

Министерство образования и науки Российской Федерации
филиал федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Кубанский государственный университет»
в г. Армавире



УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по работе с филиалами

Евдокимов А.А.

» 08 2015г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.09 Теория вероятностей и математическая статистика

Направление подготовки: 38.03.01 Экономика

Направленность (профиль): Финансы и кредит

Форма обучения: заочная

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Краснодар 2015

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 38.03.01 Экономика

Программу составил:

Ст. преподаватель кафедры математики и информатики,

канд. пед. наук

Г.А. Алексанян

«28» августа 2017г.



Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры математики и информатики (разработчика)

Протокол № 1 «28» августа 2017г.

Заведующий кафедрой,

канд. пед. наук



Э.П. Черняева

Рабочая программа дисциплины обсуждена на заседании кафедры математики и информатики (выпускающей)

Протокол № 1 «28» августа 2017г.

Заведующий кафедрой,

канд. экон. наук



Э.П. Черняева

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии филиала по УГН «Экономика и управление»

Протокол № 1 «28» августа 2017г.

Председатель УМК филиала по УГН

«Экономика и управление»,

канд. экон. наук, доц



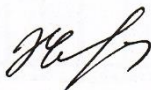
Е.А. Кабачевская

Рецензенты:

Дегтярева Е. А., доцент кафедры социально-гуманитарных дисциплин филиала ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет» в г. Тихорецке, канд. пед. наук

Часов К.В., доцент кафедры ОНД АМТИ, канд. пед. наук

Лист изменений к рабочей программе учебной дисциплины
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Содержание изменений	№ протокола заседания кафедры, дата	ФИО / подпись зав. кафедрой
В соответствии с выходом нового приказа от 05.04.2017 №301 «Об утверждении Порядка организации и осуществлении образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры» была актуализирована рабочая программа	№1 от 28.08.2017	Э.П. Черняева 

1 Цели и задачи изучения дисциплины

1.1 Цель освоения дисциплины

Основной целью дисциплины Б1.Б.09 «Теория вероятностей и математическая статистика» является сформировать у обучающихся теоретико-вероятностный и статистический аппарат для решения типовых задач и прикладных задач экономической деятельности; навыки работы со специальной математической литературой.

1.2 Задачи дисциплины

- 1) изучение основных понятий и формул теории вероятностей для нахождения вероятностей в условиях статистических испытаний;
- 2) изучение способов определения и построения законов распределения вероятностей случайных величин и вычисления их числовых характеристик;
- 3) изучение основных понятий, связанных со статистической зависимостью между случайными величинами;
- 4) изучение методов статистической точечной и интервальной оценки числовых характеристик случайных величин;
- 5) изучение методов статистической оценки гипотез;
- 6) изучение инструментальных методов решения статистических задач в среде Excel.

1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина Б1.Б.09 «Теория вероятностей и математическая статистика» относится к базовой части Блока 1 «Дисциплины (модули)» учебного плана.

Для изучения данной дисциплины необходимы следующие знания, умения и навыки, формируемые предшествующими дисциплинами.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся *общепрофессиональных* компетенций (ОПК)

№ п. п.	Индекс компе- тенции	Содержание компе- тенции	В результате изучения учебной дисциплины обу- чающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
1.	ОПК-3	способностью вы- брать инструмен- тальные средства для обработки эконо- мических данных в соответствии с по- ставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полу- ченные выводы	фундамен- тальные поня- тия, определе- ния и теоремы теории веро- ятности и ма- тематической статистики	применять ап- парат теории вероятностей и математиче- ской статисти- ки для реше- ния приклад- ных задач экономиче- ской деятель- ности	навыками ре- шения задач по теории вероят- ностей и мате- матической статистике

2 Структура и содержание дисциплины

2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 4 зач. ед. (144 часа), их распределение по видам работ представлено в таблице

(для студентов ЗФО) зач

Вид учебной работы		Всего часов	Курс (часы)	
			2	
Контактная работа, в том числе:				
Аудиторные занятия (всего):				
Занятия лекционного типа		4	4	
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)				
Лабораторные занятия		6	6	
Иная контактная работа:				
<i>КСР</i>				
<i>ИКР</i>		0,2	0,2	
Самостоятельная работа (всего)		130	130	
<i>Проработка учебного (теоретического) материала</i>		45	45	
Анализ научно-методической литературы		45	45	
Реферат, эссе		20	20	
Подготовка к текущему контролю		20	20	
Контроль:		3,8	3,8	
Подготовка к экзамену				
Общая трудоемкость	час.	144	144	
	в том числе контактная работа	10,2	10,2	
	зач. ед.	4	4	

2.2 Структура дисциплины

Разделы дисциплины, изучаемые на 2 курсе (заочная форма)

№	Наименование разделов	Количество часов			
		Всего	Аудиторная Работа		Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	
1	2	3	4	5	7
1.	Случайные события	48	2	2	44
2.	Случайные величины	45	-	2	43
3.	Элементы математической статистики	47	2	2	43
4.	КСР	-			
5.	ИКР	0,2			
6.	Контроль	3,8			

	<i>Итого по дисциплине:</i>	144	4	6	130
--	-----------------------------	------------	----------	----------	------------

Примечание: Л – лекции, ПЗ – практические занятия / семинары, СРС – самостоятельная работа студента, КСР – Контроль самостоятельной работы, ИКР – индивидуальная контактная работа

2.3 Содержание разделов дисциплины

2.3.1 Занятия лекционного типа

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Случайные события	События, виды случайных событий, операции над случайными событиями. Теоремы сложения вероятностей. Теоремы умножения вероятностей. Следствия теорем сложения и умножения вероятностей. Теорема сложения вероятностей совместных событий. Формула полной вероятности. Вероятность гипотез Формулы Байеса. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Локальная теорема Лапласа. Интегральная теорема Лапласа. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.	Реферат (Р), Эссе (Э), Дискуссия
2.	Случайные величины	Задание дискретной случайной величины. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. Биноминальное распределение. Распределение Пуассона. Простейший поток событий. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Дисперсия дискретной случайной величины. Функция распределения вероятностей случайных величин. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Равномерное распределение. Нормальное распределение. Показательное распределение и его числовые характеристики. Функция надежности. Распределение функции одного и двух случайных аргументов.	Реферат (Р), Эссе (Э)
	Элементы математической статистики	Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Точечные оценки. Метод моментов. Метод наибольшего правдоподобия. Интервальные оценки.	Реферат (Р), Эссе (Э)

2.3.2 лабораторные занятия

№	Наименование раздела	Тематика практических занятий (семинаров)	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Случайные события	1. События, виды случайных событий, операции над случайными событиями.	Устный опрос (Уо),

		2. Теоремы сложения вероятностей. 3. Теоремы умножения вероятностей. 4. Следствия теорем сложения и умножения вероятностей. 5. Теорема сложения вероятностей совместных событий. 6. Формула полной вероятности. 7. Вероятность гипотез Формулы Байеса. 8. Повторение испытаний. 9. Формула Бернулли. 10. Локальная теорема Лапласа. 11. Интегральная теорема Лапласа. 12. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.	Реферат, отчет по лабораторной работе
2.	Случайные величины	1. Задание дискретной случайной величины. 2. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. 3. Биноминальное распределение. 4. Распределение Пуассона. 5. Простейший поток событий. 6. Математическое ожидание дискретной случайной величины. 7. Дисперсия дискретной случайной величины. 8. Функция распределения вероятностей случайных величин. 9. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. 10. Равномерное распределение. 11. Нормальное распределение. 12. Показательное распределение и его числовые характеристики. 13. Функция надежности. 14. Распределение функции одного и двух случайных аргументов.	Устный опрос (Уо), Реферат, отчет по лабораторной работе
3	Элементы математической статистики	1. Статистическое распределение выборки. 2. Эмпирическая функция распределения. 3. Точечные оценки. 4. Метод моментов. 5. Метод наибольшего правдоподобия. 6. Интервальные оценки.	Устный опрос (Уо), Реферат, отчет по лабораторной работе

2.3.3 Примерная тематика курсовых работ

Курсовые работы учебным планом не предусмотрены

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
---	---------	---

1	2	3
1	Проработка учебного (теоретического) материала	Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся (рассмотрены и утверждены на заседании кафедры математики и информатики филиала ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет» в г. Армавире 28 августа 2017 г., протокол №1)
2	Анализ научно-методической литературы	- Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся (рассмотрены и утверждены на заседании кафедры математики и информатики филиала ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет» в г. Армавире 28 августа 2017 г., протокол №1) - Основная и дополнительная литература по дисциплине.
3	Подготовка рефератов, эссе	Методические рекомендации по подготовке, написанию и порядку оформления рефератов и эссе (рассмотрены и утверждены на заседании кафедры математики и информатики филиала ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет» в г. Армавире 28 августа 2017 г., протокол №1)

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

3 Образовательные технологии

При реализации учебной работы по дисциплине используются как традиционные образовательные технологии, ориентированные на организацию образовательного процесса, предполагающую прямую трансляцию знаний от преподавателя к обучающемуся (преимущественно на основе объяснительно-иллюстративных методов обучения), так и активные и интерактивные формы.

Используемые образовательные технологии по-новому реализуют содержание обучения и обеспечивают реализацию компетенций ОПК-3, подразумевая научные подходы к организации образовательного процесса, изменяют и предоставляют новые формы, методы и средства обучения.

Курс	Вид занятия (Л)	Используемые интерактивные образовательные технологии	Количество часов
2	Л – Случайные события	лекции-дискуссии	2
Итого:			2

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля.

Примерные вопросы для устного опроса

Вопросы для устного опроса по разделу 1 «Случайные события»

1. Определение случайного события.
2. Какое событие называется достоверным, невозможным.
3. Какие события называются несовместными.
4. Какая группа событий называется полной.
5. Какие события называются равновероятными.
6. Что называется вероятностью случайного события.
7. Что такое относительная частота случайного события.
8. Что такое сумма событий.
9. Что такое произведение событий.
10. Что такое разность событий.
11. Что такое противоположное к A событие.
12. Как найти вероятность противоположного события к A .
13. Чему равна вероятность события достоверного.
14. Чему равна вероятность события невозможного.
15. Классическое определение вероятности. Условия его применимости.
16. Комбинаторное правило суммы.
17. Комбинаторное правило произведения.
18. Определение числа перестановок без повторений из n элементов. Формула для его нахождения.
19. Определение числа размещений без повторений из n элементов по k элементов. Формула для его нахождения.
20. Определение числа сочетаний без повторений из n элементов по k элементов. Формула для его нахождения.

Вопросы для устного опроса по разделу 2 «Случайные величины»

1. Теорема сложения вероятностей двух совместных событий.
2. Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий.
3. Теорема сложения вероятностей нескольких несовместных событий.
4. Определение условной вероятности.
5. Определение вероятности независимых событий.
6. Формула полной вероятности. Условия применимости. Свойства группы гипотез.
7. Формула Байеса. Условия применимости.
8. Формула для нахождения вероятности происхождения хотя бы одного из n независимых, но совместных событий $A_1, A_2, A_3 \dots$.
9. Схема Бернулли: основные составляющие условия.
10. Формула Бернулли.
11. Формула Пуассона. Условия применения.
12. Формула Муавра-Лапласа. Условия применения.
13. Интегральная теорема Лапласа. Условия применения.
14. Дискретные случайные величины. Распределение дискретной случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия, их свойства.

15. Непрерывные случайные величины. Функция и плотность распределения вероятностей. Математическое ожидание и дисперсия, их свойства.

Вопросы для устного опроса по разделу 3 «Элементы математической статистики»

1. Выборочный метод. Генеральная и выборочная совокупности.
2. Типы выборок. Полигон и гистограмма.
3. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения.
4. Статистические оценки. Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки. Выборочная средняя и выборочная дисперсия.
5. Точечная и интервальная оценки. Доверительный интервал. Метод моментов для точечной оценки параметров распределения.
6. Проверка статистических гипотез. Понятие статистической гипотезы. Ошибки первого и второго рода.
7. Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности.
8. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей.

Примерные задания для лабораторных работ

Лабораторная работа 1

Дискретное преобразование Фурье

1. Цель работы: изучение методов частотного анализа дискретных сигналов с помощью дискретного преобразования Фурье.

2. Теоретические сведения.

Многие сигналы удобно анализировать, раскладывая их на синусоиды (гармоники). Тому есть несколько причин. Например, подобным образом работает человеческое ухо. Оно раскладывает звук на отдельные колебания различных частот. Кроме того, синусоиды являются «собственными функциями» линейных систем (т.к. они проходят через линейные системы, не изменяя формы, а могут изменять лишь фазу и амплитуду).

Пусть дискретный сигнал $x(n)$ имеет период N точек. В этом случае его можно представить в виде конечного ряда (т.е. линейной комбинации) дискретных синусоид:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N/2} C_k \cos \frac{2\pi k(n + \varphi_k)}{N} \quad (\text{ряд Фурье}).$$

Эквивалентная запись (каждый косинус раскладываем на синус и косинус, но теперь – без фазы):

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N/2} A_k \cos \frac{2\pi kn}{N} + \sum_{k=0}^{N/2} B_k \sin \frac{2\pi kn}{N} \quad (\text{ряд Фурье}).$$

Базисные синусоиды имеют кратные частоты. Первый член ряда ($k=0$) – это константа, **называемая постоянной составляющей (DC offset)** сигнала. Самая первая синусоида ($k=1$) имеет такую частоту, что ее период совпадает с периодом самого исходного сигнала. Самая высокая составляющая ($k=N/2$) имеет такую частоту, что ее период равен двум отсчетам. Коэффициенты A_k и B_k называются **спектром** сигнала (*spektrum*). Они показывают амплитуды синусоид, из которых состоит сигнал. Шаг по частоте между двумя соседними синусоидами из разложения Фурье называется **частотным разрешением** спектра.

На рис. 1 показаны синусоиды, по которым происходит разложение дискретного сигнала из 8 точек. Каждая из синусоид состоит из 8 точек, то есть является обычным дискретным сигналом. Непрерывные синусоиды показаны на рисунке для наглядности.

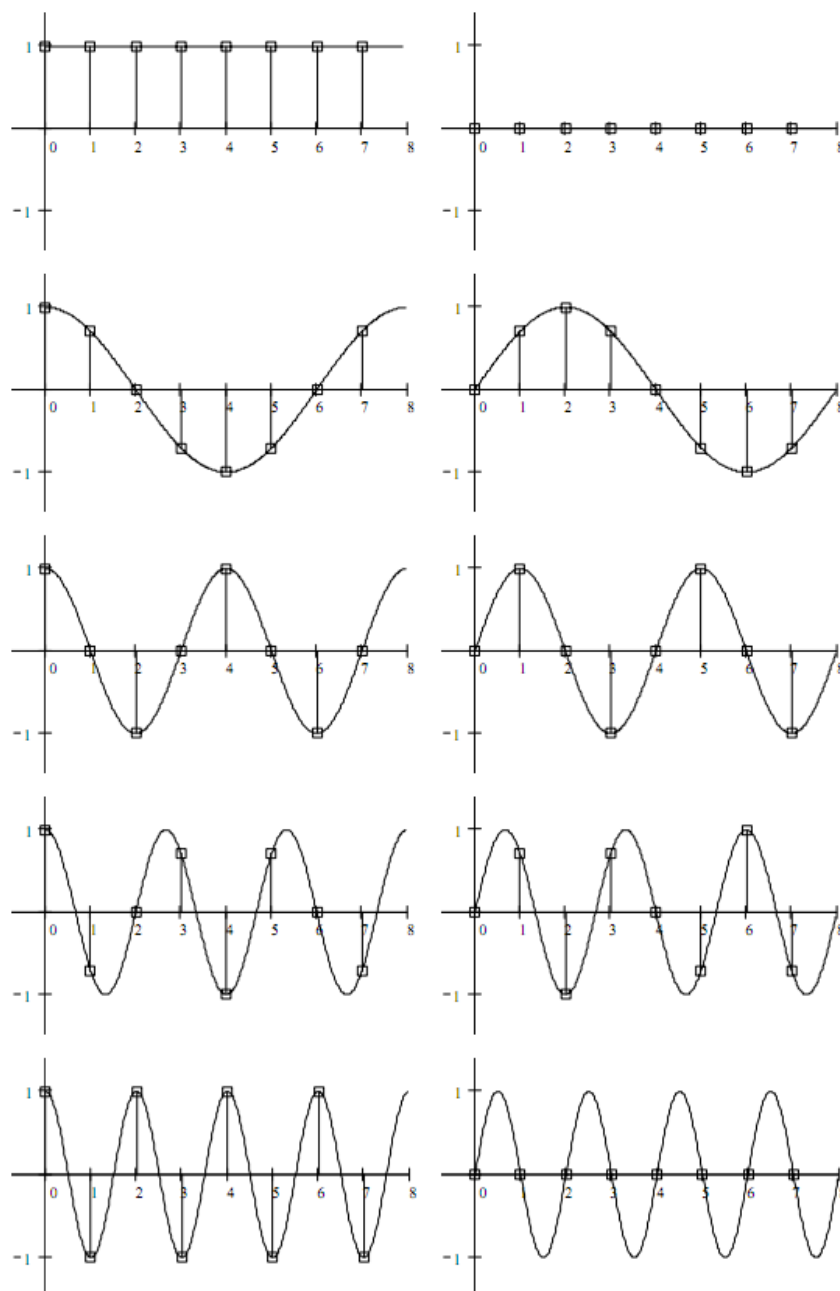


Рис. 1. Базовые функции ряда Фурье для 8-точечного дискретного сигнала.

Слева - косинусы, справа - синусы. Частоты увеличиваются сверху вниз.

Зная коэффициенты A_k и B_k , можно однозначно восстановить исходный сигнал, вычислив сумму ряда Фурье в каждой точке. Разложение сигнала на синусоиды (т.е. получение коэффициентов) называется **прямым преобразованием Фурье**. Обратный процесс – синтез сигнала по синусоидам – называется **обратным преобразованием Фурье**.

Рассмотрим алгоритм прямого преобразования Фурье, т.е. нахождения коэффициентов A_k и B_k

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \cos \frac{2\pi k i}{N}, \quad k = 0, \boxed{?}, \frac{N}{2};$$

$$B_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \sin \frac{2\pi k i}{N}, \quad k = 0, \boxed{?}, \frac{N}{2}.$$

3. Задание.

1. Согласно варианту задания (табл.5.1) средствами *Matlab* задать функцию тестового сигнала.
2. Провести процедуру прямого и обратного с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ).
3. Вывести результаты в виде графиков:
 - Функция сигнала (в зависимости от числа отсчетов);
 - Прямое преобразование Фурье (в зависимости от частоты);
 - Обратное преобразование Фурье (в зависимости от числа отсчетов).

Таблица 5.1

Вариант	Тестовый сигнал	Коэффициенты
1	$x_k = A \cos\left(\frac{2\pi t_k}{T} + \varphi\right)$	$A = 3; \varphi = \pi / 8; T = 100;$ $k = 0, 1, \boxed{?}, 1023$
2	$x_k = \frac{A}{\sqrt{k+1}} \sin\left(\frac{2\pi k \Delta t}{T / \sqrt[n]{k+1}} + \varphi\right)$	$A = 2; \varphi = \pi / 3; T = 100; \Delta t = 1;$ $n = 5; k = 0, 1, \boxed{?}, 1023$

3	$x_k = 4 + A \sin\left(\frac{2\pi t_k}{T} + \varphi\right)$	$A = 1; \varphi = \pi / 12; T = 300;$ $k = 0, 1, \boxed{?}, 1023$
4	$x_k = A \cos\left(\frac{2\pi (0,3k)^n \Delta t}{T} + \varphi\right) + 2$	$A = 3; \varphi = \pi / 6; T = 200; \Delta t = 1;$ $n = 1,45; k = 0, 1, \boxed{?}, 1023$
5	$x_k = A \cos\left(\frac{2\pi t_k}{T} + \varphi\right)$	$A = 2; \varphi = \pi / 8; T = 150;$ $k = 0, 1, \boxed{?}, 1023$
6	$x_k = \frac{A}{\sqrt{k+1}} \sin\left(\frac{2\pi k \Delta t}{T / \sqrt[k]{k+1}} + \varphi\right)$	$A = 3; \varphi = \pi / 3; T = 150; \Delta t = 1;$ $n = 5; k = 0, 1, \boxed{?}, 1023$
7	$x_k = 4 + A \sin\left(\frac{2\pi t_k}{T} + \varphi\right)$	$A = 2; \varphi = \pi / 12; T = 200;$ $k = 0, 1, \boxed{?}, 1023$
8	$x_k = A \cos\left(\frac{2\pi (0,3k)^n \Delta t}{T} + \varphi\right) + 2$	$A = 2; \varphi = \pi / 6; T = 250; \Delta t = 1;$ $n = 1,45; k = 0, 1, \boxed{?}, 1023$
9	$x_k = A \cos\left(\frac{2\pi t_k}{T} + \varphi\right)$	$A = 4; \varphi = \pi / 8; T = 250;$ $k = 0, 1, \boxed{?}, 1023$

4. Пример выполнения работы.

Задан тестовый сигнал

$$x_k = A \sin\left(\frac{2\pi (k-1)\Delta t}{T} + \varphi\right),$$

где

$$A = 2; \varphi = \pi / 4; T = 200; \Delta t = 1;$$

$$k = 0, 1, \boxed{?}, 1023.$$

Вспользуемся пакетом *Matlab* . В этом пакете прямое и обратное преобразование Фурье осуществляется встроенными функциями:

- **fft(y)** – вектор прямого преобразования Фурье;
- **ifft(v)** – вектор обратного преобразования Фурье,

здесь **y** - вектор действительных данных, взятых через равные промежутки значений

аргумента;

v - вектор действительных данных Фурье-спектра, взятых через равные

промежутки значений частоты.

На рис. 2 показан фрагмент среды Matlab, на котором проиллюстрирована математическая реализация данного примера.

```
>> clear all % очистка памяти
>> k=1:1:1024;
>> A=2; N=200; dt=1; fi=pi/4;
>> s=(2*pi*(k-1)*dt)/N;
>> x1=A*sin(s+fi); % задание функции сигнала
>> y=fft(x1); % прямое преобразование Фурье
>> F=ifft(y); % обратное преобразование Фурье
>> f=(0:length(y)-1)/length(y); % вектор частот
>> clf
>> subplot(311), plot(x1) % выбор окна, построение исходного сигнала
>> xlim([0 1024]);
>> subplot(312), plot(f,abs(y)) % выбор окна, прямой спектр Фурье
>> ylim([0 1024]);
>> subplot(313), plot(F) % выбор окна, обратный спектр Фурье
>> xlim([0 1024])
>> ylim([-2 2])
>>
```

Рис. 2

В результате решения задачи получили графики (рис. 3): исходного сигнала(*a*), прямого преобразования Фурье (*б*), обратного преобразования Фурье (*в*).

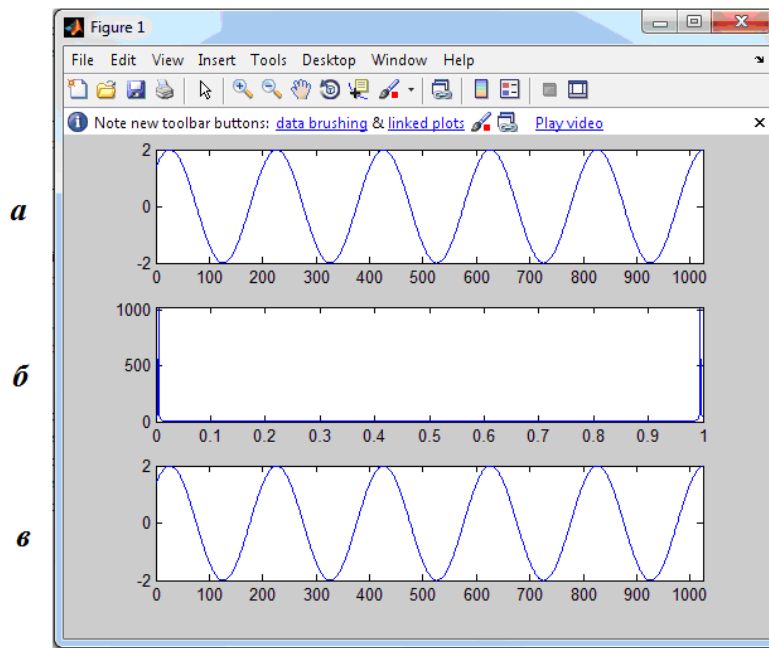


Рис.3

Лабораторная работа 2

Моделирование случайных чисел

1. Цель работы

Изучить методы и алгоритмы моделирования случайных чисел.

2. Теоретические сведения

Моделирование на ЭВМ процессов функционирования различных систем связано с выработкой большого количества случайных чисел с заданными законами распределения. Для этой цели используется обычно один из следующих способов:

- *табличный* (файловый) – ввод таблиц равномерно распределённых случайных чисел во внешнюю или оперативную память ЭВМ;
- *аппаратный* (физический) – использование специального приспособления к ЭВМ – "датчика" случайных чисел, формирующего случайные величины путём физического моделирования некоторых случайных процессов (излучения радиоактивных источников, шумов электронных ламп и др.);
- *алгоритмический* (программный) – использование псевдослучайных (квазислучайных) последовательностей, реализуемых программным генератором случайных чисел.

Псевдослучайными числами называются числа, вырабатываемые ЭВМ рекуррентным способом по специальным алгоритмам, когда каждое последующее число ξ_i получается из предыдущих в результате применения некоторых арифметических и логических операций. Такая последовательность чисел удовлетворяет известным критериям случайности, хотя входящие в эту последовательность числа зависимы между собой. Одним из недостатков этого метода является периодичность образованных программным способом псевдослучайных чисел, но для ряда задач, не требующих большого количества случайных чисел, длина периода является достаточной.

Достоинства метода псевдослучайных чисел.

1. На получение каждого случайного числа затрачивается несколько простых операций, так что скорость генерирования случайных чисел имеет тот же порядок, что и скорость работы ЭВМ.
2. Малый объем памяти ЭВМ для программирования.
3. Любое из чисел легко воспроизвести.
4. Качество генерируемых случайных чисел достаточно проверить один раз.

2.1. Генераторы случайных чисел

Метод Неймана. Первый алгоритм для получения псевдослучайных чисел был предложен Дж. Нейманом. Его называют методом середины квадратов.

Пусть задано четырехзначное число $x_0 = 0,9876$. Возведем его в квадрат. Получим 8-значное число $x_0^2 = 0,97535376$. Выберем 4 средние цифры из этого числа и положим $x_1 = 0,5353$. Затем снова возведем в квадрат и извлечем из него 4 средние цифры. Получим x_2 и т.д.

а) конгруэнтные методы

Самое широкое применение при моделировании на ЭВМ получили конгруэнтные методы генерации псевдослучайных последовательностей, в основе которых лежит фундаментальное понятие *конгруэнтности*.

Два целых числа A и B конгруэнтны (сравнимы) по модулю m , если их разность делится на m без остатка. То есть

$$B - A = km,$$

где k - целое. Это определение записывается так $A \equiv B \pmod{m}$.

Например:

$$1984 \equiv 4 \pmod{10}, 5008 \equiv 8 \pmod{10^3} \text{ и т.д.}$$

Величина m берется равной длине машинного слова $m = 2^b$, где b — число бит в машинном слове.

Мультипликативный конгруэнтный метод (Алгоритм Лемера).

Последовательность случайных чисел $\{x_i\}$ получается с помощью следующего итерационного соотношения:

$$x_{i+1} = (ax_i) \bmod m, \quad (1)$$

где x_i и x_{i+1} - очередное и последующее случайное число;

m - модуль, $m > 0$;

a - множитель, $0 \leq a < m$;

x_0 - начальное значение, $0 \leq x_0 \leq m$.

Если m и a являются целыми, то создается последовательность целых чисел в диапазоне $0 \leq x_i \leq m$. Из рекуррентной природы формулы следует, что при одном и том же значении x_0 мы получим при повторной генерации ту же самую последовательность.

Последовательность случайных чисел периодически повторяются. Это связано с тем, что числа x_i могут принимать только значения $0, 1, 2, \dots, m-1$. То есть, самое большое через $m-1$ шагов уже один раз полученное число должно появиться опять, а с ним повторяется и вся последовательность. Таким образом, длина периода при модуле m не может превышать $m-1$. Поэтому выбор значений a и m является критичным для разработки хорошего генератора случайных чисел. Для практических расчетов принимают $m = 2^k$, $k = 14, 15, 31$; $a = 2^s + 3$, $s = 3, 4, 5$, $\dots$.

Последовательность чисел ξ_i , равномерно распределенных на интервале от нуля до единицы, рассчитывается по формуле

$$\xi_i = \frac{x_i}{m}. \quad (2)$$

Линейный конгруэнтный метод. Схема метода предложена Д.Лехмером в 1949 году. Работа этих генераторов основана на использовании формулы:

$$x_{i+1} = (ax_i + b) \bmod m, \quad a, b > 0. \quad (3)$$

Число m выбирается аналогично предыдущему пункту. Множитель a предпочтительно выбирать в интервале $[0,01m; 0,99m]$. Значение c может быть произвольным, но не должно иметь общего множителя с m . При $b=0$ получаем, рассмотренный выше мультипликативный метод.

С вычислительной точки зрения линейный метод генерации последовательности неотрицательных целых чисел сложнее мультипликативного на одну операцию сложения, но при этом возможность выбора дополнительного параметра позволяет уменьшить возможную корреляцию получаемых чисел. Однако экспериментальная проверка качества генерируемой последовательности чисел на основе этой формулы является сложнее.

Квадратичный конгруэнтный метод. Последовательность случайных чисел вычисляется с помощью следующего рекуррентного соотношения

$$x_{i+1} = (ax_i^2 + bx_i + c) \bmod m. \quad (4)$$

Наибольшее значение периода данного датчика достигается при четном a , нечетном c и если нечетное b удовлетворяет условию $b \bmod 4 = (a + 1) \bmod 4$.

Кубический конгруэнтный метод. Последовательность случайных чисел вычисляется с помощью следующего рекуррентного соотношения

$$x_{i+1} = (ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d) \bmod m \quad (5)$$

Для практических расчетов принимают $m = 2^k$, $k = 14, 15, 31$.

Генератор Фибоначчи. Последовательность случайных чисел вычисляется с помощью следующего рекуррентного соотношения

$$x_{i+1} = (x_i + x_{i-1}) \bmod m \quad (6)$$

где x_i и x_{i-1} - целые числа, лежащие между нулем и m ($m = 2^k$, $k = 14, 15, 31$).

BBS – генератор. Данный генератор вычисляется по формуле

$$x_{i+1} = x_i^2 \bmod m, i = 0, 1, \dots (7)$$

Вначале выбираются два больших простых числа p и q . Числа p и q должны удовлетворять условиям $p \bmod 4 = 3, q \bmod 4 = 3$, т.е. при делении p и q на 4 должен получиться одинаковый остаток 3. Далее вычисляется число $m = p \cdot q$, называемое целым числом Блюма. По формуле $x_0 = x \bmod m$ вычисляется стартовое число генератора, где x - взаимно простое число (т.е. не имеющее общих делителей, кроме 1).

Системный генератор MS Fortran.

$$x_{i+1} = 48271 \cdot x_i \bmod (2^{31} - 1). (8)$$

б) тригонометрические методы

Основаны на использовании ошибки вычисления косинуса больших алгоритмов.

$$x_{i+1} = \frac{1}{\pi} \arccos(\cos(10^n \cdot x_i)), (9)$$

где n - целое число, определяемое типом ЭВМ;

x_0 - начальное значение, $x_0 < 1$.

Тригонометрический метод со счетчиком

$$x_{i+1} = \frac{1}{\pi} \arccos(\cos((i + 100) \cdot x_i)), (10)$$

где x_0 - начальное значение, $x_0 < 1$.

2.2. Проверка качества работы генератора случайных чисел (ГСЧ)

Применяемые генераторы случайных чисел перед моделированием должны пройти тщательное предварительное тестирование на равномерность, стохастичность и независимость получаемых последовательностей случайных чисел. Существует множество статистических критериев, которые можно использовать для проверки того, будет ли последовательность случайной. Наиболее точным считается спектральный критерий. Например, очень распространенный критерий, называемый *КС-критерием*, или критерием Колмогорова - Смирнова.

Можно воспользоваться приближенным тестом, который состоит в проверке на равномерность распределения N случайных чисел ξ_i .

а) *проверка статистических характеристик*. Тест состоит в вычислении математического ожидания M_ξ и дисперсии D_ξ полученных случайных чисел. Согласно этому тесту, для равномерного распределения должны выполняться условия:

$$M_\xi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \approx \frac{1}{2} = 0,5 ;$$

$$D_\xi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\xi_i - M_\xi)^2 \approx \frac{1}{12} = 0,0833 ;$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} \approx 0,2885 .$$

б) *частотный тест*. Позволяет выяснить, сколько чисел попало в интервал $(\xi_i - \sigma_\xi ; \xi_i + \sigma_\xi)$, то есть $(0.5 - 0.2887 ; 0.5 + 0.2887)$ или, в конечном итоге, $(0.2113 ; 0.7887)$. Так как $0.7887 - 0.2113 = 0.5774$, заключаем, что в хорошем ГСЧ в этот интервал должно попадать около 57,7% из всех выпавших случайных чисел (см. рис. 1).

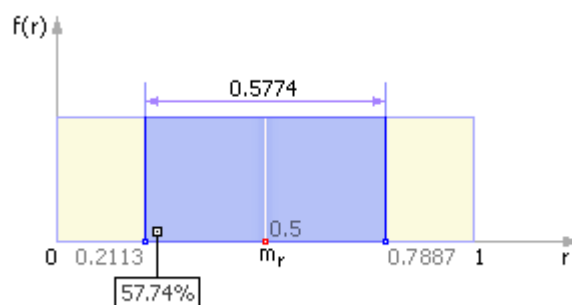


Рис. 1. Частотная диаграмма идеального ГСЧ в случае проверки его на частотный тест

Также необходимо учитывать, что количество чисел, попавших в интервал (0; 0.5), должно быть примерно равно количеству чисел, попавших в интервал (0.5; 1).

3. Задание. Согласно варианту задания необходимо составить и отладить программу (подпрограмму) генерирования случайных чисел с равновероятным распределением на интервале [0; 1), используя формулу (6.2). Провести статистическое исследование генератора при различных значениях выборки: малых $n < 25$, средних $n \approx 150$, больших $n > 500$.

Вариант задания выбирается из табл.6.1, в которой указаны тип генератора случайных чисел, начальные условия.

3.1. Содержание отчета. Отчет должен содержать:

- Описание метода генерирования псевдослучайных чисел;
- Программу (подпрограмму) датчика псевдослучайных чисел;
- Вывод 20 случайных чисел;
- Результаты статистической обработки при различных значениях выборки;
- Выводы.

3.2 Варианты заданий.

Таблица 1

Вариант	Тип генератора	Начальные данные
1	Мультипликативный конгруэнтный метод. Формула (6.1).	$k=31; a=16807$
2	Линейный конгруэнтный метод. Формула (6.3).	$a=16070093;$ $b=453816693; k=31$
3	Квадратичный конгруэнтный метод. Формула (6.4).	$a=6; b=7; c=3; m=4096$

4	Кубический конгруэнтный метод. Формула (6.5).	$a=53668; b=400144;$ $c=12211; k=15$
5	Генератор Фибоначчи. Формула (6.6).	$\xi_0 = 4091; \xi_1 = 1133;$ $k=14$
6	BBS – генератор. Формула (6.7).	$p = 11; q = 19$
7	Системный генератор MS Fortran. Формула (6.8).	-
8	Тригонометрический метод. Формула (6.9).	-
9	Тригонометрический метод со счетчиком. Формула (6.10).	-
10	Мультипликативный конгруэнтный метод. Формула (6.1).	$k=15; a=16807$
11	Линейный конгруэнтный метод. Формула (6.3).	$a=165; b=3463; k=14$
12	Квадратичный конгруэнтный метод. Формула (6.4).	$a=8; b=9; c=3; m=4096$
13	Кубический конгруэнтный метод. Формула (6.5).	$a=52774; b=40692;$ $c=3791; k=31$
14	Генератор Фибоначчи. Формула (6.6).	$\xi_0 = 3971; \xi_1 = 1013;$ $k=14$
15	BBS – генератор. Формула (6.7).	$p = 13; q = 21$

16	Системный генератор MS Fortran. Формула (6.8).	-
17	Тригонометрический метод. Формула (6.9).	-
18	Тригонометрический метод со счетчиком. Формула (6.10).	-
19		
20		

Лабораторная работа 3

Имитационное моделирование случайных событий

1. Моделирование случайных событий

1.1. Теоретические сведения

В процессе моделирования часто требуются имитировать случайные события с заранее известными вероятностями. Пусть имеется событие A , вероятность наступления которого равна P_A . Требуется выработать правило, при многократном использовании которого частота появления события A стремилась бы к его вероятности. Выберем с помощью датчика случайных чисел, равномерно распределенных в интервале $[0; 1)$ некоторое число x и определим вероятность того, что $x < P_A$. Для случайной величины x с равномерным распределением на интервале $[0; 1)$ справедлива следующая зависимость:

$$P(x < P_A) = \int_0^{P_A} f(y) dy = P_A.$$

Таким образом, вероятность попадания случайной величины x в интервале $(0; P_A)$ равна величине P_A . Поэтому если число x , полученное с помощью датчика равномерно распределенных случайных чисел, попало в этот интервал, то следует считать, что событие A произошло. Противоположное событие (не A) произойдет с вероятностью $(1 - P_A)$, т.е. в том случае, если $x \geq P_A$.

Процедура моделирования простого события в имитационной модели описывается алгоритмом, схема которого показана на рис.1.

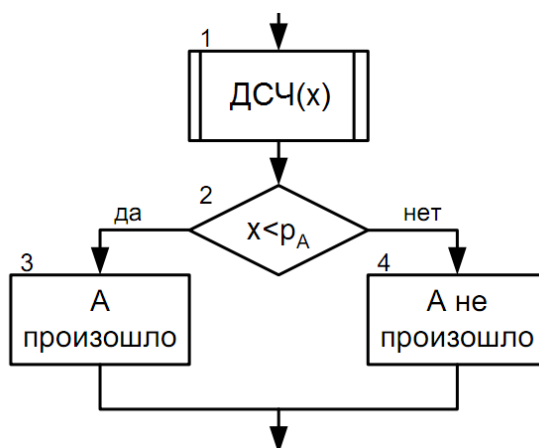


Рис.1

На данном рисунке в блоке 1 осуществляется к датчику случайных чисел, генерирующему случайную величину x . Блок 2 проверяет условие $x < p_A$. Если оно выполняется, считается, что произошло событие A . В противном случае считается, что произошло противоположное событие (не A).

1.2. Задание. Дана вероятность события p_A (табл.7.1). Требуется:

- Сгенерировать N случайных событий;
- Подсчитать количество успешных событий;
- Рассчитать среднестатистический разброс значений $p_{cm} = \sqrt{\frac{p_A(p_A - 1)}{N}}$;
- Рассчитать *нижнее* значение для вероятности $p_n = p_A - p_{cm}$;
- Рассчитать *верхнее* значение для вероятности $p_n = p_A + p_{cm}$.

Таблица 1

Вариант	p_A
1	0,40
2	0,50
3	0,60

4	0,70
5	0,45
6	0,55
7	0,65
8	0,75
9	0,42
10	0,52
11	0,62
12	0,72
13	0,46
14	0,56
15	0,66
16	0,76

2. Моделирование надежности сложных нерезервированных систем

2.1. Теоретические сведения

Дана система, состоящая из m элементов, каждый из которых имеет вероятность безотказной работы $p_i \leq p_i \leq 1$. Создать компьютерную модель надежности этой системы.

Схематически эта модель представляет собой последовательное соединение элементов системы (рис.2).

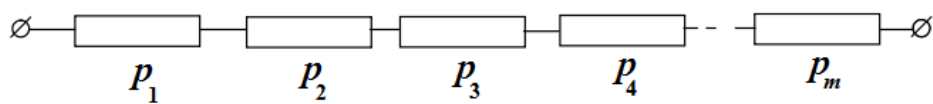


Рис.2

Для последовательно соединенных элементов вероятность безотказной работы равна:

$$P_{сис} = p_1 \cdot p_2 \cdot \boxed{?} \cdot p_m.$$

Блок схема алгоритма

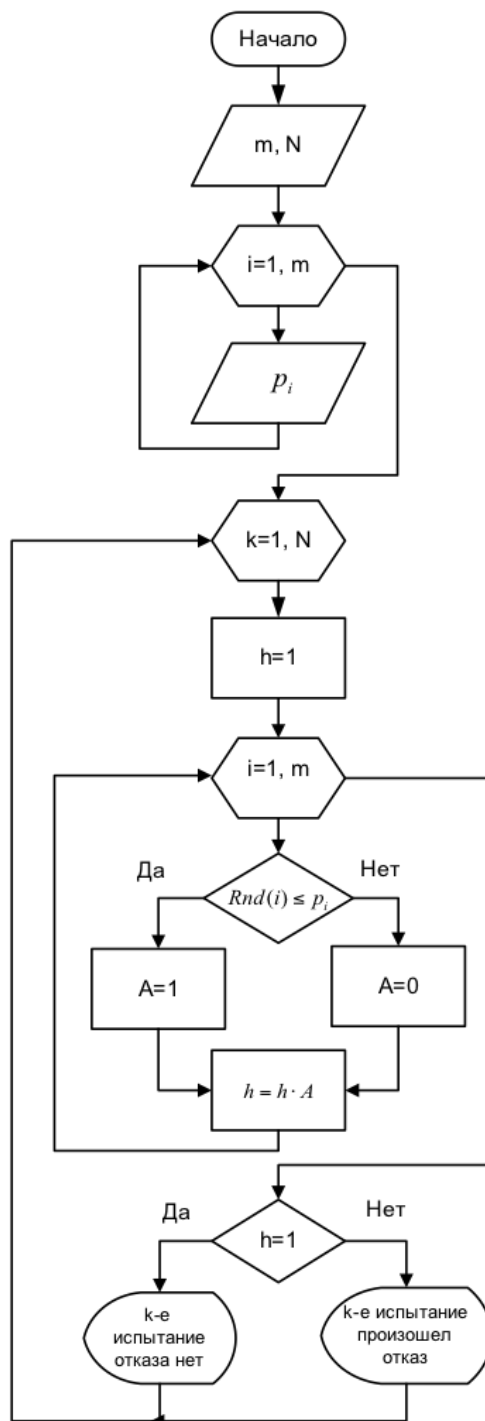
Введем обозначения:

N – количество испытаний;

k – номер испытания;

i – номер элемента;

A_i - событие безотказной работы i -го элемента: $A_i = 1$ -отказа нет; $A_i = 0$ - произошел отказ.



2.2. Задание. Согласно варианту задания (табл.2) необходимо составить и отладить программу моделирования надежности сложных нерезервированных систем.

Таблица 2

Вариант	N	m	p_n
---------	-----	-----	-------

1	40	5	0,40
2	50	6	0,50
3	60	5	0,60
4	30	6	0,80
5	60	5	0,70
6	50	6	0,45
7	40	5	0,55
8	50	6	0,65
9	40	5	0,42
10	50	6	0,52
11	60	5	0,62
12	30	6	0,72
13	60	5	0,46
14	50	6	0,56
15	40	5	0,66
16	50	6	0,76

3. Моделирование надежности сложных систем (смешанное соединение элементов)

3.1. Теоретические сведения

Дана системе, состоящая из t элементов, каждый из которых имеет вероятность безотказной работы $p_i \leq p_i \leq 1$. Создать компьютерную модель надежности этой системы.

Схематически эта модель представляет собой последовательное соединение элементов системы (рис.3).

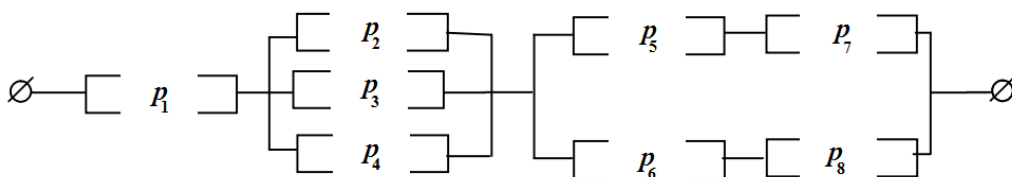


Рис.3

Для смешанного соединения элементов системы вероятность безотказной работы равна $p_{сис} = p_1 \cdot [1 - (1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4)] \cdot [1 - (1 - p_5 p_7)(1 - p_6 p_8)]$.

3.2. Задание. Согласно варианту задания (табл.7.2) необходимо составить и отладить программу моделирования надежности сложных систем для смешанного соединения элементов. При выполнении работы ввести обозначения, аналогичные п.2.1.

4. Метод Монте-Карло (метода статистических испытаний)

Цель работы. Получение теоретических и практических навыков использования метода Монте-Карло для решения математических задач.

4.1. Теоретические сведения

Монте-Карло – всемирный центр игорного бизнеса – дал название большой группе методов, которые позволяют приближенно решать сложные задачи моделирования с помощью случайных чисел.

подавляющее число расчетов по методу Монте-Карло осуществляется с использованием псевдо-случайных чисел. От последовательности случайных чисел ξ_i , равномерно распределенных в интервале

$[0; 1]$ (см. п.6), можно перейти к последовательности случайных чисел x_i с произвольно заданным законом распределения, используя табл.2

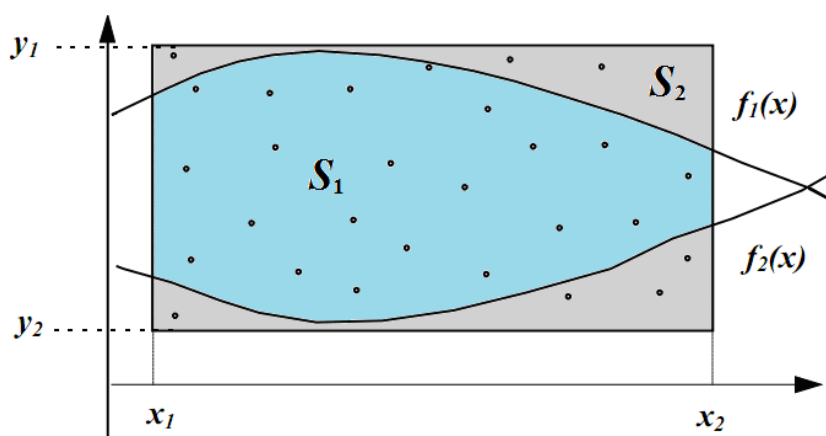
Таблица 2

Закон распределения случайной величины	Плотность распределения	Формула для моделирования случайной величины
Экспоненциальный	$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$	$x_i = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \xi_i$
Вейбула	$f(x) = \frac{a}{b} \left(\frac{x}{a}\right)^{a-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right]$	$x_i = -b \cdot (\ln \xi_i)^{1/a}$
Гамма-распределение (η – целые числа)	$f(x) = \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} \cdot e^{-\lambda \cdot x} x^{\eta-1}$	$x_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{\eta} \ln(1 - \xi_j)$
Нормальное	$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$	$x_i = \bar{x} + \sigma \left(\sum_{i=1}^{\eta} \xi_i - 6 \right)$

а) Вычисление площади фигур

Идея метода заключается в следующем. Сначала вся фигура S_1 , площадь которой надо определить, заключается внутрь другой фигуры S_2 , для которой площадь легко вычисляется. Чаще всего этой фигурой-контейнером является прямоугольник, хотя можно использовать окружность и другие фигуры.

Далее с помощью датчика случайных чисел с **равномерным распределением** генерируются случайные координаты (x, y) точки **внутри прямоугольника** и определяют, попала точка на фигуру или нет. Такие испытания проводятся N раз.



Пусть из N точек, полученным таким образом, M попали на фигуру. Тогда, считая, что распределение точек в прямоугольнике **равномерное**, можно записать пропорцию

$$\frac{S_1}{S_2} \approx \frac{M}{N}.$$

Из этой формулы найдем площадь искомой фигуры

$$S_1 \approx \frac{M}{N} S_2 = \frac{M}{N} (x_2 - x_1)(y_2 - y_1),$$

где произведение двух множителей в скобках представляет собой площадь прямоугольного контейнера.

Метод Монте-Карло чрезвычайно эффективен, прост, но необходим «хороший» генератор случайных чисел. Вторая проблема применения метода заключается в определении объема выборки, то есть количества точек N , необходимых для обеспечения решения с заданной точностью. Эксперименты показывают: чтобы увеличить точность в 10 раз, объем выборки нужно увеличить в 100 раз; то есть точность примерно пропорциональна корню квадратному из объема выборки:

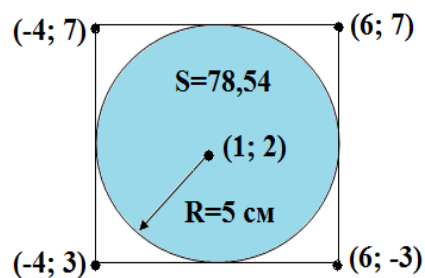
$$\text{точность} \approx \sqrt{\text{объем выборки}}.$$

Пример 1. Используя метод Монте-Карло, вычислить площадь круга радиуса $R=5\text{см.}$ с центром в точке $(1; 2)$.

Решение. Уравнение соответствующей окружности имеет вид

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25.$$

Для решения задачи методом Монте-Карло впишем круг в квадрат. Его вершины будут иметь координаты $(-4;-3); (6;-3); (-4;7); (6;7)$. Любая точка внутри квадрата или на его границе должна удовлетворять неравенствам $-4 < x < 6$ и $-3 < y < 7$.



Проведя испытания и получив множество случайных точек, подсчитываем число точек, попавших внутрь круга или на окружность. Если выборка состоит из n наблюдений и M из N точек попали внутрь круга или на окружность, то оценку площади круга можно получить из соотношения:

$$S_{\text{кр}} = S_{\text{кв}} M/N = 100 M/N.$$

В табл.7.3 приведены оценки $S_{\text{кр}}$, полученные для разных значений N . При этом для каждого N выполнялось 5 прогонов ($S_{\text{кр}} = 78,54$ кв.см).

Таблица 3

Оценка площади круга

Номер прогона	Оценка площади круга $S_{\text{кр}}$				
	Число испытаний n				
	100	200	1 000	5 000	10 000
1	78	79,5	77	79,5	77
2	70	77	78	81,88	78,8
3	81	77,3	80,2	79,5	79,8
4	70	79,13	81,29	78,22	78,6
5	79	77,72	77,76	79	78,26
Среднее	75,6	78,63	78,77	78,23	78,88
Дисперсия	27,3	0,3	0,0789	0,0785	0,01

Выводы:

1. С ростом числа генерируемых точек (т. е. продолжительности прогона модели) оценки площади круга приближаются к точному значению (78,54 кв.см.). Это условие обычно достигается после повторения эксперимента достаточное количество раз. Наблюдаемое явление типично для результатов любой имитационной модели. Обычно в большинстве имитационных моделей нас интересуют результаты, полученные в стационарных условиях.

2. Прогонки модели (отличающихся друг от друга только случайных чисел) дают различные оценки при одном и том же значении n . Каждый прогон можно рассматривать как наблюдение в эксперименте, связанном с моделированием.

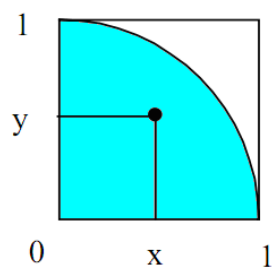
3. Влияние переходных условий уменьшается, если усреднить результаты серий. Существует предел, за которым увеличение продолжительности прогона модели уже не дает существенного повышения точности результата, измеряемого дисперсией. Это замечание представляется чрезвычайно важным, поскольку затраты на эксплуатацию имитационной модели прямо пропорциональны продолжительности прогонов. Поэтому желательно найти компромисс между большой точностью (т. е. малой дисперсией) и небольшими затратами на процедуру получения результатов.

Замечание. Если $\{r_n\}$ - последовательность случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$, то для определения последовательности случайных чисел $\{x_n\}$ равномерно распределенных на отрезке $[a, b]$ необходимо использовать формулу $x_n = a + (b - a)r_n$.

Пример 2. Используя метод Монте-Карло, вычислить приближенно число π .

Решение. Известно, что площадь круга равна $S = \pi R^2$, где R – радиус круга. Тогда $\pi = S / R^2$, то есть, зная радиус окружности и определив численно ее площадь, можно приближенно рассчитать значение π .

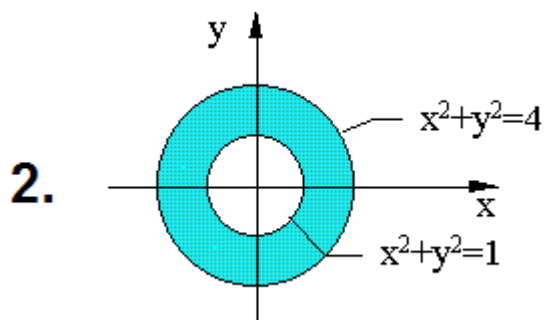
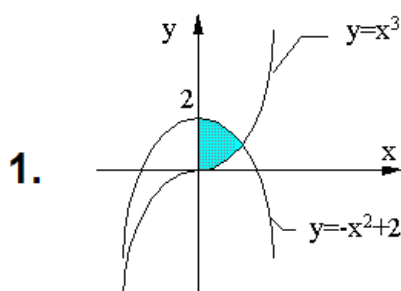
Выберем окружность единичного радиуса с центром в начале координат и рассмотрим ее четверть.

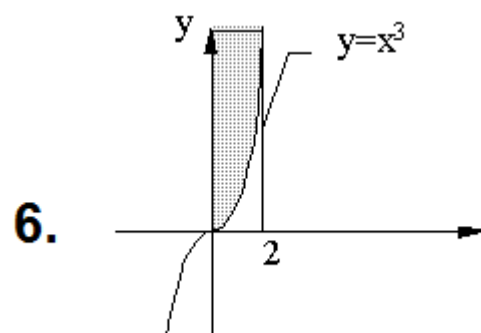
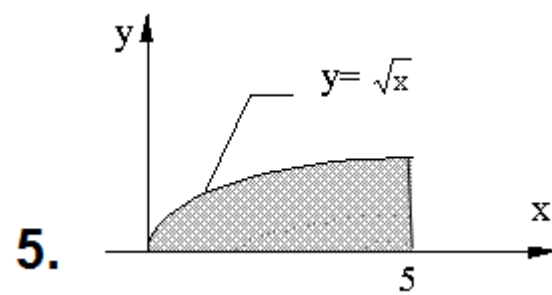
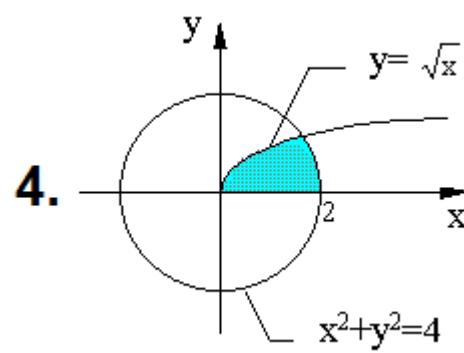
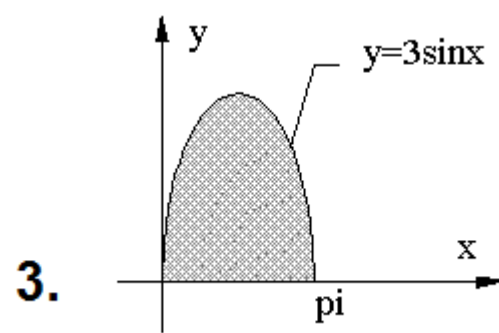


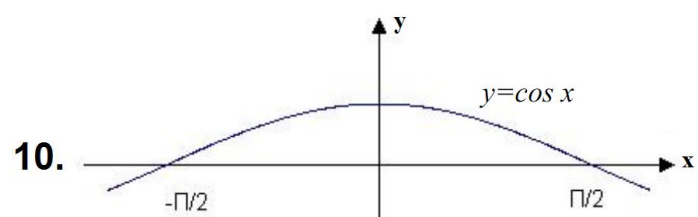
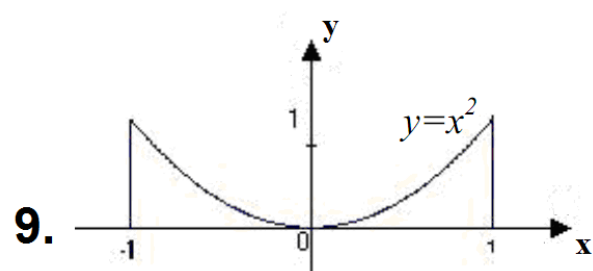
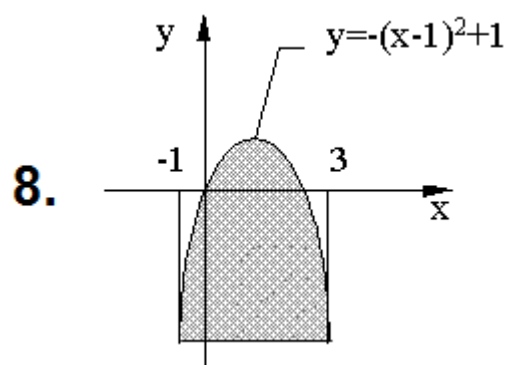
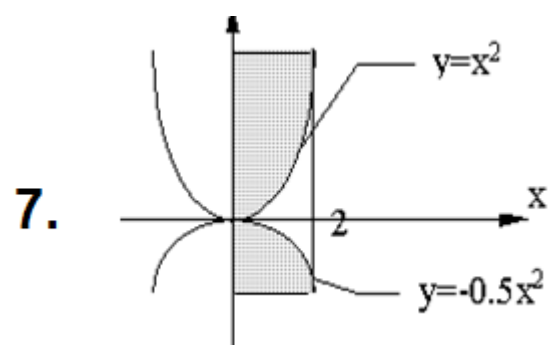
Для использования метода Монте-Карло необходимо, используя датчик случайных чисел, равномерно заполнить точками (пусть их общее количество будет N) квадрат со стороной 1 и подсчитать, сколько из них окажется внутри окружности (это число обозначим через M). Тогда площадь всей окружности равна $4M/N$, а так как ее радиус равен 1, это же число примерно равно π .

4.2. Варианты заданий.

Согласно варианту задания найти площадь заштрихованной фигуры методом Монте-Карло.







11. Определить методом Монте-Карло площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(-1,0)$; $(0,1)$; $(1,0)$.

12. Определить методом Монте-Карло площадь фигуры, ограниченной кривой

$$y = \sin(x), \quad x \in [0; \pi]$$

13. Определить методом Монте-Карло площадь фигуры, ограниченной кривой

$$y = \cos(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Примерные темы рефератов:

1. Элементы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания. Примеры.
2. Классическое определение вероятности, случайные события, элементарные исходы, свойства классической вероятности. Примеры.
3. Совместные и несовместные события. Теорема сложения вероятностей (с доказательством). Примеры.
4. Зависимые и независимые события. Теорема умножения вероятностей (с доказательством). Примеры.
5. Условная вероятность. Теорема о формуле полной вероятности, формулы Байеса.
6. Понятие распределения вероятностей случайных событий. Схема независимых испытаний. Формула Бернулли. Примеры.
7. Случайные величины: определение, функция распределения случайной величины и ее свойства, независимые случайные величины. Примеры.
8. Определения числовых характеристик дискретных и непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, мода, медиана, центральные и начальные моменты. Примеры.
9. Свойства математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины (с доказательствами).
10. Биномиальное распределение, вычисление математического ожидания и дисперсии биномиально распределенной случайной величины.
11. Геометрическое распределение. Распределение Пуассона. Вычисление основных числовых характеристик этих распределений.
12. Непрерывные случайные величины. Вычисление математического ожидания и дисперсии для равномерно и нормально распределенных случайных величин.

13. Функция распределения непрерывной случайной величины и ее свойства. Функция плотности распределения.
14. Понятие о законе больших чисел. Неравенство Чебышева (с доказательством). Закон больших чисел в схеме Бернулли.
15. Теорема Чебышева (с доказательством). Центральная предельная теорема Ляпунова (без доказательства). Примеры.
16. Основные понятия математической статистики: генеральная совокупность, выборка, выборочные характеристики. Методы отбора.
17. Статистические оценки и их свойства: несмещенность, эффективность и состоятельность. Примеры.
18. Представление статистических данных. Полигон частот. Гистограмма. Примеры.
19. Доказательство несмещенности и состоятельности выборочного среднего. Исправленная выборочная дисперсия.
20. Точечные статистические оценки параметров распределения.
21. Доверительные интервалы, надежность. Построение доверительных интервалов для математического ожидания нормального распределения (с известной дисперсией).
22. Доверительные интервалы для дисперсии нормально распределенной случайной величины.
23. Интервальная и точечная оценки вероятности биномиального распределения по относительной частоте. Пример.
24. Основы регрессионного анализа.
25. Метод наименьших квадратов.
26. Статистические гипотезы, постановка задачи построения критерия проверки статистической гипотезы.
27. Уровень значимости и мощность критерия. Параметрический критерий. Теорема Неймана-Пирсона (без доказательства).
28. Функция правдоподобия для дискретного и непрерывного случаев.
29. Мода, медиана. Начальные и центральные моменты. Примеры.
30. Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия.

Примерные темы эссе:

1. Предмет и основные определения теории вероятностей.
2. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности, вытекающие из классического определения. Примеры.
3. Статистическое определение вероятности, его особенности и связь с классическим определением.
4. Полная группа несовместных событий, противоположные события, свойства их вероятностей.
5. Зависимые и независимые события. Условные и безусловные вероятности.
6. Теоремы умножения вероятностей.
7. Теоремы сложения вероятностей.
8. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
9. Комбинаторика: размещения, сочетания, перестановки. Размещения, сочетания и перестановки с повторениями. Примеры.
10. Случайные величины и случайные события. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения случайной величины и способы его задания.

- 11 Числовые характеристики случайных величин. Начальные и центральные моменты. Асимметрия и эксцесс.
- 12 Математическое ожидание случайной величины. Его смысл и примеры. Свойства математического ожидания.
13. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Их смысл и примеры вычисления. Формулы для вычисления дисперсии. Свойства дисперсии.
14. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение частоты и частости.
15. Формула Бернулли. Биномиальное распределение. Наивероятнейшее число появлений события.
16. Формула Пуассона. Закон распределения вероятностей редких событий.
17. Гипергеометрическое распределение.
18. Равномерное распределение.
19. Непрерывные случайные величины. Дифференциальная и интегральная функции их распределения, их смысл и связь между ними.
20. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет точно заданное значение.

4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации.

Примерный перечень вопросов для подготовки к зачету

1. Выборочное среднее. Выборочная дисперсия
2. Наследство по закону
3. Законы распределения компонент случайного вектора
4. Применение теории вероятности в жизни
5. Законы Кеплера
6. Применение теории вероятностей в банковском деле
7. Что такое относительная частота случайного события.
8. Что такое сумма событий.
9. Что такое произведение событий.
10. Что такое разность событий.
11. Что такое противоположное к A событие.
12. Как найти вероятность противоположного события к A .
13. Чему равна вероятность события достоверного.
14. Чему равна вероятность события невозможного.
15. Классическое определение вероятности. Условия его применимости.
16. Комбинаторное правило суммы.
17. Комбинаторное правило произведения.
18. Определение числа перестановок без повторений из n элементов. Формула для его нахождения.
19. Определение числа размещений без повторений из n элементов по k элементов. Формула для его нахождения.
20. Определение числа сочетаний без повторений из n элементов по k элементов. Формула для его нахождения.
21. Теорема сложения вероятностей двух совместных событий.
22. Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий.

23. Теорема сложения вероятностей нескольких несовместных событий.
24. Определение условной вероятности.
25. Определение вероятности независимых событий.
26. Формула полной вероятности. Условия применимости. Свойства группы гипотез.
27. Формула Байеса. Условия применимости.
28. Формула для нахождения вероятности происхождения хотя бы одного из n независимых, но совместных событий $A_1, A_2, A_3 \dots$.
29. Схема Бернулли: основные составляющие условия.
30. Формула Бернулли.
31. Формула Пуассона. Условия применения.
32. Формула Муавра-Лапласа. Условия применения.
33. Интегральная теорема Лапласа. Условия применения.
34. Дискретные случайные величины. Распределение дискретной случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия, их свойства.
35. Непрерывные случайные величины. Функция и плотность распределения вероятностей. Математическое ожидание и дисперсия, их свойства.
36. Выборочный метод. Генеральная и выборочная совокупности.
37. Типы выборок. Полигон и гистограмма.
38. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения.
39. Статистические оценки. Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки. Выборочная средняя и выборочная дисперсия.
40. Точечная и интервальная оценки. Доверительный интервал. Метод моментов для точечной оценки параметров распределения.
41. Проверка статистических гипотез. Понятие статистической гипотезы. Ошибки первого и второго рода.
42. Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности.
43. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей.
44. Задачи математической статистики.
45. Основные понятия выборочного метода.
46. Виды отбора данных в выборку.
47. Статистическое распределение выборки.
48. Эмпирическая функция распределения.
49. Полигон и гистограмма.
50. Статистические оценки параметров распределения. Свойства оценок.
51. Средние значения.
52. Дисперсия генеральная и выборочная. Групповая, внутригрупповая и межгрупповая дисперсии.
53. Оценка генеральной дисперсии по исправленной выборочной дисперсии.
54. Метод моментов построения точечных оценок неизвестных параметров распределения.
55. Метод максимального правдоподобия построения точечных оценок неизвестных параметров распределения.
56. Интервальные оценки параметров распределения. Точность и надежность оценок.
57. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном с.к.о.

58. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном с.к.о.
59. Доверительные интервалы для оценки дисперсии нормального распределения.
60. Доверительные интервалы для доли признака генеральной совокупности.

Уровень требований и критерии оценок на зачете

Оценка «зачтено» выставляется, если компетенции ОПК-3 полностью освоена, обучающийся владеет материалом, отвечает на основные и дополнительные вопросы.

Оценка «не зачтено» выставляется, если компетенции ОПК-3 не освоена, обучающийся не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

5 Перечень основной и дополнительной учебной литературы для освоения дисциплины

5.1 Основная литература

1. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Т.А. Гулай, А.Ф. Долгополова, Д.Б. Литвин, С.В. Мелешко ; Ставропольский государственный аграрный университет. - Издание второе дополненное. - Ставрополь : Агрус, 2013. - 257 с. : схем., табл. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=277492&sr=1

2. Попов А.М., Сотников В.Н. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА [Электронный ресурс]: Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. 2-е изд., испр. и доп. / М.: Юрайт, 2016.- 434 с. - URL: <https://biblio-online.ru/>

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах «Лань», «Юрайт» и др

5.2 Дополнительная литература

1. Логинов, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: курс лекций / В.А. Логинов ; Министерство транспорта Российской Федерации, Московская государственная академия водного транспорта. - Москва : Альтаир : МГАВТ, 2013. - 189 с. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=429681&sr=1
2. Ивашев-Мусатов О.С. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА [Электронный ресурс]: Учебник и практикум для академического бакалавриата . 3-е изд., испр. и доп. / М.: Юрайт, 2016.- 224 с. - URL: <https://biblio-online.ru/>
3. Сидняев Н.И. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА [Электронный ресурс]: Учебник для бакалавров / М.: Юрайт, 2015.- 219 с. - URL: <https://biblio-online.ru/>

5.3 Периодические издания

Периодические издания – не предусмотрены.

6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (далее - сеть «Интернет»), необходимых для освоения дисциплины.

1. ЭБС «Университетская библиотека ONLINE». – URL: www.biblioclub.ru
2. ЭБС издательства «Лань». – URL: <https://e.lanbook.com>
3. ЭБС «Юрайт». – URL: <http://www.biblio-online.ru/>
4. Электронный каталог Научной библиотеки КубГУ. – URL: <http://212.192.134.46/MegaPro/Catalog/Home/Index>
5. Аналитическая и цитатная база «Web of Science (WoS)». – URL: <http://apps.webofknowledge.com>.
6. Электронная библиотека «Издательского дома «Гребенников» - URL: www.grebennikon.ru
7. Научная электронная библиотека (НЭБ) «eLibrary.ru». - URL: <http://www.elibrary.ru>
8. Полнотекстовые архивы ведущих западных научных журналов на Российской платформе научных журналов НЭИКОН. - URL: <http://archive.neicon.ru>
9. Базы данных компании «Ист Вью». - URL: <http://dlib.eastview.com>
10. Университетская информационная система РОССИЯ (УИС Россия) - URL: <http://uisrussia.msu.ru>
11. «Электронная библиотека диссертаций» Российской Государственной Библиотеки (РГБ). - URL: <https://dvs.rsl.ru/>
12. Электронная коллекция Оксфордского Российского Фонда. - URL: <http://lib.myilibrary.com>
13. «Лекториум ТВ». - URL: <http://www.lektorium.tv/>
14. Национальная электронная библиотека «НЭБ». - URL: <http://нэб.пф/>
15. КиберЛенинка: научная электронная библиотека. – URL: <http://cyberleninka.ru/>
16. Единое окно доступа к образовательным ресурсам : федеральная ИС свободного доступа. – URL: <http://window.edu.ru>.
17. Официальный интернет-портал правовой информации. Государственная система правовой информации. – URL: <http://publication.pravo.gov.ru>
18. Справочно-правовая система «Консультант Плюс» - <http://www.consultant.ru>

7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной систематизированный материал. Основной целью лекции является обеспечение теоретической основы обучения, развитие интереса к учебной деятельности и конкретной учебной дисциплине, формирование у обучающихся ориентиров для самостоятельной работы.

Подготовка к лабораторным занятиям.

Лабораторные занятия ориентированы на работу с учебной и периодической литературой, знакомство с содержанием, принципами и инструментами осуществления и решением основных вопросов, приобретение навыков для самостоятельных оценок результатов оценки основных явлений дисциплины. К лабораторному занятию обучающийся должен ответить на основные контрольные вопросы изучаемой темы, подготовить эссе, решить тесты. Кроме того, следует изучить тему по конспекту лекций и учебнику или учебным пособиям из списка литературы.

Устный опрос. Важнейшие требования к устным ответам студентов – самостоятельность в подборе фактического материала и аналитическом отношении к нему, умение рассматривать примеры и факты во взаимосвязи и взаимообусловленности, отбирать наиболее существенные из них. Ответ обучающегося должно соответствовать требованиям логики: четкое вычленение излагаемой проблемы, ее точная формулировка, неукоснительная последовательность аргументации именно данной проблемы, без неоправданных отступлений от нее в процессе обоснования, безусловная доказательность, непротиворечивость и полнота аргументации, правильное и содержательное использование понятий и терминов.

Дискуссия. Для проведения дискуссии все студенты, присутствующие на практическом занятии, разбиваются на подгруппы, которые обсуждают те или иные вопросы, входящие в тему занятия. Обсуждение может организовываться двояко: либо все подгруппы анализируют один и тот же вопрос, либо какая-то крупная тема разбивается на отдельные задания. Традиционные материальные результаты обсуждения таковы: составление списка интересных мыслей, выступление одного или двух членов подгрупп с докладами, составление методических разработок или инструкций, составление плана действий.

Написание эссе. Эссе – это небольшое по объему и свободное по композиции сочинение на заданную тему, отражающее подчеркнуто индивидуальную позицию автора. Рекомендуемый объем эссе – 2-3 печатные страницы.

Написание реферата – это вид самостоятельной работы студента, содержащий информацию, дополняющую и развивающую основную тему, изучаемую на аудиторных занятиях. Ведущее место занимают темы, представляющие профессиональный интерес, несущие элемент новизны. Реферативные материалы должны представлять письменную модель первичного документа – научной работы, монографии, статьи. Реферат может включать обзор нескольких источников и служить основой для доклада на определенную тему на семинарах,

Самостоятельная работа студентов по дисциплине включает следующие виды работ:

- работа с лекционным материалом, предусматривающая проработку конспекта лекций и учебной литературы;
- выполнение домашнего задания, предусматривающих решение ситуационных задач, проверяемых в учебной группе на практических занятиях;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;
- подготовка к лабораторным занятиям;
- написание реферата и эссе по заданной проблеме.

Зачет. Обучающиеся обязаны сдать зачет в соответствии с расписанием и учебным планом. Зачет является формой контроля усвоения обучающимся учебной программы по дисциплине или ее части, выполнения реферативных работ, эссе, устного опроса.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между

преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

8.1 Перечень информационных технологий.

- Предоставление доступа всем участникам образовательного процесса к корпоративной сети университета и глобальной сети Интернет.
- Предоставление доступа участникам образовательного процесса через сеть Интернет к справочно-поисковым информационным системам.
- Использование специализированного (Офисное ПО, графические, видео- и аудиоредакторы и пр.) программного обеспечения для подготовки тестовых, методических и учебных материалов.
- Использование офисного и мультимедийного программного обеспечения при проведении занятий и для самостоятельной подготовки обучающихся.

8.2 Перечень необходимого программного обеспечения.

- Libre Office 5.0.6 (свободный офисный пакет);
- Gimp 2.6.16 (растровый графический редактор);
- Inkscape 0.91 (векторный графический редактор);
- Adobe Acrobat Reader, WinDjView, XnView (просмотр документов и рисунков);
- Mozilla FireFox, Adobe Flash Player, JRE. (Internet);
- 7-zip 9.15 (архиватор);
- Nod32 (антивирус);
- Notepad++ (текстовый редактор с подсветкой синтаксиса).

8.3 Перечень информационных справочных систем:

1. Официальный интернет-портал правовой информации. Государственная система правовой информации. – URL: <http://publication.pravo.gov.ru>.
2. Официальная Россия. Сервер органов государственной власти Российской Федерации. – URL: <http://www.gov.ru>.
3. Справочно-правовая система «Консультант Плюс». – URL: <http://www.consultant.ru>.
4. Научная электронная библиотека (НЭБ) «eLibrary.ru». - URL: <http://www.elibrary.ru>

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины и оснащенность
1.	Лекционные занятия	Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа
2.	Лабораторные занятия	Учебные аудитории для проведения занятий лабораторного типа
3.	Групповые (индивидуальные) консультации	Учебные аудитории для групповых и индивидуальных консультаций
4.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Учебные аудитории для текущего контроля и промежуточной аттестации
5.	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети

		«Интернет» и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.
--	--	--