

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Кубанский государственный университет»  
(ФГБОУ ВО «КубГУ»)

Факультет компьютерных технологий и прикладной математики  
Кафедра прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ:



Проректор по учебной работе,  
кафедры образования – первый  
проректор

Иванов А.Г.

» *май* 2015г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ  
**Б1.Б.16 «ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ  
И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ»**

Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и  
информатика  
Профиль Математическое моделирование и вычислительная  
математика. Математическое моделирование

Форма обучения Очная

Краснодар 2015

Рабочая программа дисциплины «Вариационное исчисление и оптимальное управление» составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки Прикладная математика и информатика, утверждённым приказом Министерства образования и науки Российской Федерации № 207 от 12 марта 2015 г.

Программу составил: Лебедев К.А. – профессор кафедры прикладной математики



Рабочая программа утверждена на заседании кафедры прикладной математики протокол № 10 от «07» апреля 2015 г.

Заведующий кафедрой прикладной математики д.ф.-м.н., профессор М.Х. Уренов



Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры математического моделирования протокол № 8 от «10» апреля 2015 г.

Заведующий кафедрой математического моделирования Бабешко В.А



Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета компьютерных технологий и прикладной математики от 21 апреля 2015г., протокол № 5.

Председатель УМК факультета компьютерных технологий и прикладной математики протокол №5 от «29» апреля 2015 г. к.ф.-м.н., доцент К.В. Малыхин



Эксперты:

Шапошникова Татьяна Леонидовна.

Доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор. Почетный работник высшего профессионального образования РФ. Директор института фундаментальных наук (ИФН) ФГБОУ ВО «КубГТУ».

Павлова Алла Владимировна

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования ФГБОУ ВО «КубГТУ»

## **1. Цели и задачи учебной дисциплины**

**1.1 Цели** изучения дисциплины определены государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования и соотнесены с общими целями ООП ВПО по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика», в рамках которой преподаётся дисциплина.

**Целью** освоения учебной дисциплины «Вариационное исчисление и оптимальное управление» является развитие профессиональных компетентностей приобретения практических навыков использования методов прикладной математики и компьютерных технологий.

### **1.2 Задачи дисциплины:**

–актуализация и развитие научных знаний в области теории вариационного исчисления и оптимального управления;

–научить выбирать подходящие качественные, количественные и численные методы для решения экстремальных задач;

–строить математические модели классического и современного типа;

–научить применять численные методы для решения задач с использованием современных ЭВМ и прикладных программ и различных языков программирования;

–овладение моделями оптимального управления в различных областях науки, техники, экономики.

### **1.3 Место учебной дисциплины в структуре ООП ВПО**

Дисциплина «Вариационное исчисление и оптимальное управление» относится к базовой части профессионального цикла (**Б1.Б.16**).

Данная дисциплина (Вариационное исчисление и оптимальное управление) тесно связана с дисциплинами базового цикла (**Б.1**): математический анализ, физика, уравнения математической физики, функциональный анализ и профессионального цикла (**Б1.Б.16**): дифференциальные уравнения, методы оптимизации.

Она направлена на формирование знаний и умений обучающихся проводить анализ и синтез оптимальных процессов в реальных условиях практической деятельности.

Обеспечивает способность у обучающихся к теоретико-методологическому анализу вариационных и оптимизационных проблем; формирование компетенций в разработке и использовании оптимизационных технологии в экономике. В совокупности изучение этой дисциплины готовит обучаемых как к различным видам практической деятельности, так и к научно-теоретической, исследовательской деятельности.

Изучение данной дисциплины базируется на знаниях, полученных в рамках дисциплин математического и экономического, естественнонаучного цикла ООП бакалавриата.

## 1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения курса «

п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
	<b>ПК-1</b>	Способностью собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	как обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	способностью собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям

## 2. Структура и содержание дисциплины

### 2.1 Распределение трудоемкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 4 зач.ед. (108 часов), их распределение по видам работ представлено в таблице

Вид работы	Трудоёмкость, часов
	7 семестр
<b>Общая трудоёмкость</b>	<b>144</b>
<b>Аудиторная работа:</b>	
<i>Лекции (Л)</i>	30
<i>Практические занятия (ПЗ)</i>	42
<i>Лабораторные работы (ЛР)</i>	
<b>Самостоятельная работа:</b>	
Курсовой проект (КП), курсовая работа (КР)	
Расчетно-графическое задание (РГЗ)	
Реферат (Р)	
Эссе (Э)	
Контролируемая самостоятельная работа (КРС)	4
Самостоятельное изучение разделов	32
Контрольная работа (К)	
Самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к лабораторным и практическим занятиям, коллоквиумам и т.д.)	
Подготовка и сдача экзамена <sup>1</sup>	36

<sup>1</sup> При наличии экзамена по дисциплине

<b>Вид итогового контроля</b>	экзамен
-------------------------------	---------

## 2.2 Структура учебной дисциплины

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы дисциплины, изучаемые в 7 семестре

№ п/п	Наименование раздела, темы	Всего трудоемкость	Аудиторные занятия			Самостоятельная работа	Экз
			Всего	Лекции	Лабораторные		
	<b>МОДУЛЬ 1 Основные понятия вариационного исчисления.</b>						
1.	Основные понятия. Основная задача вариационного исчисления.		4	2	2	2	2
2.	Уравнение Эйлера и его применение к основным задачам ВИ		6	2	2	2	2
3.	Достаточное условия экстремума		4	2	2	2	2
	<b>МОДУЛЬ 2 Численные методы решения вариационных задач</b>						
4.	Численные методы решения вариационных задач.		2	2	4	2	2
5.	Обобщения основной задачи.		6	2	4	2	2
	<b>МОДУЛЬ 3 Приложения методов ВИ к решению естественнонаучных задач.</b>						
6.	Приложения методов ВИ к решению естественнонаучных задач.		6	2	4	2	2
	<b>Модуль 4 Оптимальное управление</b>						
7.	Задача автоматического регулирования		2	2	2	2	2
8.	Задача оптимального управления.		4	2	4	4	2
9.	Принцип максимума Понтрягина.		6	4	4	2	4
10.	Метод динамического программирования.		4	2	4		2
11.	Численные методы решения задач оптимального управления.		4	2	4	4	2
12.	Достаточные условия оптимальности и их применение к решению задач.		4	4	2	2	4
13.	Примеры задач оптимального управления из науки, техники и экономики.		2	2	4	4	2
	<b>Итого</b>	<b>140</b>		<b>30</b>	<b>42</b>	<b>32</b>	<b>36</b>

**Всего с КСР: 140+4=144**

## 2.3 Содержание разделов дисциплины:

раздела	Наименование раздела/модуля	Форма текущего контроля (по неделям семестра)
	2	4
	МОДУЛЬ 1. Основные понятия вариационного исчисления.	1. Подготовка рефератов, презентаций, выступлений. 2. Резюме, аналитический обзор по проблеме.
	МОДУЛЬ 2. Численные способы решения вариационных задач.	1. Опрос по результатам индивидуального задания 2. Проверка выполнения практических работ № 1, 2, 3, 4
	МОДУЛЬ 3. Приложения методов ВИ к решению естественнонаучных задач.	1. Подготовка рефератов, презентаций, выступлений. 2. Промежуточное тестирование. 3. Проверка выполнения практических работ № 4, 5
	МОДУЛЬ 4. Оптимальное управление	1. Подготовка рефератов, презентаций, выступлений. 2. Резюме, аналитический обзор по проблеме. 3. Опрос по результатам индивидуального задания.

защита лабораторной работы (ЛР), выполнение курсового проекта (КП), курсовой работы (КР), расчетно-графического задания (РГЗ), написание реферата (Р), эссе (Э), коллоквиум (К), тестирование (Т)

### 2.3.1 Занятия лекционного типа

Раздела	Наименование раздела/модуля	Содержание раздела/модуля	Форма текущего контроля (по неделям семестра)
	2	3	4
	МОДУЛЬ 1. Основные понятия вариационного исчисления.	<b>Тема 1. Основные понятия. Основная задача вариационного исчисления.</b> История возникновения вариационного исчисления, как раздела дифференциального и интегрального исчислений. Задача о брахистохроне. Пример задачи оптимального управления. Вариационная задача как задача оптимального управления. Задачи конечномерной оптимизации и задачи ВИ. Постановка основной задачи <b>ВИ</b> . Примеры задач. Функционал. Вариация аргумента. Вариация функционала. Сильная и слабая окрестности. $\varepsilon$ -окрестность $n$ -го порядка кривой. Близость кривых.	1. Подготовка рефератов, презентаций, выступлений 2. Резюме, аналитический обзор по проблеме.

		<p>Расстояние между кривыми. Линейные функционалы. Локальный экстремум. Сильный и слабый экстремумы. Первое определение <b>вариации функционала</b> первого порядка. Второе определение <b>вариации функционала</b> первого порядка.</p> <p>Игольчатая вариация. Свойства вариаций. Теорема о дифференцируемости функционалов. Необходимое условие экстремума. Ряд Тейлора для функционалов. Примеры.</p> <p><b>Тема 2. Уравнения Эйлера.</b> Уравнение Эйлера как необходимое условие экстремума. Основная лемма вариационного исчисления. Вывод уравнения Эйлера для основной задачи вариационного исчисления. Частные случаи функционалов. Алгоритм решения задач. Методы и приёмы решения задач. Применение уравнения Эйлера к известным задачам вариационного исчисления. Задача о кратчайшем расстоянии. Задача о цепной линии. Задача о брахистохроме. Задача Пуанкаре. Задача Ньютона об обтекании тела вращения</p> <p><b>Тема 3. Достаточные условия экстремума.</b> Вторая вариация функционала. Условие знакопостоянства второй вариации и достаточное условие экстремума. Поле экстремалей (собственное, центральное). <math>C</math>-дискриминанта. Сопряжённая точка. Условие Якоби включения экстремали в поле экстремалей. Достаточные условия (слабого, сильного) экстремума: Вейерштрасса, Лежандра.</p>	
	<p>МОДУЛЬ 2. Численные способы решения вариационных задач.</p>	<p><b>Тема 4. Численные способы решения вариационных задач.</b> Прямой метод сведения вариационной задачи к задаче конечномерной оптимизации. Вариационные методы математической физики. Метод Рунге. Метод Галеркина. Методы численного решения уравнения Эйлера. Метод стрельбы. Метод конечных разностей.</p> <p><b>Тема 5. Обобщения основной задачи ВИ.</b> Способы вычисления вариаций для различных видов функционалов. Функционалы, зависящие от нескольких независимых функций. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка. Функционалы, зависящие от функций нескольких переменных. Инвариантность уравнения Эйлера. Вариационные задачи со свободными границами. Функционалы с подвижными границами. Условия трансверсальности. Задачи с односторонними вариациями. Задача Больца.</p> <p><b>Тема 6.</b> Приложения методов ВИ к решению естественнонаучных задач. Отражение экстремалей. Преломление экстремалей. Задача Больца. Связь задач Лагранжа и Больца. Исторический очерк проблемы постулата Евклида</p>	<p>1. Опрос по результатам индивидуального задания</p>

		<p>о параллельных. Постановка и решение задачи Пуанкаре. Роль задачи Пуанкаре в интерпретации геометрии Лобачевского. Задача о форме тела имеющего наименьшее сопротивление в потоке газа. Задачи на условный экстремум. Задача Эйлера об изгибе стержня. Задачи с интегральными связями (изопериметрические). Метод неопределённых коэффициентов. Задачи с конечными связями. Задача о геодезических. Геодезическое расстояние. Задача Клеро. Вариационные принципы механики. Каноническая форма уравнений Эйлера. Теория Гамильтона-Якоби. Теорема Якоби. Принцип наименьшего действия в форме Лагранжа. Разрывные задачи первого рода. Разрывные задачи второго рода.</p>	
	<p>МОДУЛЬ 4. Оптимальное управление</p>	<p><b>Тема 7. Задача автоматического регулирования.</b> Понятие об объекте регулирования. Выходные входные (управляющие) величины. Отрицательная обратная связь. Алгебраические и частотные критерии устойчивости (Михайлова, Найквиста). Критерии качества управления. Синтез оптимального регулятора по квадратичному критерию</p> <p><b>Тема 8. Задачи оптимального управления.</b> Понятие об управляемом объекте, как техническом объекте. Объект управления, как система дифференциальных уравнений. Понятие об оптимальном управлении. Основная задача оптимального управления. Задача Эйлера (брахистохроны) как задача оптимального управления. Задачи вариационного исчисления, как задачи оптимального управления. Примеры задач оптимального управления: задача на быстродействие, задача на оптимальный расход топлива, задача Лагранжа, задача Майера, задача Больца.</p> <p><b>Тема 9. Принципа максимума Понтрягина.</b> Связь принципа Понтрягина с уравнением Эйлера уравнениями Якоби. Игольчатые вариации. Принцип максимума как необходимое условие экстремума. Доказательство принципа максимума Понтрягина. Условия трансверсальности. Применение принципа максимума к решению задач. Основные теоремы линейных оптимальных быстродействиях (теорема числе переключений, теорема единственности, теорема существования). Сфера достижимости. Оптимальные процессы при ограниченных фазовых координатах. Статистические задачи оптимального управления. Примеры задач.</p> <p><b>Тема 10. Метод динамического программирования.</b> Вывод уравнения Беллмана. Синтез оптимального управления. Алгоритм Беллмана для решения динамических оптимизационных задач: (непрерывный вариант)</p>	<p>1. Подготовка рефератов, презентаций, выступлений 2. Промежуточное тестирование</p>



	<p>многоступенчатый вариант). Связь динамического программирования с принципом максимума</p> <p><b>Тема 11.</b> Численные методы решения задачи оптимального управления. Методы решения линейных задач: метод последовательных приближений Нейштадта и Итона, Шатровского</p> <p>Обзор численных методов: методы стрельбы для решения краевой задачи оптимального управления, метод вариаций в фазовом пространстве, метод вариаций в пространстве управлений. Тема 12. Достаточные условия оптимальности. Достаточные условия оптимальности для непрерывных процессов. Доказательство теоремы. Обобщение теоремы достаточных условиях. Условия при которых принцип максимума является достаточным условием экстремума. Достаточные условия оптимальности в форме принципа динамического программирования. Применение теоремы к решению задачи. Сравнительный анализ методов Понтрягина и Беллмана.</p> <p><b>Тема 13.</b> Задача оптимального управления маневром самолета. Задача об оптимальном перелете космического корабля с орбиты Земли на орбиту Марса. Динамическая макроэкономическая модель экономики. Модель оптимального управления фирмой. Задача об оптимальном распределении ресурсов. Однопродуктовая макроэкономическая модель оптимального развития экономики. Нелинейная оптимизационная модель развития многоотраслевой экономики. Оптимальное распределение инвестиций между проектами.</p>	
--	--	--

### 2.3.2 Семинарские занятия – не предусмотрены

### 2.3.3 Практические занятия

№ п/п	Наименование практических работ	Форма текущего контроля
1	Экстремум функций многих переменных	Проверка выполнения работ № 1
2	Экстремум функционалов.	Проверка выполнения лабораторных работ № 2
3	Уравнение Эйлера.	Проверка выполнения работ № 3
4	Обобщения (1) основной задачи ВИ	Проверка выполнения работ № 4
5	Обобщения (2) основной задачи ВИ.	Проверка выполнения работ № 4
6	Задачи на условный экстремум. Вариационные принципы	Проверка выполнения работ № 4

	механики	работ № 4
7	Достаточные условия экстремума функционалов	Проверка выполнения работ № 4
8	Задачи на принцип максимума Понтрягина.	Проверка выполнения работ № 5
9	Достаточные условия оптимальности.	Проверка выполнения работ № 5

### 2.3.4 Курсовые работы – не предусмотрены

## 2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающегося по дисциплине

Целью самостоятельной работы студента является углубление знаний, полученных в результате аудиторных занятий. Вырабатываются навыки самостоятельной работы. Закрепляются опыт и знания полученные во время лабораторных занятий.

№	Вид самостоятельной работы	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
1	Проработка и повторение лекционного материала, материала учебной и научной литературы, подготовка к семинарским занятиям	Методические указания для подготовки к лекционным и семинарским занятиям, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №10 от 7.04.2015 г. Методические указания по выполнению самостоятельной работы, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №10 от 7.04.2015 г.
2	Подготовка к лабораторным занятиям	Методические указания по выполнению лабораторных работ, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №10 от 7.04.2015 г.
3	Подготовка к решению задач и тестов	Методические указания по выполнению самостоятельной работы, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №10 от 7.04.2015 г.
4	Подготовка докладов	Методические указания для подготовки эссе, рефератов, курсовых работ, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №10 от 7.04.2015 г.
5	Подготовка к решению расчетно-графических заданий (РГЗ)	Методические указания по выполнению расчетно-графических заданий, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №10 от 7.04.2015 г. Методические указания по выполнению самостоятельной работы, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики ФГБОУ ВО «КубГУ», протокол №10 от 7.04.2015 г.
6	Подготовка к текущему контролю	Методические указания по выполнению самостоятельной работы, утвержденные на заседании кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики

### **3. Образовательные технологии**

С точки зрения применяемых методов используются как традиционные информационно-объяснительные лекции, так и интерактивная подача материала с мультимедийной системой. Компьютерные технологии в данном случае обеспечивают возможность разнопланового отображения алгоритмов и демонстрационного материала. Такое сочетание позволяет оптимально использовать отведенное время и раскрывать логику и содержание дисциплины.

*Лекции* представляют собой систематические обзоры нечетких и нейросетевых технологий с подачей материала в виде презентаций.

*Практические занятия* позволяет научить студента применять теоретические знания при решении и исследовании конкретных задач. Лабораторные занятия проводятся в компьютерных классах, при этом практикуется работа в группах. Подход разбора конкретных ситуаций широко используется как преподавателем, так и студентами при проведении анализа результатов самостоятельной работы. Это обусловлено тем, что в процессе исследования часто встречаются задачи, для которых единых подходов не существует. Каждая конкретная задача при своем исследовании имеет множество подходов, а это требует разбора и оценки целой совокупности конкретных ситуаций.

### **4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины**

#### **4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущей аттестации**

Учебная деятельность проходит в соответствии с графиком учебного процесса. Процесс самостоятельной работы контролируется во время аудиторных занятий и индивидуальных консультаций. Самостоятельная работа студентов проводится в форме изучения отдельных теоретических вопросов по предлагаемой литературе.

Фонд оценочных средств дисциплины состоит из средств текущего контроля (см. список лабораторных работ, задач и вопросов) и итоговой аттестации (зачета).

В качестве оценочных средств, используемых для текущего контроля успеваемости, предлагается перечень вопросов, которые прорабатываются в процессе освоения курса. Данный перечень охватывает все основные разделы курса, включая знания, получаемые во время самостоятельной работы. Кроме того, важным элементом технологии является самостоятельное решение студентами и сдача заданий. Это полностью индивидуальная форма обучения. Студент рассказывает свое решение преподавателю, отвечает на дополнительные вопросы.

#### **Примерные задания на лабораторные работы**

## **Практическое занятие 1. Экстремум функций многих переменных**

Контрольные вопросы.

1. Что такое экстремум функции?
  2. Сформулировать необходимое и достаточное условие экстремума.
  3. Сформулировать принцип неопределенных множителей Лагранжа.
  4. Перечислить численные методы поиска безусловного экстремума.
- Задачи.

**В аудитории** [10]: Безусловный экстремум: примеры 1-5, задачи 1-6.  
Условный экстремум [10]: примеры 1-4, задачи 14-20.

**На дом** [10]: Безусловный экстремум: задачи 7-13.  
Условный экстремум [10]: задачи 21-26.

## **Практическое занятие 2. Экстремум функционалов.**

Контрольные вопросы.

1. Что такое функция и что такое функционал?
2. Что такое расстояние между кривыми?
3. Какие функционалы называются непрерывными?
4. Что такое вариация функционала?
5. Сформулировать необходимое условие экстремума функционала.

Задачи.

Функционал. Близость кривых.

[10, с.22], примеры 1-8, задачи 27-34.

Непрерывность функционалов.

[10, с.27], примеры 9-11, задачи 36-44.

Вариация функционалов

[10, с.32], примеры 13-18, задачи 45-67.

Необходимое условие экстремума.

[10, с. 42], примеры 20-21, задачи 68-70.

## **Практическое занятие 3. Уравнение Эйлера.**

Контрольные вопросы.

1. Записать уравнение Эйлера.
2. Сформулировать основную лемму.
3. Перечислить частные случаи функционалов.
4. Перечислить наиболее известные задачи вариационного исчисления.

Задачи.

[10, с.46], примеры 1-13, задачи 71-95.

Вариационные задачи в параметрической форме  
[10, с.62], примеры 14-15, задачи 96-98.

#### **Практическое занятие 4.** Обобщения (1) основной задачи ВИ.

Контрольные вопросы.

1. Как находятся вариации функционалов?
2. Что такое условия трансверсальности?

Задачи.

Функционалы, зависящие от производных высшего порядка.

[10, с. 64], примеры 1-2, задачи 99-104

Функционалы, зависящие от нескольких независимых функций.

[10, с. 64], примеры 3-4, задачи 105-109.

Функционалы, зависящие от функций нескольких переменных.

[10, с. 68], примеры 5-6, задачи 109-111.

#### **Практическое занятие 5.** Обобщения (2) основной задачи ВИ.

Контрольные вопросы.

1. Поставить задачу с подвижными границами.
2. Сформулировать условия трансверсальности.
3. Дать определение односторонним вариациям

Задачи.

Задачи с подвижными границами.

[10, с. 119], примеры 1-6, задачи 177-181.

Задачи на односторонние вариации

[10, с. 138], примеры 4-6, задачи 191-192.

#### **Практическое занятие 6.** Вариационные задачи на условный экстремум.

1. Сформулировать изопериметрическую задачу?
2. Сформулировать задачу с конечными связями.
3. Что называется геодезическим расстоянием?

Контрольные вопросы.

Задачи.

Задачи с интегральными связями (изопериметрические).

[10, с. 103], примеры 1-6, задачи 166-169.

Задачи с конечными связями.

[10, с. 114], примеры 7,

Геодезическое линии.

[10, с. 116], примеры 8, задачи 170-171.

Геодезическое расстояние.

[10, с. 128], примеры 7-9, задачи 182-184.

Каноническая форма уравнений Эйлера

[10, с. 140], пример 1-3, задачи 193-198.

Вариационные принципы механики

[10, с. 151], примеры 7, задачи 212-214.

**Практическое занятие 7.** Достаточные условия экстремума функционалов.

Контрольные вопросы.

1. Что называется второй вариацией функционала?

2. Что называется полем экстремалей?

3. Дать определения собственному и центральному полям экстремалей.

4. Сформулировать условие Якоби

5. Записать функцию Вейерштрасса.

6. Сформулировать достаточные условия Вейерштрасса.

7. Сформулировать достаточные условия Лежандра..

Задачи.

Вторая вариация функционала.

[10, с. 39], примеры 19-9, задачи 62-67.

Поле экстремалей

[10, с. 76], примеры 1-7, задачи 126-134.

Достаточное условие Якоби включения экстремали в поле экстремалей

[10, с. 82], примеры 9-11, задачи 135-140.

Достаточное условие Лежандра включения экстремали в поле экстремалей

[10, с. 87], примеры 13-14, задачи 142-145.

Достаточные условия экстремума функционала

А) Вейерштрасса

[10, с. 88], примеры 1-, задачи 146-153.

Б) Лежандра

[10, с. 91], примеры 3-5, задачи 154-159.

В) Фигуратриса

[10, с. 96], примеры 7-10, задачи 160-163.

**Практическое занятие 8.** Теория оптимального управления.

Контрольные вопросы.

1. Дать определение объекту управления.
2. Сформулировать задачу Лагранжа.

Задачи.

[1, с. 155], задачи 8.1-8.18.

Задача о быстродействии [11, 12, 14],

Примеры задач технических задач

А) Задача о ракете зонде.[14].

Б) Задача о маневре самолета

Грачев Н.И., Евтушенко Ю.Г. Библиотека программ для решения задач оптимального управления //Журнал вычислительной математики и математической физики 1979. т.19. №2. С.367-387.

В) Задача о перелете с орбиты Земли на орбиту Марса//Журнал вычислительной математики и математической физики 1980. Т. 20.

Г) Задача на применение динамического программирования

## **Практическое занятие 9. Достаточные условия оптимальности.**

Контрольные вопросы.

Задачи с фазовыми ограничениями [4, с. 76], [4, с. 82].

Условия при которых принцип максимума является достаточным условием экстремума.[4, с. 111].

### **4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации**

1. Задача о брахистохроне и основные задачи вариационного исчисления.
2. Основные понятия вариационного исчисления.
3. Уравнение Эйлера.
4. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.
5. Функционалы, зависящие от нескольких функций.
6. Функционалы зависящие от производных высшего порядка.
7. Функционалы зависящие от функций нескольких независимых переменных.
8. Вариационные задачи с подвижными границами. Условия трансверсальности для вариационных задач с подвижными границами.
9. Задача Больца с подвижными границами.
10. Поле экстремалей. Достаточное условия включения экстремали в поле экстремалей Якоби.
11. Вторая вариация функционала. Достаточные условия экстремума.
12. Достаточное условие Вейерштрасса.
13. Вариационные принципы механики. Каноническая форма уравнений Эйлера.
14. Метод стрельбы для численного решения уравнения Эйлера.

15. Конечно-разностные методы для решения численного решения уравнения Эйлера..
16. Прямые методы решения вариационных задач.
17. Задачи на условный экстремум. Метод неопределённых коэффициентов.
18. Изопериметрические задачи.
19. Задачи с односторонними вариациями.
20. Геодезические линии. Геодезическое расстояние.
21. Задача Пуанкаре и неевклидова геометрия.
22. Постановка задачи оптимального управления.
23. Задача Лагранжа. Задача Майера. Задача Больца
24. Принцип максимума Понтрягина и связь с задачами ВИ. Условия трансверсальности.
25. Доказательство принципа максимума.
26. Метод динамического программирования. и принцип максимума
27. Применение принципа максимума к решению задач.
28. Достаточные условия оптимальности.

## **5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

### **5.1. Основная литература:**

1. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. Изд-во МГТУ Баумана. 2006. 466 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление М.: 2010

### **5.2. Дополнительная литература.**

3. Будылин А.М. Вариационное исчисление. СПб.: СПбГУ, 2001.
4. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике. М.: Финансы и статистика. 2003.
5. Лебедев К.А. Об одной модификации метода Ньютона для решения краевых задач оптимального управления. Деп. ВИНТИ 15.07.88, № 5717 - В88
6. Пантелеев А.А., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. Изд-во. М. Высшая школа: 2002.
7. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука, 2005.

## **6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

8. Вариационное исчисление [Электронный ресурс]. – <http://home.ural.ru>
9. Образовательный сайт [Электронный ресурс]. <http://www.exponenta.ru>
10. Краснов М.Л., Макаренко, Г.И., Киселёв А.И. Вариационное исчисление М.: Наука. 1973 [Электронный ресурс]. – <http://padabum.com/d.php?id=10153>



11.Алексеев В.М., Галеев Э.М. Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. 1984. 285 с. [Электронный ресурс]. – <http://nashaucheba.ru>

12.Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления М. : Наука. 1969. 406 с. [Электронный ресурс].

<http://rutracker.org/forum/viewtopic.php?t=2854426>

13.Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов. М.Наука. 1976. 390 с. [Электронный ресурс]. <http://bookfi.org/book/562180>

14. Федоренко Р.П. Приближённое решение задач оптимального управления.М.:Наука. 1978. 483. [Электронный ресурс] –

<http://e.lanbook.com/books/element.php?> .

15. Википедия, свободная энциклопедия. [Электронный ресурс]. – Wikipedia <http://ru.wikipedia.org>

16. Рутковская Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы: Пер.с польск. И.Д. Рудинского. 2-е издание / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский. – Изд-во: Горячая линия-Телеком, 2013. – 384 с. [Электронный ресурс] - [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=11843](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=11843).

## **7. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины**

Рабочая программа для учебной дисциплины предназначен для использования дистанционных образовательных технологий (далее ДОТ) в очной, заочной и очно-заочной формах обучения.

Основная цель создания РП - предоставить студенту полный комплект учебно-методических материалов для самостоятельного изучения дисциплины. При этом задачами преподавателя являются: оказание консультационных услуг, текущая и итоговая оценка знаний. Текущая оценка знаний проводится с использованием тестов, а также по результатам выполнения заданий, если это предусмотрено программой обучения.

РП построен по модульному принципу. Модуль - это часть РП, предназначенная для изучения отдельных тем, проведения самоконтроля и текущего контроля знаний.

При изучении дисциплины используется приведённая ниже литература и электронные источники. Цели и задачи и требования к уровню освоения дисциплины, объем дисциплины и виды учебной работы изложены в первом разделе РП.

Теоретический материал содержит систематизированные сведения научного и прикладного характера, изложенные в форме, удобной для изучения и преподавания. Особое внимание уделяется связи рассматриваемых вопросов с объектами профессиональной деятельности выпускника и требованиями его образованности, а также рассмотрению новых сведений (концепций, фактов); связи новых знаний с уже имеющимися.

Краткие выводы (резюме) по теме ориентируют студента на определённую совокупность сведений, которые следует надёжно усвоить и запомнить.

Материал разбит на модули (темы). Модуль разбивается на логические структурные единицы, сопровождаются схемами, рисунками, графиками.

По каждой логической структурной единице имеются вопросы для контроля знаний.

Структура текстов лекций, то есть последовательность разделов, тем и вопросов полностью соответствует тематическому плану учебной программы по дисциплине. Тексты лекций содержат всю необходимую информацию для успешного ответа на контрольные вопросы по теме и тестовые задания.

Практический материал предназначен для выработки умений и навыков применения теоретических знаний с примерами выполнения заданий и анализом наиболее часто встречающихся ошибок. Представлено пошаговые решения типичных задач и упражнений с выдачей пояснений и ссылками на соответствующие разделы теоретического курса.

Практикум включает в себя: тексты задач (практических ситуаций) для самостоятельного решения при подготовке к итоговой аттестации; примеры решения задач (практических ситуаций) по темам, на которые предложены аналогичные задания в экзаменационных (зачетных) билетах.

Практикум содержит: электронный семинар (форум или чат) с подробным планом и списком рекомендуемой литературы; практические занятия; задания и упражнения (с примерами выполнения);

Контрольная работа представляет собой самостоятельную реферативную работу студентов. Каждый студент выполняет работу по одной теме.

Для написания реферата необходимо подобрать литературу. Общее количество литературных источников, включая тексты из Интернета, (публикации в журналах), должно составлять не менее 10 наименований. Учебники, как правило, в литературные источники не входят.

Рефераты выполняют на листах формата А4. Страницы текста, рисунки, формулы нумеруют, рисунки снабжают порисуночными надписями. Текст следует печатать шрифтом №14 с интервалом между строками в 1,5 интервала, без недопустимых сокращений. В конце реферата должны быть сделаны выводы.

В конце работы приводят список использованных источников.

Реферат должен быть подписан студентом с указанием даты ее оформления.

Работы, выполненные без соблюдения перечисленных требований, возвращаются на доработку.

Выполненная студентом работа определяется на проверку преподавателю в установленные сроки. Если у преподавателя есть замечания,

работа возвращается и после исправлений либо вновь отправляется на проверку, если исправления существенные, либо предъявляется на экзамене, где происходит ее защита.

### **Творческие задания (проекты), способствующие формированию компетенций базовой части ООП**

Вариационное исчисление и оптимальное управление сегодня рассматривается как одно из главных новых направлений обучения и эти курсы читаются во всех ведущих университетах мира.

Проведите анализ по одной из выбранных вами тематик (не менее 10 слайдов и 20 листов текста). Возможно использование звукового сопровождения, анимации (аудио-, и видеоматериала).

На первой странице слайда обязательно укажите Ф.И.О. автора, курс. Оценивается работа по следующим критериям:

- полнота представленного материала;
- оформление;
- представление и защита.

#### **Темы презентаций и докладов**

- Основные задачи вариационного исчисления
- Уравнение Эйлера.
- Функционалы, зависящие от нескольких функций.
- Функционалы зависящие от производных высшего порядка.
- Функционалы зависящие от функций нескольких независимых переменных.
- Вариационные задачи с подвижными границами. Условия трансверсальности для вариационных задач с подвижными границами.
- Задача Больца с подвижными границами
- Метод стрельбы для численного решения уравнения Эйлера.
- Конечно-разностные методы для решения численного решения уравнения Эйлера..
- Прямые методы решения вариационных задач.
- Изопериметрические задачи.
- Задачи с односторонними вариациями.
- Задача Пуанкаре и неевклидова геометрия.
- Задачи Лагранжа, Майера, Больца
- Принцип максимума Понтрягина и связь с задачами ВИ.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю) (при необходимости)**

### **8.1 Перечень необходимого программного обеспечения**

1. Операционная система MS Windows (разделы 2, 3, 5 дисциплины).
2. Интегрированное офисное приложение MS Office (разделы 2, 3, 5 дисциплины).

3. Программное обеспечение для организации управляемого коллективного и безопасного доступа в Интернет
4. MathCAD (все разделы).

## **8.2 Перечень необходимых информационных справочных систем**

1. Википедия, свободная энциклопедия. [Электронный ресурс]. – Wikipedia <http://ru.wikipedia.org>
2. Электронная библиотека КубГУ

## **9. Материально-техническое обеспечение учебной дисциплины**

В качестве материально-технического обеспечения дисциплины используются - проекционное оборудование (цифровой проектор, экран, ноутбук).

Для проведения занятий используются аудитории с учебной мебелью (столы, стулья), соответствующей количеству студентов и позволяющей осуществлять упражнения по моделированию компьютерные классы.

Компьютерная поддержка учебного процесса по направлению 09.03.03 Прикладная информатика обеспечивается практически по всем дисциплинам. Факультет компьютерных технологий и прикладной математики, оснащен компьютерными классами на 14 и 15 ПЭВМ, установлена локальная сеть, все компьютеры факультета подключены к сети Интернет. Студентам доступны современные ПЭВМ на базе процессоров Celeron и Pentium, современное лицензионное программное обеспечение – операционная система Windows 8, пакет стандартных программ **Microsoft Office**.

В состав факультета компьютерных технологий и прикладной математики входит лаборатория интенсивных методов использования вычислительной техники (ЛИМВТ).

Студенты и преподаватели вуза имеют постоянный доступ к электронному каталогу учебной, методической, научной литературе, периодическим изданиям и архиву статей.

## ВЫПИСКА

из протокола № 10 от 7 апреля 2015 г.  
заседания кафедры прикладной математики  
факультета компьютерных технологий и прикладной математики КубГУ

Председатель: Уртенев М. Х.

Секретарь: Свистунова О. Н

**ПРИСУТСТВОВАЛИ:** Колотий А.Д., Кармазин В.Н., Лебедев К.А., Халафян А.А., Калайдина Г.В., Шаповаленко В.В., Сеидова Н.М., Коваленко А.В., Казаковцева Е.В., Арутюнян А.Х., Юнов С.В., Кесиян Г.А., Письменский А.В., Теунаев Д.М., Дорошенко О.В.

**СЛУШАЛИ:** Лебедева Константина Андреевича, о представлении и утверждении рабочих программ (бакалавриат):

Б1.Б.11 «Вариационное исчисление и оптимальное управление», направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика по профилю Математическое моделирование и вычислительная математика.

**ПОСТАНОВИЛА:** Утвердить рабочие программы (бакалавриат) Б1.Б.11 «Вариационное исчисление и оптимальное управление», направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика по профилю Математическое моделирование и вычислительная математика.

Результаты голосования: за – 17

против- 0

воздержавшихся – 0

Заведующий кафедрой  
прикладной математики

М.Х. Уртенев

Секретарь  
Верно:

О.Н. Свистунова

## **ВЫПИСКА**

из протокола № 5 от 21 апреля 2015 г.  
заседания учебно-методического Совета  
факультета компьютерных технологий и прикладной математики  
КубГУ

Председатель: Малыхин К.В. – к.ф. – м. н., доцент кафедры  
вычислительных технологий

Члены комиссии: Костенко К.И. – зав. кафедрой информационных  
систем, к. ф. – м. н., доцент, Бессарабов Н.В. – к. т. н., к доцент кафедры  
математического моделирования, Кармазин В.Н. – к. ф. – м. н., профессор  
кафедры прикладной математики

**СЛУШАЛИ:** Лебедева Константина Андреевича, о представлении и  
утверждении рабочих программ (бакалавриат):

Б1.Б.11 «Вариационное исчисление и оптимальное управление»,  
направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика  
по профилю Математическое моделирование и вычислительная математика.

**ПОСТАНОВИЛА:** Утвердить рабочие программы (бакалавриат)  
Б1.Б.11 «Вариационное исчисление и оптимальное управление»,  
направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика  
по профилю Математическое моделирование и вычислительная математика.

Результаты голосования: за – 4, против – 0, воздержавшихся – 0.

Председатель учебно-методического  
Совета ФКТ и ПМ КубГУ

К.В. Малыхин