

Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кубанский государственный университет»
Факультет математики и компьютерных наук



СВЕРЖДАЮ:

Проректор по учебной работе,
Кубанского государственного университета – первый
проректор

Иванов А.Г.

Подпись

«30» июня 2017 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.06.01 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОЙ ТЕОРИИ ГРУПП

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль): Алгебра, теория чисел и дискретный анализ;

Программа подготовки академическая

Форма обучения очная

Квалификация (степень) выпускника бакалавр

Краснодар 2017

Рабочая программа дисциплины «ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОЙ ТЕОРИИ ГРУПП» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки по профилю «Алгебра, теория чисел и дискретный анализ».

Программу составил

Г.Н. Титов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Титов

Рабочая программа дисциплины «ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОЙ ТЕОРИИ ГРУПП» утверждена на заседании кафедры (разработчика) функционального анализа и алгебры
протокол № 15 от 09.06.2017
Заведующая кафедрой (разработчика) Барсукова В.Ю.

Барсукова В.Ю.

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры (выпускающей) функционального анализа и алгебры
протокол № 15 от 09.06.2017
Заведующая кафедрой (выпускающей) Барсукова В.Ю.

Барсукова В.Ю.

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук «20» июня 2017 г, протокол № 3.

Председатель УМК факультета Титов Г.Н.

Титов

Рецензенты:

Терещенко И.В., заведующий кафедрой общей математики ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», кандидат физ.-мат. наук, доцент;

Гаркуша О.В., доцент кафедры информационных технологий ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», кандидат физ.-мат. наук, доцент.

1. Цели и задачи освоения дисциплины.

1.1 Цель дисциплины

Дальнейшее формирование у студентов приобретенных на первых двух курсах знаний по фундаментальной и компьютерной алгебре.

1.2. Задачи дисциплины

Получение основных теоретических и алгоритмических сведений по теории групп, развитие познавательной деятельности и приобретение практических навыков работы с алгебраическими понятиями.

1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к блоку 1 вариативной части (В) дисциплин по выбору студента (ДВ) учебного плана, являющегося структурным элементом ООП ВО. Курс «Элементы комбинаторной теории групп» продолжает начатое на первых двух курсах алгебраическое образование студентов соответствующего направления подготовки. Знания, полученные в этом курсе, могут быть использованы в дискретной математике и математической логике, теории чисел, методах оптимизации и др. Слушатели должны владеть математическими знаниями в рамках программы курса «Фундаментальная и компьютерная алгебра».

1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

При освоении дисциплины вырабатывается общематематическая культура: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения алгебраических задач и задач, связанных с компьютерными приложениями алгебраических методов. Получаемые знания лежат в основе математического образования и необходимы для понимания и освоения всех курсов математики, а также для продолжения обучения в магистратуре по соответствующему направлению подготовки.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций: ОК-7, ОПК-1, ПК-2.

№ п. п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
1.	ОК-7	Способностью к самоорганизации и самообразованию.	основные понятия и утверждения дисциплины, пути поиска информации, связанной с этими понятиями, для дальнейшего самостоятельного изучения;	использовать полученные знания и различные источники литературы с целью самостоятельного продолжения исследований по тематике дисциплины;	навыками самоорганизации и самообразования в процессе обучения и в ходе подготовки творческих реферативных отчетов;
2.	ОПК-1	Готовностью использовать фундаментальные знания в области алгебры в будущей	основные теоретические результаты и алгоритмы, позво-	использовать приобретенные знания в последующей	некоторыми навыками исследований в теории групп, некоторыми навыками

№ п. п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
		профессиональной деятельности.	ляющие компьютерную реализацию решения некоторых вопросов дисциплины;	научной работе или в будущей профессиональной деятельности;	построения и реализации алгоритмов с целью их использования для решения вопросов в области научно-профессиональной деятельности
3.	ПК-2	Способностью математически корректно ставить естественно научные задачи, знание постановок классических задач математики.	классические задачи, соответствующие тематике курса;	математически корректно формулировать задачи по теории групп;	навыками использования решений известных задач для определения путей подхода к решению возникающих по теме курса заданий.

2 Структура и содержание дисциплины

2.1 Распределение трудоемкости дисциплины по видам работ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы (108 часов, из них контактных 76,2 часов: лекционные 36 часов, лабораторные занятия 36 часов, контролируемая самостоятельная работа 4 часа и зачет 0,2 часа; самостоятельная работа 31,8 часа), промежуточная аттестация осуществляется в виде зачета, распределение часов по видам работ представлено в таблице.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры (часы)			
		6			
Контактная работа, в том числе:					
Аудиторные занятия (всего):	72	72	-		
Занятия лекционного типа	36	36	-	-	-
Лабораторные занятия	36	36	-	-	-
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-
Иная контактная работа:					
Контроль самостоятельной работы (КСР)	4	4	-	-	-
Промежуточная аттестация (ИКР)	0,2	0,2	-	-	-
Самостоятельная работа, в том числе:					
<i>Курсовая работа</i>	-	-		-	-
<i>Проработка учебного (теоретического) материала</i>	8	8		-	-
<i>Выполнение домашних заданий</i>	8	8		-	-
<i>Реферативный отчет</i>	4	4	-	-	-

Подготовка к текущему контролю		11,8	11,8	-	-	-
Контроль:						
Подготовка к зачёту		-	-	-	-	-
Общая трудоемкость	час.	108	108	-	-	-
	в том числе контактная работа	76,2	76,2	-		
	зач. ед	3	3	-		

2.2 Структура дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы дисциплины, изучаемые в 6 семестре (очная форма)

№	Наименование разделов (тем)	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	СРС
1	2	3	4	5	6	7
1	Основные понятия теории групп	34	12	-	12	10
2	Гомоморфизмы групп	34	12	-	12	10
3	Порождающие элементы и определяющие соотношения групп	35,8	12	-	12	11,8
Итого по дисциплине:			36	-	36	31,8

Примечание: Л – лекции, ПЗ – практические занятия / семинары, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента

2.3 Содержание разделов дисциплины

2.3.1 Занятия лекционного типа

№ п/п	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	Основные понятия теории групп	Алгебраические операции на множествах. Виды группоидов, примеры. Таблица Кэли. Свойства таблицы Кэли группы. Изоморфизмы группоидов, их простейшие свойства. Группа подстановок n-й степени. Умножение подстановок, записанных в цикленном или в перестановочном виде. Алгоритм	Устный опрос, контролирование подготовки доклада

		нахождения изоморфизмов и автоморфизмов конечных групп, заданных таблицей Кэли. Алгоритм построения группы автоморфизмов конечной группы по ее таблице Кэли. Подгруппа, критерий подгруппы. Порядок элемента группы, свойства. Циклическая группа, изоморфизм группе Z или Z_n. Подгруппы циклической группы. Смежные классы группы по подгруппе. Равномощность смежных классов по подгруппе. Равномощность множества правых и множества левых смежных классов по подгруппе. Теорема Лагранжа для конечной группы. Алгоритм нахождения подгрупп конечной группы, заданной таблицей Кэли.	
2	Гомоморфизмы групп	Сопряжение элементов группы, простейшие свойства. Алгоритм сопряжения подстановок, записанных в цикленном виде. Нормальная подгруппа группы, эквивалентные определения. Алгоритм нахождения нормальных подгрупп конечной группы по ее таблице Кэли. Прямое произведение групп (подгрупп). Теорема об инвариантах конечной абелевой группы. Факторгруппа. Алгоритм построения таблицы Кэли факторгруппы. Коммутант и центр группы. Гомоморфизмы групп, их виды. Ядро и образ гомоморфизма. Критерий мономорфизма. Естественный гомоморфизм. Основная теорема о гомоморфизмах групп. Теорема Кэли о представлении конечной группы подстановками. Алгоритм построения регулярного представления группы подстановками.	Устный опрос, контролирование подготовки доклада
3	Порождающие элементы и определяющие соотношения групп	Лемма о пересечении подгрупп. Порождающее множество элементов (под)группы. Теорема о виде	Устный опрос, контролирование подготовки до-

		элементов подгруппы, порожденной данным множеством элементов группы. Определение свободной группы. Теорема о том, что всякая группа является гомоморфным образом некоторой свободной группы. Понятие об определяющем множестве соотношений. Генетические коды некоторых конечных групп: абелевых групп, группы диэдра D_n, симметрической группы S_n, знакопеременной группы A_n, групп порядков pq, p, p^2 и p^3, где p, q – простые числа. Умножение элементов группы, заданной порождающими элементами и определяющими соотношениями, компьютерная реализация этого процесса. Алгоритм отыскания генетического кода конечной группы методом перечисления смежных классов.	клада
--	--	--	-------

2.3.2 Занятия семинарского типа

Не предусмотрены.

2.3.3 Лабораторные занятия

№ п/п	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	Основные понятия теории групп	Проверка свойств группоидов по их таблице Кэли. Алгоритм проверки на изоморфизм группоидов, заданных таблицей Кэли. Умножение подстановок, записанных в цикленном или в перестановочном виде. Алгоритм нахождения изоморфизмов и автоморфизмов конечных групп, заданных таблицей Кэли. Алгоритм построения группы авто-	Проверка домашнего задания, реферативный доклад, контрольная работа

		морфизмов конечной группы по ее таблице Кэли. Классификация всех группоидов второго порядка. Описание подгрупп группы, заданной таблицей Кэли. Описание подгрупп циклической группы. Разбиение данной группы подстановок на смежные классы по подгруппе.	
2	Гомоморфизмы групп	Доказательство простейших свойств сопряжения элементов мультипликативной группы.. Алгоритм сопряжения подстановок, записанных в цикленном виде. Алгоритм нахождения нормальных подгрупп конечной группы по ее таблице Кэли. Иллюстрация построения прямого (внешнего) произведения групп и (внутреннего) прямого произведения двух подгрупп. Разложение циклической группы в прямое произведение примарных подгрупп. Определение набора инвариантов абелевых групп, заданных в виде прямого произведения циклических подгрупп. Построение таблицы Кэли факторгруппы. Отыскание коммутанта и центр группы подстановок. Построение гомоморфизмов групп различных видов с указанием их ядра и образа. Иллюстрация основной теоремы о гомоморфизмах групп. Алгоритм построения регулярного представления группы подстановками.	Проверка домашнего задания, реферативный доклад, контрольная работа
3	Порождающие элементы и определяющие соотношения групп	Описание подгруппы, порожденной данным множеством элементов группы подстановок, а также группы, заданной таблицей Кэли. Умножение элементов конечно порожденной свободной группы. Понятие об определяющем множестве соотношений группы. Описание генетических кодов некоторых абелевых групп, группы диэдра D_n , симметрической группы S_n , знакопеременной	Проверка домашнего задания, реферативный доклад, контрольная работа, зачет

		группы A_n , групп порядков pq , p, p^2 и p^3 , где p, q – простые числа. Умножение элементов группы, заданной порождающими элементами и определяющими соотношениями, компьютерная реализация этого процесса. Алгоритм отыскания генетического кода конечной группы методом перечисления смежных классов.	
--	--	---	--

2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Курсовые работы не предусмотрены.

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

№	Наименование раздела	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
-	Основные понятия теории групп	Методические указания по организации самостоятельной работы, утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры протокол № 1 от 31.08.2017 г.
-	Гомоморфизмы групп	Методические указания по организации самостоятельной работы, утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры протокол № 1 от 31.08.2017 г.
-	Порождающие элементы и определяющие соотношения групп	Методические указания по организации самостоятельной работы, утвержденные кафедрой функционального анализа и алгебры протокол № 1 от 31.08.2017 г.

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

3 Образовательные технологии

Активные и интерактивные формы, лекции, лабораторные занятия, контрольные работы, реферативно-творческие отчеты (по некоторым темам в виде презентации) и зачет. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому лабораторному занятию. Проводятся три контрольных работы (каждая продолжительностью в 1 акад. час) по темам разделов 1-3 в пункте 4.1.1. Каждый студент готовит реферативно-творческий отчет по одной из ниже предложенных в пункте 4.1.2 тем. Зачет составляется после выполнения определенного количества (практических и теоретических) заданий контрольных работ и реферативно-творческого отчета. В случае невыполнения какого-то из приведенных требований, студенту для сдачи зачета предлагаются теоретические и практические задания в соответствии с ниже указанными пунктами 4.2.1 и 4.2.2.

К образовательным технологиям также относятся интерактивные методы обучения. Согласно учебному плану некоторые лекционные и лабораторные занятия в объеме 18 часов проводятся с использованием интерактивных методов обучения. Интерактивность подачи материала по дисциплине «Элементы комбинаторной теории групп» предполагает не только взаимодействия вида «преподаватель - студент» и «студент - преподаватель», но и «студент - студент». Все эти виды взаимодействия хорошо достигаются при изложении материала на занятиях в ходе дискуссий (14 часов), а также на лабораторных занятиях в ходе студенческих реферативно-творческих отчетов с использованием компьютерных технологий (4 часа).

3.1 Дискуссия (14 часов)

Возможность дискуссии предполагает умение высказать собственную идею, предложить свой путь решения, аргументировано отстаивать свою точку зрения, связно излагать мысли. Полезны следующие задания: составление плана решения задачи, поиск другого способа решения, сравнение различных способов решения, проведение выкладок для решения задачи и выкладок для проверки правильности полученного решения, рассмотрение задач с лишними и недостающими данными, реферативно-творческие доклады. Студентам предлагается проанализировать варианты решения, обсудить доклад, высказать своё мнение. Основным объемом использования интерактивных методов обучения реализуется именно в ходе дискуссий, как на лекционных, так и на лабораторных занятиях.

Общие вопросы, которые выносятся на дискуссию:

1. Составления плана доказательства утверждения или решения задачи.
2. Определение возможных способов доказательства утверждения или поиск различных способов решений задачи.
3. Выбор среди рассматриваемых способов наиболее рационального.
4. Обсуждение логической составляющей в формулировке той или иной теоремы, а также обсуждение возможности построения иллюстрирующих ее примеров и контрпримеров.
5. Самостоятельное составление студентами опорных заданий по теме, характеризующих глубину понимания соответствующего материала.

Вид занятия (Л или ЛЗ)	Тема занятия с использованием интерактивной образовательной технологии «Занятие-дискуссия»	Количество часов
Л	Циклические группы и их подгруппы (раздел 1).	2
ЛЗ	Разбиение данной группы подстановок на смежные	2

	классы по подгруппе (раздел 1).	
<i>Л</i>	Теорема Лагранжа для конечной группы. Описание алгоритма нахождения подгрупп конечной группы, заданной таблицей Кэли (раздел 1).	2
<i>Л</i>	Основная теорема о гомоморфизмах групп (раздел 2).	2
<i>ЛЗ</i>	Применение алгоритма построения регулярного представления конечной группы подстановками (раздел 2).	2
<i>Л</i>	Конечно порожденная свободная группа. Понятие об определяющем множестве соотношений группы (раздел 3).	2
<i>Л</i>	Описание генетических кодов некоторых абелевых групп, группы диэдра D_n , симметрической группы S_n , знакопеременной группы A_n , групп порядков pq , p, p^2 и p^3 , где p, q – простые числа (раздел 3).	2
<i>Итого:</i>		14

3.2 Использование компьютерных технологий (4 часа)

Применение на занятии компьютерных технологий позволяет студентам при рассмотрении определенных тем курса комбинаторной теории групп более глубоко освоить некоторые понятия и наглядно на блок-схемах или в ходе описания компьютерных программ изучить указанные в содержании дисциплины алгоритмы. В этой связи некоторые лабораторные занятия преподавателю целесообразно проводить в виде студенческих презентаций своих реферативно-творческих отчетов.

Вид занятия (Л, ЛЗ)	Используемые интерактивные образовательные технологии	Количество часов
<i>ЛЗ</i>	Реферативно-творческие отчеты студентов по соответствующим темам (ниже в пункте 4.1.2) в виде презентаций.	2
<i>ЛЗ</i>	Реферативно-творческие отчеты студентов по соответствующим темам (ниже в пункте 4.1.2) в виде презентаций.	2

4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущей аттестации

Контрольные работы и реферативно-творческие отчеты оцениваются по пяти-балльной системе. На лабораторных занятиях контроль осуществляется при ответе у доски и при проверке домашних заданий.

4.1.1 Примерные контрольные работы

Контрольная работа № 1

$$\begin{array}{ccc} a & a & b \\ b & c & c \end{array}$$

1. По таблице Кэли $a \ b \ c$ группоид $G = \{a, b, c\}$ определите его вид (группоид с единицей, коммутативный группоид, полугруппа, моноид, группа, абелева группа).
2. Найдите вид подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}^{-4321}$ в группе S_8 .
3. Группу $G = \{e, (1234), (1432), (13)(24), (14)(23), (12)(34), (13), (24)\}$ разбейте на правые смежные классы по подгруппе $H = \{e, (12)(34)\}$.
4. Подгруппа группы, критерий подгруппы (теория).

Контрольная работа №2

1. Сопрягите в группе S_9 подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 9 & 8 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ с помощью подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ двумя способами (по определению и по алгоритму).
2. Среди двух данных подгрупп A и B группы G выбрать являющуюся нормальной и построить таблицу Кэли факторгруппы группы G по выбранной подгруппе, где $G = S_3$, $A = \{e, (12)\}$ и $B = \{e, (123), (132)\}$.
3. Укажите регулярное представление подстановками абелевой группы, которая имеет следующую систему инвариантов: 2, 4.
4. Образ и ядро гомоморфизма групп, основные утверждения, связанные с этими понятиями (теория).

Контрольная работа №3

1. Установить генетический код из двух слов для абелевой группы, разложимой в прямое произведение циклических подгрупп порядков 6, 10 и 20.
2. В группе диэдра $D_7 = \langle a, b | a^7 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$ для некоторых чисел $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $y \in \{0, 1\}$ выполняется равенство $a^x b^y = (ba^2)^3$. Найдите пару $(x; y)$.
3. В группе $G = \langle a, b | a^9 = b^3 = 1, b^{-1}ab = a^4 \rangle$ найдите элементы центра.
4. Теорема о виде элементов подгруппы, порожденной данным множеством элементов группы (теория).

4.1.2 Примерные темы реферативно-творческих отчетов

1. Описание свойств бинарной операции по таблице Кэли группоид. Алгоритм Лайта

- проверки ассоциативности группоида (построение блок-схемы или написание программы).
2. Алгоритм описания таблиц Кэли всех группоидов, изоморфных данному по его таблице Кэли (построение блок-схемы или написание программы).
 3. Алгоритм описания всех автоморфизмов группоида по его таблице Кэли (построение блок-схемы или написание программы).
 4. Алгоритм построения таблиц Кэли симметрической группы и знакопеременной группы подстановок (построение блок-схемы или написание программы).
 5. Алгоритм нахождения подгрупп конечной группы, заданной таблицей Кэли (построение блок-схемы или написание программы).
 6. Алгоритм проверки на подгруппу и на нормальную подгруппу заданного подмножества элементов группы с известной таблицей Кэли (построение блок-схемы или написание программы).
 7. Алгоритм разбиения множества элементов группы с известной таблицей Кэли на смежные классы по заданной подгруппе (построение блок-схемы или написание программы).
 8. Алгоритм построения таблицы Кэли факторгруппы по заданной нормальной подгруппе конечной группы (построение блок-схемы или написание программы).
 9. Алгоритмы построения таблиц Кэли по генетическому коду для группы диэдра D_n и для группы порядка pq , где n – натуральное число и p, q – различные простые числа (построение блок-схемы или написание программы).
 10. Алгоритмы построения таблиц Кэли по генетическому коду для всех попарно неизоморфных групп 8-го порядка (построение блок-схемы или написание программы).
 11. Алгоритмы построения таблиц Кэли по генетическому коду для неабелевых групп порядка p^3 , где p – нечетное простое число (построение блок-схемы или написание программы).
 12. Алгоритм перечисления смежных классов группы по подгруппе (построение блок-схемы или написание программы).

4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация проводится в форме зачета.

4.2.1 Список теоретических вопросов (для контрольных работ и зачета)

1. Алгебраическая операция. Группоиды, их виды. Примеры.
2. Таблица Кэли группоида. Свойства таблицы Кэли группы.
3. Изоморфизм группоидов, примеры на группоидах, заданных таблицами Кэли.
4. Автоморфизм группоида. Нахождение автоморфизмов группоида, заданного таблицей Кэли.
5. Отображения множеств, их виды. Умножение отображений.
6. Симметрическая группа подстановок n -й степени.
7. Подгруппа группы, критерий подгруппы.
8. Порядок элемента группы, свойства.
9. Изоморфизм циклической группы одной из групп: Z или Z_n .
10. Подгруппы циклической группы.
11. Смежные классы группы по подгруппе, простейшие свойства.
12. Равномощность смежных классов группы по одной и той же подгруппе (доказа-

- тельство и иллюстрация на примере).
13. Равномощность множества левых смежных классов и множества правых смежных классов по одной и той же подгруппе (доказательство).
 14. Теорема Лагранжа для конечных групп.
 15. Сопряжение элементов группы. Свойства. Классы сопряженности.
 16. Нормальная подгруппа группы, эквивалентные определения и примеры.
 17. Прямое произведение групп (подгрупп).
 18. Система инвариантов конечной абелевой группы.
 19. Факторгруппа.
 20. Коммутант и центр группы, некоторые связанные с ними утверждения.
 21. Гомоморфизмы групп, их виды.
 22. Образ и ядро гомоморфизма, основные утверждения, связанные с этими понятиями.
 23. Понятие об изоморфном вложении групп, критерий мономорфизма.
 24. Естественный гомоморфизм группы. Основная теорема о гомоморфизмах групп.
 25. Теорема Кэли о представлении конечной группы подстановками.
 26. Понятие о порождающем множестве элементов (под)группы.
 27. Теорема о виде элемента подгруппы, порожденной данным множеством элементов группы.
 28. Понятие о свободной группе.
 29. Теорема о том, что всякая группа является гомоморфным образом некоторой свободной группы.
 30. Понятие об определяющем множестве соотношений группы с иллюстрацией на примерах.
 31. Генетические коды следующих групп: конечной абелевой группы с заданной системой инвариантов, группы диэдра D_n .
 32. Генетические коды симметрической группы подстановок S_n и знакопеременной группы подстановок A_n ($n > 2$).
 33. Генетические коды всех групп восьмого порядка.
 34. Генетические коды групп порядков p , p^2 и pq , где p и q – различные простые числа.
 35. Генетические коды групп порядков p^3 , где p – нечетное простое число.
 36. Иллюстрация метода перечисления смежных классов при нахождении кода группы кватернионов восьмого порядка.

4.2.2 Список типовых практических заданий (для лабораторных занятий, контрольных работ и зачета)

1. По таблице Кэли группоида $G = \{a, b, c\}$ определите его вид:

$$\begin{array}{ccccc}
 & a & b & c & \\
 a & a & b & c & \\
 b & a & a & b & \\
 c & b & c & a &
 \end{array}$$

a) $a \ a \ b$; b) $a \ b \ c$; c) $b \ c \ a$.

2. Среди группоидов $G_1 = \{a_1, b, c_1\}$, $G_2 = \{a_2, b_2, c_2\}$ и $G_3 = \{a_3, b_3, c_3\}$ найдите два изоморфных и опишите изоморфизм одного из них на другой, если известно, что таблицы Кэли этих трех группоидов имеют вид:

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1 & a_1 & b_1 & b_2 & a_2 & c_2 & b_3 & c_3 & a_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 & c_2 & b_2 & a_2 & \text{и} & c_3 & a_3 & b_3 \\ b_1 & c_1 & a_1 & a_2 & c_2 & b_2 & a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

3. Описать автоморфизмы группоида $G = \{a, b, c\}$, таблица Кэли которого имеет вид:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{array}$$

4. В группе S_5 вычислите $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-2013}$.

5. Доказать, что указанное множество относительно указанной операции является группой: а) множество K^* обратимых элементов ассоциативного кольца K с единицей относительно операции умножения; б) множество $Q_p = \{m/p^n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ p -ичных дробей относительно операции сложения чисел.
6. Доказать, что указанное множество относительно указанной операции является группой: а) множество $GL_n(K)$ всех обратимых матриц порядка n ($n \in \mathbb{N}$) над коммутативным ассоциативным кольцом с единицей K относительно операции умножения матриц; б) множество $\sqrt[n]{1}$ всех комплексных корней n -ой степени из единицы ($n \in \mathbb{N}$) относительно операции умножения комплексных чисел.
7. Доказать, что в мультипликативной группе G а) для элементов $a, b \in G$ при условии, что порядок элемента ab конечен выполняется равенство $|ab| = |ba|$; б) если для любого $g \in G$ порядок g не более двух, то G – абелева группа.
8. Опишите все подгруппы циклической группы Z_{18} .
9. Сколько подгрупп имеет циклическая группа Z_{288} ?

10. Группу S_3 разбейте на правые смежные классы по подгруппе

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

11. Разбейте группу A_4 на левые смежные классы по подгруппе $\{e, (123), (132)\}$.

12. Опишите все подгруппы группы $G = \{e, a, b, c\}$, таблица Кэли которой имеет вид:

$$\begin{array}{cccc} e & a & b & c \\ a & e & c & b \\ b & c & e & a \\ c & b & a & e \end{array}$$

13. Найдите двумя способами (по определению и по алгоритму) в S_5 подстановку, сопряженную к подстановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ с помощью подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Разбить группу G на классы сопряженности, если а) $G=S_4$; б) $G=A_4$.

15. В группе S_3 указать все подгруппы, которые не являются нормальными.

16. В группе A_4 указать все подгруппы, которые являются нормальными.

17. Построить таблицу Кэли прямого произведения групп $G_1 = \{a_1, b\}$ и $G_2 = \{a_2, b_2\}$, зная

$$\text{их таблицы Кэли} \quad \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{array} \text{ и } \begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{array}.$$

18. Укажите все возможные способы разложения группы подстановок $V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ в прямое произведение двух неединичных подгрупп.
19. Найдите инварианты абелевой группы, которая изоморфна группе вида $Z_{12} \times Z_{18} \times Z_{10}$.
20. Постройте таблицу Кэли факторгруппы группы A_4 по подгруппе $V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
21. Найдите центр группы D подстановок четвертой степени, где $D = \{e, (1234), (1432), (13)(24), (14)(23), (12)(34), (13), (24)\}$.
22. Укажите все элементы группы подстановок четвертой степени $D = \{e, (1234), (1432), (13)(24), (14)(23), (12)(34), (13), (24)\}$, которые являются коммутаторами.
23. Рассматриваются две мультипликативные группы S_3 и $\{-1; 1\}$. Докажите, что отображение из S_3 в $\{-1; 1\}$, ставящее в соответствие четным подстановкам число 1, а нечетным – число (-1) , является гомоморфизмом. Найдите его ядро и образ, а также определите вид этого гомоморфизма.
24. Постройте регулярное представление подстановками группы $Z_2 \times Z_4$.
25. Доказать, что для аддитивных групп Z , Z_n и Q выполняются равенства: $Z = \langle 1 \rangle$; $Z_n = \langle 1 + nZ \rangle$ и $Q = \langle 1/n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$.
26. Показать, что $S_n = \langle (12); (13); \dots; (1n) \rangle = \langle (12); (12\dots n) \rangle$ при $n > 1$.
27. Доказать, что $A_n = \langle (i j k) \mid 1 \leq i \leq j \leq k \leq n \rangle = \langle (1 2 k) \mid 3 \leq k \leq n \rangle$ при $n > 2$.
28. Доказать, что $H = \{x^2 \mid x \in A_n\}$ является подгруппой группы A_n тогда и только тогда, когда $1 \leq n \leq 3$.
29. Найдите регулярное представление подстановками матричной группы $G = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
30. Найти центр и коммутант группы A_5 .
31. Укажите какой-нибудь генетический код группы $Z_2 \times S_3$.
32. В группе диэдра $D_5 = \langle a, b \mid a^5 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$ решите уравнение $a^x b^y = a^2 b^3 a^4$ с неизвестными $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и $y \in \{0, 1\}$.
33. В группе кватернионов $H_0 = \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ решите уравнение вида $a^x b^y = (ba^3)^5$ с неизвестными $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ и $y \in \{0, 1\}$.
34. Постройте таблицу Кэли факторгруппы G/H , где $H = \langle a \rangle$ и $G = \langle a, b \mid a^7 = b^3 = 1, b^{-1}ab = a^4 \rangle$.
35. Найдите центр группы $G = \langle a, b \mid a^{25} = b^5 = 1, b^{-1}ab = a^6 \rangle$.
36. Найдите коммутант группы $G = \langle a, b \mid a^9 = b^3 = 1, b^{-1}ab = a^4 \rangle$.
37. Сколько элементов второго порядка содержит группа диэдра восьмого порядка D_4 ? А сколько группа кватернионов H_0 ?
38. Поэлементно перечислить классы сопряженности группы диэдра D_3 .
39. Методом перечисления смежных классов покажите, что соотношения $x^3 = y^2 = (xy)^3 = 1$ являются генетическим кодом группы A_4 .
40. Методом перечисления смежных классов покажите, что соотношения $x^2 = y^2 = (xy)^4 = 1$ являются генетическим кодом группы D_4 .

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине (модулю) предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

5.1 Основная литература:

1. Каргаполов, М.И. Основы теории групп [Электронный ресурс] : учеб. пособие / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 288 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/177>.
2. Ляпин, Е.С. Упражнения по теории групп [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Е.С. Ляпин, А.Я. Айзенштат, М.М. Лесохин. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2010. — 272 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/528>

5.2 Дополнительная литература:

1. Ляпин Е.С. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс]. - СПб.: Лань, 2009. - URL: <http://e.lanbook.com/view/book/246/>
2. Биркгоф, Г. Современная прикладная алгебра / Г. Биркгоф, Т. Барти ; пер. с англ. Ю.И. Манина. - Москва : Мир, 1976. - 400 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=464046>.
3. Холл, М. Комбинаторный анализ / М. Холл ; К.А. Рыбников. - Москва : Издательство иностранной литературы, 1963. - 71 с. - (Библиотека сборника "Математика"). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454806>.
4. Холл, М. Теория групп / М. Холл ; пер. с англ. Н.В. Дюмина, З.П. Жилинского ; под ред. Л.А. Калужнина. - Москва : Издательство иностранной литературы, 1962. - 467 с. : ил. ; [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=464057>.

6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Курош, А.Г. Теория групп [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2011. — 808 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59755>.
2. Шилин И.А. Введение в алгебру. Группы [Электронный ресурс]. - СПб.: Лань, 2012. - URL: <http://e.lanbook.com/view/book/4120/>

7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Самостоятельная работа студента включает в себя повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к лабораторным занятиям, к контрольным работам и к зачету. Такой вид СР контролируется в ходе проверки домашних заданий, заданий контрольных работ и в ходе зачета. Предполагается самостоятельное изучение студентами теоретического материала по темам реферативно-творческих отчетов, указанных в пункте 4.1.2. Контроль осуществляется во время консультаций (вызывных или по желанию студента), а также на лабораторных занятиях.

Виды самостоятельной работы

Обязательными при изучении дисциплины «Элементы комбинаторной теории групп» являются следующие виды самостоятельной работы:

- разбор и самостоятельное изучение теоретического материала по конспектам лекций и по учебным пособиям из списка источников литературы;
- самостоятельное решение задач по темам лабораторных занятий;
- подготовка к контрольным работам;
- подготовка к реферативному докладу;
- подготовка к зачету.

7.1. Методические указания к самостоятельному изучению студентами теоретического материала

Для подготовки к ответам на теоретические вопросы в ходе контрольных работ и на зачете студентам достаточно использовать материал лекций. Теоретический материал содержится в учебных пособиях из списка основной литературы 1 – 2. Для изучения теоретического материала, необходимого для подготовки реферативного доклада, кроме основных источников литературы возможно использование дополнительных источников и Интернет-ресурса. В случае затруднений, возникающих у студентов в процессе самостоятельного изучения теории, преподаватель разъясняет сложные моменты на консультациях.

7.2. Методические указания к самостоятельной подготовке студентов для выполнения практических заданий лабораторных занятий

Для выполнения домашнего практического задания необходимо разобрать материал по соответствующей теме лабораторного занятия. При этом используются указания, данные преподавателем в ходе занятия, а также теоретико-практический материал, имеющийся в источниках из списка основной литературы. Если студент не смог понять приведенный в указанных источниках разбор типовых примеров в той степени, чтобы само-

стоятельно использовать предложенный алгоритм для решения задания, то он может получить консультацию преподавателя.

7.3. Методические указания к самостоятельной подготовке студентов к выполнению контрольных работ

В течение семестра проводятся три контрольных работы, каждая из которых длится 45 минут и состоит из трех практических и одного теоретического задания. Тематика трех контрольных работ соответствует тематике трех содержательных разделов дисциплины: основные понятия теории групп, гомоморфизмы групп, порождающие элементы и определяющие соотношения групп (пункт 2.2). Каждое задание оценивается по пятибалльной шкале, высокая оценка ставится при получении не менее 16 баллов, нижний порог успешности составляет 7 баллов. Для подготовки к контрольной работе необходимо выполнять задания в ходе лабораторных занятий, а также домашние задания. В процессе самоподготовки студенту желательно ознакомиться с разбором опорных по рассматриваемым темам задач, имеющих в пособиях из списка литературы. Выше в пункте 4.2.2 приведен список заданий, который включает в себя все типы практических заданий контрольных работ.

7.4. Методические рекомендации к самостоятельной подготовке студентов к реферативно-творческому отчету

Каждый студент должен подготовить в течение семестра реферативно-творческий отчет по одной из тем, предназначенной для самостоятельного изучения. Для подготовки отчета желательно кроме основных источников литературы использовать дополнительные источники, а также Интернет-ресурс. Отчет готовится в письменной форме и может быть представлен студентом на лабораторном занятии в виде доклада у доски или в виде презентации. Оформление письменного отчета должно удовлетворять требованиям: а) текст набирается 14 шрифтом на бумаге формата А 4; б) на титульном листе кроме темы также указывается факультет, направление (бакалавриат), курс, группа, ФИО студента; в) содержание материала по объему составляет 4-5 страниц; г) список литературы содержит не менее двух источников (возможно из списка литературы в пункте 5). Темой каждого студенческого отчета является некоторый алгоритм решения определенной задачи комбинаторной теории групп. Отчет состоит из двух частей: первой – реферативной, в которой подробно с точки зрения теории, имеющейся в источниках литературы, описывается соответствующий алгоритм; второй – творческой, в которой студент самостоятельно (возможно, консультируясь у преподавателя) строит блок-схему для алгоритма или даже на одном из языков программирования самостоятельно пишет программу. В случае написания программы, студент иллюстрирует ее работу на лабораторном занятии (с использованием ноутбука или в компьютерном классе). Отчет, состоящий только из реферативной части оценивается удовлетворительной оценкой, состоящий из реферативной части и содержащий верную блок-схему, – хорошей оценкой, имеющий самостоятельно полученную рабочую программу на одном из языков программирования, - отличной оценкой (при наличии программы объем письменного отчета может быть более 5 страниц).

7.5. Методические указания к самостоятельной подготовке студентов к зачету

Согласно учебному плану дисциплины «Элементы комбинаторной теории групп» итоговой формой контроля является зачет. Для сдачи зачета студент должен научиться на

лабораторных занятиях решать практические задания по темам разделов 1-3, выполнять домашние задания, а также успешно выполнить три контрольные работы. Типы практических заданий на зачет соответствуют заданиям из пункта 4.2. Также на зачете студентам предлагаются и теоретические задания, состоящие в письменном ответе на один из вопросов, приведенных в пункте 4.2. Количество практических и теоретических заданий зависит от активности и результативности работы студента в течение семестра. Если при условии хорошей посещаемости и активной работы на занятиях студент по трем контрольным работам и реферативно-творческому отчету заслужил высокие оценки, то он автоматически получает зачет.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю) (при необходимости)

8.1. Перечень информационных технологий.

Не прилагается.

8.2 Перечень необходимого программного обеспечения

- Microsoft Windows
- Microsoft Office
- MATLAB

8.3 Перечень необходимых информационных справочных систем

Электронная библиотечная система eLIBRARY.RU (<http://www.elibrary.ru/>)

Рабочая программа дисциплины «ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОЙ ТЕОРИИ ГРУПП» составлена в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки по профилю «Алгебра, теория чисел и дискретный анализ».

Программу составил

Г.Н. Титов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Титов

Рабочая программа дисциплины «ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОЙ ТЕОРИИ ГРУПП» утверждена на заседании кафедры (разработчика) функционального анализа и алгебры
протокол № 15 от 09.06.2017
Заведующая кафедрой (разработчика) Барсукова В.Ю.

Барсукова

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры (выпускающей) функционального анализа и алгебры
протокол № 15 от 09.06.2017
Заведующая кафедрой (выпускающей) Барсукова В.Ю.

Барсукова

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук «20» июня 2017 г, протокол № 3.

Председатель УМК факультета Титов Г.Н.

Титов

Рецензенты:

Терещенко И.В., заведующий кафедрой общей математики ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», кандидат физ.-мат. наук, доцент;

Гаркуша О.В., доцент кафедры информационных технологий ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», кандидат физ.-мат. наук, доцент.

9 Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины (мо-
---	-----------	---

		дуля) и оснащенность
1.	Лекционные занятия	Лекционная аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук, ...) и соответствующим программным обеспечением (ПО)
2.	Лабораторные занятия	Специальное помещение, оснащенное учебной мебелью, доской, маркерами и мелом
3.	Групповые (индивидуальные) консультации	Аудитория (кабинет) оснащенная учебной мебелью, доской, маркерами и мелом
4.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Аудитория (кабинет) оснащенная учебной мебелью, доской, маркерами и мелом
5.	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.