langle N; + \rangle$; б) $\langle N; \cdot \rangle$; в) $\langle Z; - \rangle$; д) $\langle Z; + \rangle$; е) $\langle M_{2 \times 2}(Z); \cdot \rangle$; ф) $\langle M_{2 \times 3}(Z); + \rangle$.
3. Доказать, что указанное множество относительно указанной операции является группой: а) множество K^* обратимых элементов ассоциативного кольца K с единицей относительно операции умножения; б) множество $Q_p = \{ m/p^n \mid m, n \in Z \}$ p -ичных дробей относительно операции сложения чисел.
4. Доказать, что указанное множество относительно указанной операции является группой: а) множество $GL_n(K)$ всех обратимых матриц порядка n ($n \in N$) над коммутативным ассоциативным кольцом с единицей K относительно операции умножения матриц; б) множество $\sqrt[n]{1}$ всех комплексных корней n -ой степени из единицы ($n \in N$) относительно операции умножения комплексных чисел.

5. Показать, что группоид $G = \{a, b, c, d\}$ является коммутативным моноидом, но не является абелевой группой, если его таблица Кэли имеет следующий вид

a	b	c	d
b	d	b	d
c	b	a	d
d	d	d	d

6. Показать, что группоид $G = \{a, b, c, d\}$ является некоммутативной квазигруппой, но не является лупой и полугруппой, если его таблица Кэли имеет вид

a	c	b	d
c	d	a	b
d	b	c	a
b	a	d	c

7. По таблице Кэли группоида $G = \{a, b, c\}$ определите его вид:

a	a	b	a	a	c	a	b
a)	a	a	b	b)	a	b	c
	b	b	c		b	c	a
	b	b	c		b	c	b
					a	b	c

8. Выписать все латинские квадраты размеров 2×2 и 3×3 .
 9. Построить таблицу Кэли симметрической полугруппы Σ_2 .
 10. Построить таблицу Кэли симметрической группы S_3 .
 11. Представить в виде произведения независимых циклов подстановку $\alpha\beta\gamma$, где $\alpha = (13)(245)(68)$, $\beta = (2467)(385)$ и $\gamma = (182)(37)$.
 12. В группе S_5 вычислите $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{2013}$.
 13. Построить левое и правое регулярные представления моноида $G = \{a, b, c, d\}$, зная,

a	b	c	d
b	d	b	d
c	b	a	d
d	d	d	d

что его таблица Кэли имеет вид . Какой вывод можно сделать о полученных представлениях?

14. Среди группоидов $G_1 = \{a_1, b, c_1\}$, $G_2 = \{a_2, b_2, c_2\}$ и $G_3 = \{a_3, b_3, c_3\}$ найдите два изоморфных и опишите изоморфизм одного из них на другой, если известно, что таблицы Кэли этих трех группоидов имеют вид:

c_1	a_1	b_1	b_2	a_2	c_2	b_3	c_3	a_3
a_1	b_1	c_1	c_2	b_2	a_2	c_3	a_3	b_3
b_1	c_1	a_1	a_2	c_2	b_2	a_3	b_3	c_3

15. Постройте таблицы Кэли групп $\sqrt[4]{1}$ и Z_4 . Покажите, используя эти таблицы, что указанные группы изоморфны.
 16. Докажите, что множества $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ и $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ подобны в симметрической полугруппе Σ_3 .
 17. Постройте левое и правое регулярные представления в S_6 группы S_3 . Эквивалентны ли эти представления? Ответ обоснуйте.
 18. Доказать, что в мультипликативной группе G а) для элементов $a, b \in G$ при условии, что порядок элемента ab конечен выполняется равенство $|ab| = |ba|$; б) если для любого $g \in G$ порядок g не более двух, то G – абелева группа.
 19. Опишите все подгруппы циклической группы Z_{18} .

20. Сколько подгрупп имеет циклическая группа Z_{288} ?
21. Группу S_3 разбейте на правые смежные классы по подгруппе $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
22. Разбейте группу A_4 на левые смежные классы по подгруппе $\{e, (123), (132)\}$.
23. Найдите двумя способами (по определению и по алгоритму) в S_5 подстановку, сопряженную к подстановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ с помощью подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
24. Разбить группу G на классы сопряженности, если а) $G=S_4$; б) $G=A_4$.
25. В группе S_3 указать все подгруппы, которые не являются нормальными.
26. В группе A_4 указать все подгруппы, которые являются нормальными.
27. Построить таблицу Кэли прямого произведения групп $G_1 = \{a_1, b\}$ и $G_2 = \{a_2, b_2\}$, зная их таблицы Кэли $\begin{matrix} & a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \\ a_1 & & & & \\ b_1 & & & & \end{matrix}$ и $\begin{matrix} & a_2 & b_2 \\ a_2 & & \\ b_2 & & \end{matrix}$.
28. Укажите все возможные способы разложения группы подстановок $V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ в прямое произведение двух неединичных подгрупп.
29. Найдите инварианты абелевой группы, которая изоморфна группе вида $Z_{12} \times Z_{18} \times Z_{10}$.
30. Постройте таблицу Кэли факторгруппы группы A_4 по подгруппе $V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
31. Рассматриваются две мультипликативные группы S_3 и $\{-1; 1\}$. Докажите, что отображение из S_3 в $\{-1; 1\}$, ставящее в соответствие четным подстановкам число 1, а нечетным – число (-1) , является гомоморфизмом. Найдите его ядро и образ, а также определите вид этого гомоморфизма.
32. Найдите представление подстановками смежных классов по подгруппе $H = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ матричной группы $G = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
33. Найдите представление подстановками смежных классов по подгруппе $H = \{1; b\}$ группы диэдра $D_4 = \{1; a; a^2; a^3; b; ab; a^2b; a^3b\}$, где $|a| = 4, |b| = 2$, а также $bab = a^3$.
34. Показать, что $S_n = \langle (12); (13); \dots; (1n) \rangle = \langle (12); (12\dots n) \rangle$ при $n > 1$.
35. Доказать, что $A_n = \langle (i j k) \mid 1 \leq i < j < k \leq n \rangle = \langle (1 2 k) \mid 3 \leq k \leq n \rangle$ при $n > 2$.
36. Укажите какой-нибудь генетический код группы $Z_2 \times S_3$.
37. Методом перечисления смежных классов покажите, что соотношения $x^3 = y^2 = (xy)^3 = 1$ являются генетическим кодом группы A_4 .
38. Методом перечисления смежных классов покажите, что соотношения $x^2 = y^2 = (xy)^4 = 1$ являются генетическим кодом группы D_4 .
39. Найдите представление группы диэдра $D_5 = \langle a, b \mid a^5 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$ в терминах образующих и соотношений, отличное от данного в условии.
40. Найдите представление группы кватернионов $H_0 = \{1; -1; i; -i; j; -j; k; -k\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, ji = -k, ik = -j, ki = j, jk = i, kj = -i$, в терминах образующих и соотношений.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

5.1 Основная литература:

1. Каргаполов, М.И. Основы теории групп [Электронный ресурс] : учеб. пособие / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 288 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/177>.
2. Ляпин, Е.С. Упражнения по теории групп [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Е.С. Ляпин, А.Я. Айзенштат, М.М. Лесохин. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2010. — 272 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/528>

5.2 Дополнительная литература:

1. Кострикин, А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2001. — 272 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59284>.
2. Биркгоф, Г. Современная прикладная алгебра / Г. Биркгоф, Т. Барти ; пер. с англ. Ю.И. Манина. - Москва : Мир, 1976. - 400 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=464046>.
3. Серр Ж.-П., Линейные представления конечных групп / Серр Ж.-П. ; пер. с фр. В.А. Исковских ; под ред. Ю.И. Манина. - Москва : Мир, 1970. - 132 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=464078>.

6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Курош, А.Г. Теория групп [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2011. — 808 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59755>.
2. Наймарк М.А. Теория представлений групп [Электронный ресурс]. - М.: ФИЗМАТ-

7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Самостоятельная работа студента включает в себя повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к лабораторным занятиям, к контрольным работам и к зачету. Такой вид СР контролируется в ходе проверки домашних заданий, заданий контрольных работ и в ходе зачета. Предполагается самостоятельное изучение студентами теоретического материала по темам реферативно-творческих отчетов, указанных в пункте 4.1.2. Контроль осуществляется во время консультаций (вызывных или по желанию студента), а также на лабораторных занятиях.

Виды самостоятельной работы

Обязательными при изучении дисциплины «Конечные группоиды и их представления» являются следующие виды самостоятельной работы:

- разбор и самостоятельное изучение теоретического материала по конспектам лекций и по учебным пособиям из списка источников литературы;
- самостоятельное решение задач по темам лабораторных занятий;
- подготовка к контрольным работам;
- подготовка к реферативному докладу;
- подготовка к зачету.

7.1. Методические указания к самостоятельному изучению студентами теоретического материала

Для подготовки к ответам на теоретические вопросы в ходе контрольных работ и на зачете студентам достаточно использовать материал лекций. Теоретический материал содержится в учебных пособиях из списка основной литературы 1 – 2. Для изучения теоретического материала, необходимого для подготовки реферативного доклада, кроме основных источников литературы возможно использование дополнительных источников и Интернет-ресурса. В случае затруднений, возникающих у студентов в процессе самостоятельного изучения теории, преподаватель разъясняет сложные моменты на консультациях.

7.2. Методические указания к самостоятельной подготовке студентов для выполнения практических заданий лабораторных занятий

Для выполнения домашнего практического задания необходимо разобрать материал по соответствующей теме лабораторного занятия. При этом используются указания, данные преподавателем в ходе занятия, а также теоретико-практический материал, имеющийся в источниках из списка основной литературы. Если студент не смог понять приведенный в указанных источниках разбор типовых примеров в той степени, чтобы самостоятельно использовать предложенный алгоритм для решения задания, то он может получить консультацию преподавателя.

7.3. Методические указания к самостоятельной подготовке студентов к выполнению контрольных работ

В течение семестра проводятся три контрольных работы, каждая из которых длится 45 минут и состоит из трех практических и одного теоретического задания. Тематика трех контрольных работ соответствует тематике трех содержательных разделов дисциплины: группоиды, представление конечного группоида преобразованиями; группы, представление конечной группы подстановками смежных классов по подгруппе; представление конечной группы в терминах образующих и соотношений. Каждое задание оценивается по пятибалльной шкале, высокая оценка ставится при получении не менее 16 баллов, нижний порог успешности составляет 7 баллов. Для подготовки к контрольной работе необходимо выполнять задания в ходе лабораторных занятий, а также домашние задания. В процессе самоподготовки студенту желательно ознакомиться с разбором опорных по рассматриваемым темам задач, имеющих в пособиях из списка литературы. Выше в пункте 4.2.2. приведен список заданий, который включает в себя все типы практических заданий контрольных работ.

7.4. Методические рекомендации к самостоятельной подготовке студентов к реферативному докладу

Каждый студент должен подготовить в течение семестра реферативный доклад по одной из тем, предназначенной для самостоятельного изучения. Для подготовки доклада желательно кроме основных источников литературы использовать дополнительные источники, а также Интернет-ресурс. Доклад может быть представлен студентом на лабораторном занятии, возможно, в виде презентации, если тема занятия соответствует теме доклада. Также студент может представить отчет о подготовке реферативного доклада в письменной форме в конце семестра. Оформление письменного отчета должно удовлетворять требованиям: а) текст набирается 14 шрифтом на бумаге формата А 4; б) на титульном листе кроме темы также указывается факультет, направление (бакалавриат), курс, группа, ФИО студента; в) содержание материала по объему составляет 4-5 страниц; г) список литературы содержит не менее двух источников (возможно, из списка литературы в пункте 5).

7.5. Методические указания к самостоятельной подготовке студентов к зачету

Согласно учебному плану дисциплины «Конечные группоиды и их представления» итоговой формой контроля является зачет. Для сдачи зачета студент должен научиться на лабораторных занятиях решать практические задания по темам разделов 1-3, выполнять домашние задания, а также успешно выполнить три контрольные работы. Типы практических заданий на зачет соответствуют заданиям из пункта 4.2.2. Также на зачете студентам предлагаются и теоретические задания, состоящие в письменном ответе на один из вопросов, приведенных в пункте 4.2.1. Количество практических и теоретических заданий зависит от активности и результативности работы студента в течение семестра. Если при условии хорошей посещаемости и активной работы на занятиях студент по трем контрольным работам и реферативному докладу заслужил высокие оценки, то он автоматически получает зачет.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю) (при необходимости)

8.1. Перечень информационных технологий.

Не прилагается.

8.2 Перечень необходимого программного обеспечения

– Microsoft Windows

- Microsoft Office
- MATLAB

8.3 Перечень необходимых информационных справочных систем

Электронная библиотечная система eLIBRARY.RU (<http://www.elibrary.ru/>)

9 Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) и оснащенность
1	Лекционные занятия	Лекционная аудитория, специально оборудованная мультимедийными демонстрационными комплексами, учебной мебелью
2	Семинарские занятия	Специальное помещение, оснащенное учебной мебелью, презентационной техникой (проектор, экран, ноутбук) и соответствующим программным обеспечением (ПО).
3	Лабораторные занятия	Помещение для проведения лабораторных занятий оснащенное учебной мебелью, доской, маркером или мелом
4	Групповые (индивидуальные) консультации	Помещение для проведения групповых (индивидуальных) консультаций, учебной мебелью, доской, маркером или мелом
5	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Помещение для проведения текущей и промежуточной аттестации, оснащенное учебной мебелью.
6	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета

РЕЦЕНЗИЯ

на рабочую программу дисциплины (модуля) «Конечные группоиды и их представления» по направлению 02.03.01 МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ (уровень бакалавриата) по профилю подготовки АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ, подготовленную доцентом кафедры функционального анализа и алгебры КубГУ кандидатом физико-математических наук Титовым Г.Н.

Рабочая программа дисциплины «Конечные группоиды и их представления» содержит: цели и задачи освоения дисциплины; место дисциплины в структуре ООП ВО; требования к результатам освоения содержания дисциплины; структуру и содержание дисциплины; образовательные технологии; оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов; учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины; материально-техническое обеспечение дисциплины.

Название и содержание рабочей программы дисциплины «Конечные группоиды и их представления» соответствует учебному плану по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки (уровень бакалавриата) по профилю подготовки «Алгебра, теория чисел и дискретный анализ», а также соответствует ФГОС ВО по указанному направлению подготовки.

Курс «Конечные группоиды и их представления» базируется на знаниях, приобретенных студентами в течение четырех семестров при изучении курса «Фундаментальной и компьютерной алгебры». Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по содержательным разделам позволяет сочетать теоретическое обучение с практической работой по освоению основных понятий, связанных с различными типами группоидов, а также с представлением группоидов (в частности, конечных групп) преобразованиями (подстановками) и представлением групп с помощью порождающих элементов и определяющих соотношений. При освоении дисциплины вырабатывается общематематическая культура: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения алгебраических задач и задач, связанных с приложениями алгебраических методов. Некоторые темы курса включают в рассмотрение алгоритмы для решения алгебраических вопросов. Это позволяет совершенствовать у студентов алгоритмическое мышление и мотивирует их использовать полученные ранее знания по программированию. Получаемые в ходе изучения дисциплины знания лежат в основе математического образования и необходимы для понимания и освоения многих курсов математики и компьютерных наук, а также необходимы для обучения по профилю подготовки «Алгебра и дискретная математика». Приведенные методические рекомендации в пункте 7 рабочей программы должны способствовать достижению студентами глубокого понимания элементов теории конечных группоидов, а также понимания методов представления конечных группоидов в виде, удобном для компьютерной обработки.

Учитывая вышеизложенное, считаю, что рабочая программа соответствует государственным требованиям к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по направлению 02.03.01 МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ и по профилю подготовки АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ.

Заведующий кафедрой общей математики Куб ГТУ,
кандидат физико-математических наук, доцент Терещенко И.В.

Подпись

УДОСТОВЕРЮ
Назначение, увольнение, кадров

« » 20 г.

РЕЦЕНЗИЯ

на рабочую программу дисциплины «Конечные группоиды и их представления» по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» (уровень бакалавриата) по профилю подготовки «Алгебра, теория чисел и дискретный анализ», подготовленную доцентом кафедры функционального анализа и алгебры КубГУ кандидатом физ.-мат. наук Титовым Г.Н.

Рабочая программа содержит: цели и задачи освоения дисциплины; место дисциплины в структуре ООП ВО; требования к результатам освоения содержания дисциплины; структуру и содержание дисциплины; образовательные технологии; оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов; учебно-методическое, информационное и материально-техническое обеспечение дисциплины.

Название и содержание рабочей программы дисциплины соответствует ФГОС ВО по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки (квалификация (уровень бакалавриата)) по профилю подготовки «Алгебра, теория чисел и дискретный анализ».

Дисциплина базируется на знаниях, приобретенных студентами в течение четырех семестров при изучении курса «Фундаментальная и компьютерная алгебра». В процессе изучения дисциплины вырабатываются общие компетенции: способность к самоорганизации и самообразованию (ОК-7), вырабатываются обще профессиональные компетенции: готовность использовать полученные фундаментальные знания по структурной теории групп в области алгебры в будущей профессиональной деятельности (ОПК 1), а также вырабатываются профессиональные компетенции: способность математически корректно ставить естественно научные задачи, знание постановок классических задач математики (ПК-2). При освоении дисциплины кроме указанных компетенций также вырабатывается общематематическая культура: умение логически мыслить, проводить доказательства, устанавливать связи между понятиями и между утверждениями, применять полученные знания для решения задач, связанных с приложениями алгебраических методов, приобретение навыков алгоритмического мышления. Знания, полученные при изучении дисциплины, необходимы для подготовки по указанному выше профилю.

Считаю, что рабочая программа дисциплины «Конечные группоиды и их представления» соответствует государственным требованиям к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» (уровень бакалавриата) по профилю подготовки «Алгебра, теория чисел и дискретный анализ».

Доцент кафедры информационных технологий Куб ГУ,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Гаркуша О.В.

