

Министерство образования и науки Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Кубанский государственный университет»  
Факультет математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе,  
качеству образования и первый  
проректор

  
Иванов А.Г.  
«01» июня 2016 г.



## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### Б1.Б.14 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Направление подготовки 01.03.01 Математика

Направленность (профиль): Математическое моделирование;  
Преподавание математики и информатики

Программа подготовки академическая

Форма обучения очная

Квалификация (степень) выпускника бакалавр

Краснодар 2016

Рабочая программа дисциплины Б1.Б.14 Функциональный анализ составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 01.03.01 Математика

Программу составил(и):

М.В. Цалюк, доцент, канд. физ.-мат. наук, доцент



В.Ю. Барсукова, зав. каф. ФАА, к. ф.-м. н., доцент



Рабочая программа дисциплины Б1.Б.14 Функциональный анализ утверждена на заседании кафедры функционального анализа и алгебры протокол № 1 от «30» августа 2016г.

Заведующий кафедрой (разработчик) Барсукова В.Ю.



Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры функционального анализа и алгебры

протокол № 1 от «30» августа 2016г.

Заведующий кафедрой (выпускающей) Барсукова В.Ю.



Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук

протокол № 1 от «1» сентября 2016г.

Председатель УМК факультета Титов Г.Н.



Рецензенты:

К.А. Кирий, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики КубГТУ

А.В. Павлова, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования КубГУ

## **1 Цели и задачи изучения дисциплины.**

### **1.1 Цель освоения дисциплины.**

Цели освоения дисциплины определены федеральным государственным стандартом высшего образования по направлению подготовки «Математика», в рамках которой преподается дисциплина.

Целями освоения дисциплины «Функциональный анализ» являются формирование у студентов базовых знаний по функциональному анализу, математической культуры, способностей к алгоритмическому и логическому мышлению; формирование и развитие личности студентов; овладение современным аппаратом функционального анализа для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

### **1.2 Задачи дисциплины.**

Реализация требований, установленных государственными образовательными стандартами высшего образования к уровню подготовки математиков в области функционального анализа.

Задачами изучения дисциплины являются:

1. Получение студентами основных теоретических знаний.
2. Развитие познавательной деятельности.
3. Приобретение практических навыков работы с понятиями и объектами функционального анализа.

### **1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы.**

Дисциплина «Функциональный анализ» относится к базовой части Блока 1 "Дисциплины (модули)" учебного плана. Курс «Функциональный анализ» читается на 3 курсе: 5-6 семестры.

Место курса в профессиональной подготовке бакалавра определяется ролью математического анализа в формировании высококвалифицированного специалиста по направлению Математика. Данная дисциплина является основополагающей для дальнейшего изучения дисциплин высшей математики и механики.

Для успешного освоения дисциплины обучающийся должен владеть знаниями, умениями и навыками по программам дисциплин «Математический анализ», «Алгебра», «Дифференциальная геометрия и топология», «Комплексный анализ».

### **1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.**

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся профессиональных компетенций (ОПК-1, ОПК-3, ПК-3):

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
1.	ОПК-1	готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, ком-	возможные сферы их связи и приложения в других областях математического знания	применять полученные навыки в других областях математического знания и дисципли-	навыками применения полученных знаний в других областях

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
		плексного и функционального анализа и т.д. в будущей профессиональной деятельности	и дисциплинах естественно-научного содержания	плинах естественно-научного содержания	математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания
2.	ОПК-3	способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе	основные понятия, определения и свойства объектов функционального анализа; основные методы функционального анализа	классифицировать задачи, обосновывать выбор метода их решения; корректно применять современный инструментальный функционального анализа для исследований; работать с имеющейся в этой области литературой	навыками применения аппарата функционального анализа для исследований
3.	ПК-3	способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	основные понятия, определения и свойства объектов функционального анализа; формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства	доказывать утверждения функционального анализа; решать задачи функционального анализа	аппаратом функционального анализа; методами доказательства утверждений

## 2. Структура и содержание дисциплины.

### 2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ.

Общая трудоёмкость дисциплины составляет: 8 зач.ед. (288 часов), их распределение по видам работ представлено в таблице (для студентов ОФО).

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры (часы)	
		5	6
<b>Контактная работа, в том числе:</b>			
<b>Аудиторные занятия (всего):</b>	<b>136</b>	<b>72</b>	<b>64</b>
Занятия лекционного типа	68	36	32
Лабораторные занятия	68	36	32
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)	-	-	-

<b>Иная контактная работа:</b>				
Контроль самостоятельной работы (КСР)		8	4	4
Промежуточная аттестация (ИКР)		0,8	0,5	0,3
<b>Самостоятельная работа, в том числе:</b>		<b>62,8</b>	<b>31,8</b>	<b>31</b>
Проработка учебного (теоретического) материала		27	13	14
Выполнение домашних заданий (решение задач)		23	12	11
Подготовка к текущему контролю		12,8	6,8	6
<b>Контроль:</b>				
Подготовка к экзамену		80,4	35,7	44,7
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>час.</b>	<b>288</b>	<b>144</b>	<b>144</b>
	<b>в том числе контактная работа</b>	<b>144,8</b>	<b>76,5</b>	<b>68,3</b>
	<b>зач. ед</b>	<b>8</b>	<b>4</b>	<b>4</b>

## 2.2 Структура дисциплины:

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы дисциплины, изучаемые в **пятом** семестре:

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов			
		Всего	Аудиторная работа		Внеаудиторная работа
			Л	ЛЗ	СРС
1	2	3	4	5	6
1	Мера и интеграл Лебега	33,8	10	14	9,8
2	Банаховы пространства	22	8	8	6
3	Гильбертовы пространства	22	8	6	8
4	Линейные операторы	26	10	8	8
	<b>Итого:</b>	<b>103,8</b>	<b>36</b>	<b>36</b>	<b>31,8</b>

Разделы дисциплины, изучаемые в **шестом** семестре:

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов			
		Всего	Аудиторная работа		Внеаудиторная работа
			Л	ЛЗ	СРС
1	2	3	4	5	6
5	Принципы неподвижной точки	34	12	10	12
6	Вполне непрерывные операторы	61	20	22	19
	<b>Итого:</b>	<b>95</b>	<b>32</b>	<b>32</b>	<b>31</b>
	<b>Итого по дисциплине:</b>		<b>68</b>	<b>68</b>	<b>62,8</b>

Примечание: Л – лекции, ПЗ – практические занятия / семинары, ЛЗ – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента

## 2.3 Содержание разделов дисциплины:

### 2.3.1 Занятия лекционного типа.

№ п/п	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1	Мера и интеграл Лебега	Мера. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Свойства: аддитивность, положительность, $\sigma$ -аддитивность, абсолютная непрерывность. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.	Устный опрос
2	Банаховы пространства	Линейные и нормированные пространства. Примеры: $l_p^n$ , $l_p$ , $l_\infty$ , $C[a,b]$ , $L_p[a,b]$ . Топология. Теорема Бэра.	Коллоквиум
3	Гильбертовы пространства	Конечномерные пространства. Гильбертовы пространства. Ряды Фурье.	
4	Линейные операторы	Линейные непрерывные операторы. Примеры. Норма оператора. Полнота пространства $L(X,Y)$ . Принцип равномерной ограниченности. Обратимость линейных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Хана – Банаха. Спектр линейного непрерывного оператора. Резольвента. Непустота спектра. Спектральный радиус. Линейный функционал в $H$ .	Устный опрос
5	Принципы неподвижной точки	Принцип сжимающих отображений. Принцип Шаудера. Критерий Хаусдорфа. Теорема Арцеля. Применения. Интегральные уравнения.	Устный опрос
6	Вполне непрерывные операторы	Вполне непрерывные операторы. Пример вполне непрерывного оператора в $L_2[a,b]$ . Сопряженные операторы. Конечномерные операторы. Представление вполне непрерывного оператора в виде суммы конечномерного и малого по норме. Теория Фредгольма. Спектр вполне непрерывного оператора. Теорема Гильберта. Теорема Гильберта-Шмидта.	Устный опрос

### 2.3.2 Лабораторные занятия

№ п/п	Наименование раздела	Тематика лабораторных занятий	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1	Мера и интеграл Лебега	Множества. Операции над множествами. $\sigma$ -кольцо. Аддитивные, $\sigma$ -аддитивные функции. Внешняя мера, мера Лебега. Типы сходимости. Интеграл Лебега и его свойства. Предельный переход под знаком интеграла	Проверка домашнего задания, контрольная работа
2	Линейные нормированные и гильбертовы пространства	Линейные пространства. Сходимость. Пространства со скалярным произведением. Проекция вектора на подпространство	Проверка домашнего задания, контрольная работа
3	Линейные непрерывные операторы	Линейные отображения. Операции над ними. Оценка и вычисление нормы операторов	Самостоятельная работа

№ п/п	Наименование раздела	Тематика лабораторных занятий	Форма текущего контроля
4	Принципы неподвижной точки	Принцип сжимающих отображений. Его применение к скалярным уравнениям, к системам алгебраических уравнений, к дифференциальным и интегральным уравнениям	Проверка домашнего задания, контрольная работа
5	Спектр и резольвента непрерывных линейных операторов	Обратные операторы и их свойства. Спектр линейных непрерывных операторов. Оценка спектрального радиуса и нахождение спектра	Проверка домашнего задания
6	Интегральные уравнения	Уравнения с вырожденным ядром. Нахождение характеристических чисел и собственных функций интегрального уравнения. Теоремы Фредгольма. Интегральные уравнения с симметричным ядром	Проверка домашнего задания, контрольная работа

### 2.3.3 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Курсовые работы не предусмотрены.

### 2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
1	Проработка учебного (теоретического) материала	«Методические указания по организации самостоятельной работы студентов», утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры, протокол № 1 от 30.08.2017 г.
2	Выполнение домашних заданий (решение задач)	«Методические указания по организации самостоятельной работы студентов», утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры, протокол № 1 от 30.08.2017 г.
3	Подготовка к текущему контролю (контрольная работа и др.)	«Методические указания по организации самостоятельной работы студентов», утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры, протокол № 1 от 30.08.2017 г.
4	Промежуточная аттестация (зачет, экзамен)	«Методические указания по организации самостоятельной работы студентов», утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры, протокол № 1 от 30.08.2017 г.
5	Коллоквиум	«Методические указания по организации самостоятельной работы студентов», утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры, протокол № 1 от 30.08.2017 г.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа,

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

### **3. Образовательные технологии.**

При изучении данного курса используются традиционные лекции, лабораторные занятия и групповые консультации.

Цель лабораторных занятий – научить студента применять полученные на лекциях теоретические знания к решению и исследованию конкретных задач. В каждом семестре проводятся контрольные и самостоятельные работы для проверки усвоения материала студентами.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация индивидуальных консультаций с использованием электронной почты.

### **4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.**

Учебная деятельность проходит в соответствии с графиком учебного процесса. Процесс самостоятельной работы контролируется во время аудиторных занятий и индивидуальных консультаций.

Оценочными средствами дисциплины являются средства текущего контроля (коллоквиумы, контрольные работы, а также на лабораторных занятиях – ответ у доски и проверка домашних заданий) и итоговая аттестация (зачет, экзамен).

#### **4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля.**

##### **4.1.1 Вопросы для устного опроса по теме:**

###### **а) «Мера и интеграл Лебега»**

1. Измеримые множества.
2. Измеримые функции.
3. Определение интеграла Лебега
4. Свойства интеграла Лебега.

###### **б) «Линейные операторы»**

1. Непрерывные линейные операторы.
2. Пространство линейных операторов.
3. Норма линейного непрерывного оператора.
4. Принцип равномерной ограниченности.

###### **с) «Принципы неподвижной точки»**

1. Принцип сжатых отображений.
2. Теорема Хаусдорфа.
3. Теорема Арцеля.
4. Принцип Шаудера.

###### **д) «Вполне непрерывные операторы»**

1. Вполне непрерывные операторы и их свойства.
2. Вполне непрерывность интегрального оператора.
3. Сопряженные операторы в  $H$ .
4. Свойства  $A^*$ .
5. Вполне непрерывность сопряженного оператора.
6. Сопряженный к интегральному оператору.
7. Первая теорема Фредгольма.
8. Вторая теорема Фредгольма.

9. Третья теорема Фредгольма.

#### 4.1.2 Вопросы к коллоквиуму по теме «Банаховы пространства. Гильбертовы пространства»

1. Линейные пространства.
2. Нормированные пространства.
3. Пространства  $l_p^n$  и  $l_p$ .
4. Топология нормированных пространств.
5. Теорема о вложенных шарах.
6. Теорема Бэра.
7. Конечномерные пространства.
8. Пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского.
9. Теорема о диагоналях параллелограмма.
10. Теорема Пифагора.
11. Теорема о проекции.
12. Линейная зависимость и независимость.
13. ОНС. Процесс ортогонализации.
14. Ряд Фурье.
15. Частичная сумма ряда Фурье.
16. Сходимость ряда Фурье.
17. Теорема Фишера-Рисса.

#### 4.1.3 Образцы самостоятельных и контрольных работ

5 семестр

##### *Контрольная работа на тему «Мера и интеграл Лебега»*

1. Найти меру Лебега следующих множеств:

а)  $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{3^{n-1}} \right)$ ,

б)  $M = \{-1; -0,9; -0,8\}$ .

2. Будут ли следующие функции простыми:

а)  $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \in \mathcal{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Q}, \end{cases}$

б)  $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x-1}, & x \in [2, \infty) \cap \mathcal{Q}, \\ \sin x, & x \in [2, \infty) \setminus \mathcal{Q} \end{cases}$ .

3. Суммируема ли функция? Вычислить, если возможно, интеграл Лебега от следующих функций по данным множествам:

а)  $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0;1], \\ -3, & x \in [2;3], \end{cases}$

б)  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1] \cap \mathcal{Q}, \\ -3, & x \in [0;1] \setminus \mathcal{Q}, \end{cases} \quad x \in [0;1]$

в)  $f(x) = \frac{1}{2^n}, \quad x \in [n; n+1), \quad x \in [1; +\infty)$

г)  $f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \in K, \\ 1+x, & x \in [0;0,5] \setminus K, \quad x \in [0;1] \\ -x^3, & x \in (0,5;1] \setminus K \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 \text{д) } f(x) &= \begin{cases} \sin x, & x \in [0; \pi/2] \setminus Q, \\ \cos x, & x \in (\pi/2; \pi] \setminus Q, \quad x \in [0; \pi] \\ x^2 - 3x, & x \in [0; \pi] \cap Q \end{cases} \\
 \text{е) } f(x) &= \begin{cases} e^x, & x \in [0; 1] \cap Q, \\ \cos x, & x \in (1; 2] \cap Q, \quad x \in [0; 2] \\ x^2 - 2, & x \in [0; 2] \setminus Q \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Контрольная работа на тему «Банаховы пространства. Гильбертовы пространства»**

1. Проверить, образует ли  $V$  линейное подпространство пространства  $X$ :

$$X = R^3, \quad V = \{x \in R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

2. Является ли функция  $\varphi(x) = 2|x_1 + x_2|$  нормой в пространстве  $R^2$ .

3. Сходятся ли последовательности в указанных пространствах. В случае сходимости указать предел.

а)  $l_2, \quad x_k = \left(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{k}, 0, \dots\right);$

б)  $C[0,1], \quad x_k(t) = t^k.$

4. Найти проекцию вектора на подпространство и расстояние от вектора до подпространства

а)  $l_2, \quad a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$  на подпространство

$$M = \{x \in l_2 : x = (0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\};$$

б)  $l_2^3, \quad a = (1, 2, 1)$  на подпространство  $M = \{x \in l_2^3 : x_1 - x_2 = 0\}.$

**Самостоятельная работа на тему «Линейные операторы»**

1. Проверить линейность операторов:

а)  $A : R^3 \rightarrow R^3, \quad Ax = (x_1^2, x_1 + x_3, x_3^2);$

б)  $A : C[0,1] \rightarrow C[0,1], \quad (Ax)(t) = x^2(t).$

2. Оценить норму следующих операторов:

а)  $A : l_1^2 \rightarrow l_1^2, \quad Ax = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$

б)  $A : C[0,1] \rightarrow C[0,1], \quad (Ax)(t) = t^2 x(t).$

**6 семестр**

**Контрольная работа по теме «Принципы неподвижной точки»**

1. Является ли оператор сжатием на  $R^1$ :

а)  $Ax = \sin(0,5x) + 2;$       б)  $Ax = \sqrt[5]{x} - 1.$

2. Доказать, что уравнение имеет решение и указать число итераций, необходимых для достижения точности 0,01:

$$x^5 + 2x^4 - 20x + 3 = 0.$$

3. Доказать, используя ПСО, что система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x_1 = 0,3x_1 - 0,5x_2 + 3 \\ x_2 = 0,5x_2 - 0,4x_1 - 2. \end{cases} \text{ Найти } x^{(2)}.$$

4. Показать, что уравнение имеет единственное непрерывное на  $[0,1]$  решение:

$$3x(t) - \sin(2x(t)) + t = 0.$$

5. С помощью ПСО определить при каких  $\lambda$  уравнение имеет единственное непрерывное на  $[0,1]$  решение и найти его методом последовательных приближений:

$$x(t) = \lambda \int_0^1 t^2 x(s) ds + t^2.$$

**Контрольная работа на тему «Вполне непрерывные операторы»**

1. Найти спектр и спектральный радиус оператора  $A$ :

а)  $A: l_\infty \rightarrow l_\infty, Ax = (x_1 + x_2, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ ;

б)  $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], (Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds$ .

2. Найти решение уравнения при заданных  $f$ :

$$x(t) = \int_0^{0,5\pi} \sin(t-s)x(s) ds + f(t),$$

$$f(t) = \cos t; \sin t; 3\cos t - 2\sin t.$$

3. Найти характеристические значения, и собственные функции уравнения:

$$x(t) = \mu \int_0^1 (ts^2 + t^2s)x(s) ds.$$

4. Разрешимо ли уравнение при заданных  $f$  и любых параметрах  $\lambda$

$$x(t) = \lambda \int_{-1}^1 ((ts)^4 + 1)x(s) ds + f(t), \quad f(t) = t; e^{-t^2} \sin t; 1 + t^2.$$

**4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации**

**5 семестр**

1. Измеримые множества.
2. Измеримые функции.
3. Интеграл Лебега (корректность).
4. Свойства интеграла Лебега.
5.  $\sigma$  – аддитивность интеграла Лебега.
6. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
7. Теорема Леви.
8. Лемма Фату.
9. Теорема Лебега.
10. Пространство  $L^2(A)$ .
11. Линейные пространства.
12. Нормированные пространства.
13. Пространства  $l_p^n$  и  $l_p$ .
14. Топология нормированных пространств.
15. Теорема о вложенных шарах.
16. Теорема Бэра.

17. Конечномерные пространства.
18. Пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского.
19. Теорема о диагоналях параллелограмма.
20. Теорема Пифагора.
21. Теорема о проекции.
22. Линейная зависимость и независимость.
23. ОНС. Процесс ортогонализации.
24. Ряд Фурье.
25. Частичная сумма ряда Фурье.
26. Сходимость ряда Фурье.
27. Теорема Фишера-Рисса.
28. Непрерывные линейные операторы.
29. Непрерывность интегрального оператора.
30. Пространство линейных операторов.
31.  $L(X, Y)$ .
32. Принцип равномерной ограниченности.
33. Теорема Банаха – Штейнгауза.
34. Теорема Хана – Банаха.
35. Следствия теоремы Хана-Банаха.
36. Общий вид функционала в  $H$ .

#### 6 семестр

1. Принцип сжатых отображений.
2. Теорема Хаусдорфа.
3. Теорема Арцеля.
4. Принцип Шаудера.
5. Теорема Банаха.
6. Операторы с малой нормой.
7. Обратимость близких операторов.
8. Спектр оператора и его свойства. Примеры.
9. Резольвента оператора и её свойства. Теорема о непустоте спектра.
10. Спектральный радиус оператора и формула для его вычисления. Спектральный радиус оператора Вольтерра.
11. Вполне непрерывные операторы и их свойства.
12. Вполне непрерывность предельного оператора.
13. Вполне непрерывность интегрального оператора.
14. Сопряженные операторы в  $H$ .
15. Свойство  $A^*$ .
16. Вполне непрерывность сопряженного оператора.
17. Сопряженный интегральный оператор.
18. Замкнутость  $\text{Im}(I - A)$ .
19. Конечномерные операторы.
20. Аппроксимация вполне непрерывных операторов конечномерными.
21. Первая теорема Фредгольма.
22. Вторая теорема Фредгольма.
23. Третья теорема Фредгольма.
24. Теорема о спектре вполне непрерывного оператора.
25. Самосопряженные операторы и их свойства.
26. Существование ненулевого собственного числа у вполне непрерывного самосопряженного оператора.
27. Теорема Гильберта–Шмидта.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

– в печатной форме увеличенным шрифтом,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

### **Критерии оценивания усвоенных знаний обучающихся**

Зачет выставляется по результатам работы студента в течение семестра. Отметка «зачтено» выставляется студентам, которые регулярно посещали занятия, выполняли домашние работы, написали контрольные работы на положительные оценки. Отметка «незачтено» выставляется студентам, которые пропустили более 60 % занятий и написали контрольные работы на неудовлетворительные оценки.

Оценивание ответа на экзамене, осуществляется по следующим критериям

Оценка **«отлично»** – выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач;

Оценка **«хорошо»** – выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

Оценка **«удовлетворительно»** – выставляется студенту, показавшему разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы в некотором объеме, необходимом для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

Оценка **«неудовлетворительно»** – выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

### **5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля).**

## 5.1 Основная литература:

### Основная литература:

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 570 с.  
<https://e.lanbook.com/book/2206>
2. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 88 с.  
<https://e.lanbook.com/book/59471>
3. Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2009. — 272 с.  
<https://e.lanbook.com/book/245>.
4. Цалюк З. Б. Функциональный анализ: [учебное пособие] / З. Б. Цалюк, М. В. Цалюк; Фак. математики и компьютерных наук Кубанского гос. ун-та. – Краснодар: [Факультет математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета]: [Просвещение-Юг], 2014. – 79 с.
5. Пуляев В.Ф., Цалюк З.Б. Сборник задач по функциональному анализу. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная хаотическая механика», 2010. – 150 с.

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются электронные версии источников, изданных сотрудниками кафедры, а также издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах «Лань» и «Библиоклуб».

## 5.2 Дополнительная литература:

1. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. - Изд. 2-е, перераб. - Москва: Наука, 1965. - 520 с.  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459769>
2. Вулих, Б.З. Введение в функциональный анализ / Б.З. Вулих. - Москва: Гос. изд-во физико-математической лит., 1958. - 351 с.  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233615>
3. Данфорд, Н. Линейные операторы / Н. Данфорд, Д.Т. Шварц; под ред. А.Г. Костюченко; пер. с англ. Б.С. Митягина, Л.И. Головин. - Москва: Издательство иностранной литературы, 1962. - Т. 1. Общая теория. - 895 с.  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=456617>
4. Филимоненкова Н.В. Сборник задач по функциональному анализу [Электронный ресурс]: учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2015. — 240 с.  
<https://e.lanbook.com/book/65041>.
5. Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. — Электрон. дан. — Москва: Физматлит, 2005. — 240 с.  
<https://e.lanbook.com/book/2342>

**5.3. Периодические издания по данному предмету не используются в процессе обучения**

**6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля).**

1. Российское образование, федеральный портал [Официальный сайт] — [URL: http://www.edu.ru](http://www.edu.ru)
2. Электронная библиотека ЮРАЙТ — <https://biblio-online.ru>

3. Электронная библиотека Лань — <https://e.lanbook.com>
4. Университетская библиотека ONLINE — <https://biblioclub.ru>

### 7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной систематизированный материал, лабораторных занятий, в ходе которых студентами приобретаются и закрепляются основные практические навыки решения различных задач, в том числе с применением полученных теоретических знаний, а также групповых консультаций.

Важнейшим этапом курса является самостоятельная работа по дисциплине. Самостоятельная работа студентов является неотъемлемой частью процесса подготовки. Под самостоятельной работой понимается часть учебной планируемой работы, которая выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа направлена на усвоение системы научных и профессиональных знаний, формирования умений и навыков, приобретение опыта самостоятельной творческой деятельности. СРС помогает формировать культуру мышления студентов, расширять познавательную деятельность.

Виды самостоятельной работы по курсу:

а) по целям: подготовка к лекциям, к практическим занятиям, к контрольной работе, к коллоквиуму; подготовка научного доклада и выполнение заданий по НИР.

б) по характеру работы: изучение литературы, конспекта лекций; поиск литературы в библиотеке; конспектирование рекомендуемой для самостоятельного изучения научной литературы; решение задач, тестов.

Тематическое планирование самостоятельной работы студентов

Раздел	Тема	Содержание вопросов темы	Вид работы
1	Мера и интеграл Лебега	Мера. Измеримые функции. Интеграл Лебега. Свойства. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.	Поиск необходимой информации (см. список литературы). Решение задач. Подготовка к контрольной работе.
2	Банаховы пространства	Линейные и нормированные пространства. Сходимость. Полные пространства. Пополнение пространств.	Поиск необходимой информации. Изучение лекционного материала. Конспектирование. Подготовка к контрольной работе.
3	Гильбертовы пространства	Конечномерные пространства. Гильбертовы пространства. Проекция элемента на подпространство. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Ряды Фурье.	Повторение лекционного материала, ознакомление с материалом

Раздел	Тема	Содержание вопросов темы	Вид работы
			учебников. Подготовка к контрольной работе.
4	Линейные операторы	Линейные непрерывные операторы. Норма оператора. Полнота пространства $L(X, Y)$ . Принцип равномерной ограниченности. Обратимость линейных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Хана-Банаха. Спектр линейного непрерывного оператора. Резольвента. Непустота спектра. Спектральный радиус. Линейный функционал в гильбертовом пространстве, в других пространствах.	Поиск необходимой информации. Изучение материала, конспектирование. Подготовка к самостоятельной работе.
5	Принципы неподвижной точки	Принцип сжимающих отображений. Принцип Шаудера. Критерий Хаусдорфа. Теорема Арцеля. Применения принципов неподвижной точки. Интегральные уравнения.	Изучение лекционного материала и материала учебников. Подготовка к контрольной работе.
6	Вполне непрерывные операторы	Вполне непрерывные операторы. Сопряженные операторы. Конечномерные операторы. Представление вполне непрерывного оператора в виде суммы конечномерного и малого по норме. Теория Фредгольма. Спектр вполне непрерывного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта. Теория Фредгольма для интегральных уравнений	Поиск необходимой информации, проработка материала. Решение задач. Подготовка к контрольной работе.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю).**

### **8.1 Перечень информационных технологий.**

– Консультирование посредством электронной почты.

### **8.2 Перечень необходимого программного обеспечения.**

– Программы для демонстрации и создания презентаций («Microsoft Power Point»).

### 8.3 Перечень информационных справочных систем:

1. Электронная библиотечная система eLIBRARY.RU (<http://www.elibrary.ru/>)

### 9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю).

Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) и оснащенность
Лекционные занятия	Лекционная аудитория, специально оборудованная мультимедийными демонстрационными комплексами, учебной мебелью
Семинарские занятия	Специальное помещение, оснащенное учебной мебелью, презентационной техникой (проектор, экран, ноутбук) и соответствующим программным обеспечением (ПО).
Лабораторные занятия	Помещение для проведения лабораторных занятий оснащенное учебной мебелью, доской маркером или мелом
Групповые (индивидуальные) консультации	Помещение для проведения групповых (индивидуальных) консультаций, учебной мебелью, доской маркером или мелом
Текущий контроль, промежуточная аттестация	Помещение для проведения текущей и промежуточной аттестации, оснащенное учебной мебелью.
Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета

## Рецензия

на рабочую учебную программу дисциплины  
«Функциональный анализ»,  
предназначенную для студентов направления подготовки  
01.03.01 Математика (квалификация «бакалавр»)

Функциональный анализ является одним из базовых вузовских курсов и составляет основу подготовки квалифицированного специалиста в области математики. Изучение функционального анализа необходимо как для дальнейшего изучения дисциплин высшей математики и механики, так и для научно-исследовательской деятельности студента. Поэтому создание рабочей программы по данному курсу является актуальным.

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» содержит все необходимые разделы и предусматривает формирование у обучающихся математического аппарата, включающего в себя математические знания, умения и навыки, а также ряд компетенций, необходимых для дальнейшей профессиональной деятельности.

Программа отвечает современным требованиям к обучению и отражает современные тенденции в обучении и воспитании личности. Содержание рабочей программы охватывает весь материал, необходимый для обучения студентов высших учебных заведений по направлению «Математика».

Рабочая программа дает целостное представление о дисциплине. Структура и содержание курса взаимно дополняют друг друга. В программе приведены примеры заданий для текущей и промежуточной аттестации, перечень вопросов выносимых на коллоквиум и экзамен, перечень основной и дополнительной литературы, доступной обучающимся.

В общем, рабочая программа по дисциплине «Функциональный анализ» соответствует требованиям ФГОС ВО и отвечает современным стандартам качественного образовательного процесса. Данная рабочая программа может быть использована для обеспечения основной образовательной программы по направлению подготовки 01.03.01 Математика по дисциплине «Функциональный анализ».

Рецензент

доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры математического  
моделирования КубГУ



А.В. Павлова

## Рецензия

на рабочую учебную программу дисциплины «Функциональный анализ»,  
для студентов направления подготовки  
01.03.01 Математика (квалификация «бакалавр»)

Курс «Функциональный анализ» входит в список обязательных дисциплин базовой части учебного плана подготовки бакалавров по направлению 01.03.01 Математика. Изучение этого материала необходимо для подготовки всесторонне развитого, квалифицированного специалиста в области математики.

Рабочая программа курса «Функциональный анализ» включает в себя все необходимые структурные части и отвечает современным требованиям к обучению и воспитанию. Содержание рабочей программы предусматривает формирование у обучающихся ряда общепрофессиональных и профессиональных компетенций, необходимых для дальнейшей профессиональной деятельности. Распределение времени, отводимого на изучение различных разделов курса, включая самостоятельную работу, соответствует их трудоемкости.

Структура и содержание курса направлены на формирование у студентов математической грамотности и достаточно хорошо продуманы, что отражено в предлагаемой рабочей программе. Содержание разделов, их разделение по видам занятий, и трудоемкость в часах отвечают требовательности и целесообразности. Логика построения программы обеспечивает лаконичность изложения, необходимую при ограниченном времени, отводимом учебным планом. Овладение практическими навыками и умениями обеспечивается лабораторными занятиями. В программе сформулированы темы самостоятельной внеаудиторной работы, примеры заданий для контрольных работ, билеты для экзаменов. В соответствии с современными требованиями приведены не только перечни основной и дополнительной литературы, имеющийся в библиотеке ВУЗа, но и доступные для обучающихся интернет-источники.

В целом, рабочая программа по дисциплине «Функциональный анализ» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и полностью отвечает современным требованиям к качественному образовательному процессу. В связи с этим она может быть рекомендована для использования в учебном процессе бакалавров по направлению 01.03.01 Математика.

Рецензент

кандидат физико-математических наук,

доцент кафедры прикладной математики КубГТУ

К.А. Кирий

Подпись:   
Полностью доверяю  
Начальнику управления кадров  
И.В. Реутская  
«    »    20    г.