

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кубанский государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по научной работе
и инновациям
_____ М. Г. Барда
27» «апреля» 2018 г.



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ОД.3. Геометрическая теория меры и её приложения

Направление подготовки: 01.06.01 Математика и механика

Профиль: 01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Форма обучения: очная

Квалификация (степень): Исследователь. Преподаватель-Исследователь

Краснодар 2018

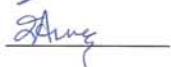
Рабочая программа дисциплины «Геометрическая теория меры и её приложения» разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, профили: Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Руководитель ООП,



Е.А. Щербаков

Составитель программы,



А.Э. Бирюк

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры теории функций

от 10.04.2018 г., протокол № 7.

Декан факультета математики и компьютерных наук



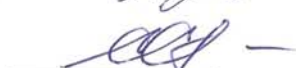
Грушевский С.П.

Зав. кафедрой теории функций



В.А. Лазарев

Зав. отделом аспирантуры



Е.В. Строганова

1 Цели и задачи изучения дисциплины

1.1 Цель освоения дисциплины

Главная цель курса – освоение основных методов современной геометрической теории меры, составляющей основу современных вариационных методов.

1.2 Задачи дисциплины

1. Формирование знаний о логическом обосновании теории меры с помощью аксиоматической теории множеств.
2. Формирование знаний о взаимосвязи между различными мерами в многообразии мер и роли меры Бореля среди них.
3. Формирование знаний о теоремах покрытия и вопросах дифференцируемости мер и представлениях линейных непрерывных функционалов.
4. Формирование знаний о тонких свойствах функций.
5. Формирование знаний о мерах Хаусдорфа, размерностях Хаусдорфа, их свойствах.
6. Формирование знаний о структуре фракталов.
7. Формирование знаний о спрямляемых множествах
8. Формирование знаний о теории варифолдов, потоков и их применениях к решению экстремальных задач.

1.3 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Геометрическая теория меры и её приложения» относится к вариативной части Блока 1 «Дисциплины (модули)» учебного плана.

Программа рассчитана на аспирантов, прослушавших курсы: «Современные вопросы теории функций»; «Вещественный, комплексный и функциональный анализ (кандидатский экзамен)».

Знания, полученные в этом курсе, необходимы для проведения научно-исследовательской работы и успешной сдачи государственной итоговой аттестации.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся профессиональных компетенций: ПК- 1, ПК-2. Для того чтобы формирование компетенций ПК-1 и ПК-2 было возможно, обучающийся, приступивший к освоению программы аспирантуры, должен знать основные понятия и методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, математического анализа, функционального анализа; уравнений в частных производных, теоретической механики, уметь работать с численными методами и основными пакетами прикладных программ, владеть математическим аппаратом и информационными технологиями для выполнения вычислительных экспериментов, статистической обработки и графической интерпретации результатов, навыками выбора методов и средств решения задач исследования.

№ п.п	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
1.	ПК-1	способность к системному	основные понятия и гипотезы	ориентироваться в современных мето-	навыками применения класси-

№ п.п	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
		мышлению и грамотному использованию основных принципов, концепций и методов вещественного, комплексного и функционального анализа	для предметной области и исследуемых моделей Шифр: З (ПК-1)-1	дах и подходах, применяемых для изучения рассматриваемых процессов и явлений, грамотно использовать и развивать математическую теорию и физико-математические модели, лежащие в их основе Шифр: У (ПК-1)-1	ческих и современных методов анализа математических моделей формализованных материальных объектов и процессов Шифр: В (ПК-1)-1
2.	ПК-2	готовность к постановке профессиональных задач в области научно-исследовательской и практической деятельности, подбору, развитию и совершенствованию методов их решения на базе современных достижений в области вещественного, комплексного и функционального анализа	требования к содержанию и правилам оформления рукописей к публикации в рецензируемых научных изданиях Шифр З (ПК-2)-2	использовать и совершенствовать методы и программное обеспечение для расчета исследуемых характеристик объектов и процессов на базе современных достижений в области механики, прикладной математики и ИТ Шифр: У(ПК-2)-1	методами планирования, подготовки, проведения НИР, анализа полученных данных, формулировки выводов и рекомендаций по профилю 01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ Шифр: В (ПК-2)-1

2. Структура и содержание дисциплины

2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 3 зач.ед. (108 часов), их распределение по видам работ представлено в таблице (для аспирантов ОФО).

Вид учебной работы	Всего часов	Курс (часы)
		4
Контактная работа, в том числе:		
Аудиторные занятия (всего):	54	54
Занятия лекционного типа	18	18
Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия)	18	18
Лабораторные занятия	18	18
Самостоятельная работа, в том числе	54	54
Отработка навыков решения практических задач	14	14
Изучение теоретического материала	20	20
Подготовка к текущему контролю	20	20
Промежуточная аттестация		зачет
Общая трудоёмкость	108	108
	в том числе контактная работа	44
	зач. ед.	3

2.2 Структура дисциплины:

Распределение видов учебной работы и их трудоёмкости по разделам дисциплины. Разделы дисциплины, изучаемые на 4 курсе

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Самостоятельная работа
			Л	ПЗ	ЛР	
1	2	3	4	5	6	7
1.	Теория множеств	12	2	2	2	6
2.	Мера и измеримые функции, тонкие свойства функций	58	8	8	8	34
3.	Формулы площади и коплощади.	14	2	4	4	4
4.	BV-функции и множества конечного периметра	14	4	2	2	6
5.	Теория варифолдов	10	2	2	2	4
	<i>Итого по дисциплине:</i>	108	18	18	18	54

Примечание: Л – лекции, ПЗ – практические занятия / семинары, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента

2.3 Содержание разделов дисциплины:

2.3.1 Занятия лекционного типа

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Теория множеств.	Система аксиом Цермело – Френкеля(ZF-C), пополненная аксиомой выбора. Теорема рекуррентности. Обобщённая теорема рекуррентности.	Устный опрос
2.	Мера и измеримые функции, тонкие свойства функций	Трансфинитная рекуррентность и мера Бореля, её неполнота. Пополнение меры Бореля. Суслинские и борелевские множества. Необходимое и достаточное условие принадлежности множеств к классу борелевских множеств. Регулярные меры Бореля. Мера Радона. Пространства измеримых функций. Теорема об аппроксимации измеримых функций простыми функциями. Типы сходимости функций, связь между ними. Интегралы Лебега, Лебега-Стилтьеса, Римана - Стилтьеса. Теорема о представимости линейных непрерывных функционалов. Мера Хаусдорфа, её свойства, связь с мерой Лебега. Счётно спрямляемые k -мерные множества. Слабые касательные пространства. Мера конусов и спрямляемость.	Устный опрос
3.	Формулы площади и коплощади.	Формулы площади и коплощади. Формулы первой и второй вариаций.	Устный опрос
4.	BV -функции и множества конечного периметра	Структура пространства BV -функций. Критерии конечности периметра.	Устный опрос
5.	Теория варифоидов	Теория варифоидов.	Устный опрос

2.3.2 Занятия семинарского типа

№	Наименование раздела	Тематика практических занятий (семинаров)	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Теория множеств.	Метод трансфинитной индукции. Лемма Цорна и вполне упорядоченные множества.	Устный опрос
2.	Мера и измеримые функции, тонкие свойства функций	Мера Радона. Теоремы об аппроксимации меры множества мерами открытых и замкнутых множеств. Пространства измеримых функций. Типы сходимости функций, связь между ними. Теорема Фубини. Дифференцирование мер Радона. Фракталы, структурная теорема.	Доклад-сообщение

		Счётно спрямляемые k -мерные множества. Плотность и спрямляемость.	
3.	Формулы площади и коплощади.	Формулы площади и коплощади. Формулы первой и второй вариаций.	Устный опрос
4.	BV -функции и множества конечного периметра	Критерии конечности периметра.	Устный опрос
5.	Теория варифолдов	Теория варифолдов. Касательные конусы и спрямляемость.	Устный опрос

2.3.3 Лабораторные занятия

	Наименование раздела	Тематика лабораторных занятий	Форма текущего контроля
	2	3	4
1.	Теория множеств.	Теорема о сравнении вполне упорядоченных множеств и ординалов.	Устный опрос
2.	Мера и измеримые функции, тонкие свойства функций	Конструирование минимальных сигма колец для заданной системы множеств. Суслинские и борелевские множества. Регулярные меры Бореля. Пространства измеримых функций. Теорема Фубини. Дифференцирование мер Радона. Теорема о представимости линейных непрерывных функционалов. Размерность Хаусдорфа. Способы вычисления размерности. Слабые касательные пространства. Ортогональное проектирование и спрямляемость.	Устный опрос
3.	Формулы площади и коплощади.	Формулы площади и коплощади. Формулы первой и второй вариаций.	Устный опрос
4.	BV -функции и множества конечного периметра	Критерии конечности периметра.	Устный опрос
5.	Теория варифолдов	Теория варифолдов. Касательные конусы и спрямляемость.	Устный опрос

2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Не предусмотрены.

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

№	Вид СРС	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
1	Отработка навыков решения практических задач	1) Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Лань, 2015 http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65055 2) Натансон. И.П. Теория функций вещественной переменной. Лань, 2008. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=284

		3) Люстерник Л.А. Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. Лань, 2009. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=245
2	Изучение теоретического материала	1) Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Лань, 2015 http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65055 2) Натансон. И.П. Теория функций вещественной переменной. Лань, 2008. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=284 3) Люстерник Л.А. Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. Лань, 2009. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=245
3	Подготовка к текущему контролю	1) Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Лань, 2015 http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65055 2) Натансон. И.П. Теория функций вещественной переменной. Лань, 2008. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=284 3) Люстерник Л.А. Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. Лань, 2009. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=245

3. Образовательные технологии

Активные и интерактивные формы: лекции: проблемная лекция, лекция – пресс-конференция (могут применяться презентации); практические занятия: мозговой штурм, занятие – конференция (с применением презентаций), разбор практических задач, активизация творческой деятельности, регламентированная дискуссия.

4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущей аттестации

Вопросы для устного опроса на лекционных занятиях

1. Привести пример неизмеримого множества. А) по Жордану. Б) по Лебегу.
2. Можно ли утверждать, что граница измеримого множества всегда измерима?
3. Можно ли утверждать, что множество с измеримой границей обязательно измеримо?
4. Вычислить n -мерную меру шара радиуса R в R^n .
5. Вычислить Хаусдорфову размерность стандартного канторова множества.

Вопросы для устного опроса на практических занятиях

1. Логическое обоснование теории меры с помощью аксиоматической теории множеств.
2. Теоремы покрытия и вопросы дифференцируемости мер и представлениях линейных непрерывных функционалов.
3. Спряжляемые множества. Структура спряжляемых множеств.
4. Теория варифолдов, потоков и их применениях к решению экстремальных задач.

Темы докладов-сообщений

1. Взаимосвязь между различными мерами в многообразии мер и роли меры Бореля среди них.
2. Понятие ёмкости множества и тонкие свойства функций.

3. Мера Хаусдорфа, размерность Хаусдорфа, их свойствах.
4. Фракталы. Структура фракталов.

Вопросы для устного опроса на лабораторных занятиях

1. Доказать теорему Безиковича о покрытиях
2. Построить двумерную область, граница которой имеет положительную двумерную меру Лебега
3. Доказать, что снежинка Коха не является локально спрямляемой кривой.
4. Доказать, что система измеримых по Борелю подмножеств числовой прямой имеет мощность континуума.
5. Построить, используя процедуру построения множества Кантора, множество положительной меры.
6. Пусть A - множество чисел, содержащих бесконечно много 5 в своих десятичных разложениях. Доказать, что A - борелевское множество.
7. Доказать теорему Егорова: если последовательность функций сходится всюду на множестве D , борелевское множество конечной меры, то найдутся борелевские множества, сколь угодно мало отличающиеся по мере от множества D , на которых имеет место равномерная сходимости исходной последовательности функций.
8. Доказать, что размерность Хаусдорфа канторовой пыли равна 1. Докажите, что размерность Хаусдорфа множества Кантора равна логарифму двух, поделённому на логарифм трёх.
9. Покажите, что существует компактное подмножество $[0,1]$ 1-мера Хаусдорфа которого равна единице, а размерность Хаусдорфа которого равна нулю.
10. Докажите, что регулярное 1-множество обладает почти всюду касательной, а у иррегулярного множества касательные отсутствуют почти всюду.
11. Построить нигде не связное регулярное 1- множество.
12. Доказать теорему Радемахера о дифференцируемости локально липшецевых отображений.
13. Вычислить меру Хаусдорфа спрямляемой кривой.
14. Доказать, что спрямляемая кривая является регулярным 1-множеством.
15. Доказать, что иррегулярное 1-множество не содержит дуг.
16. Доказать теорему Федерера о приближении аппроксимативно дифференцируемых функций липшецевыми функциями, дифференцируемыми функциями.
17. Счётная m - спрямляемостью и свойство слабо аппроксимативного касательного пространства. Доказать теорему о связи между ними.
18. Получить формулы площади и ко-площади.
19. Доказать теорему о следах для BV- функций
20. Доказать теорему ди - Джорджи об $(n-1)$ - спрямляемости приведённой границы множества, характеристическая функция которого является BV- функцией.
21. Доказать теорему о необходимом и достаточном условии сходимости варифолдов.
22. Доказать изопериметрическое неравенство для варифолдов.
23. Доказать теорему Федерера - Флеминга о компактности спрямляемых потоков.

4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к зачету

1. Теория множеств. Ординалы. Кардинальные числа. Мощность множеств.
2. Полукольца. Сигма кольца.
3. Монотонные классы.
4. Суслинские множества.
5. Борелевские множества

6. Регулярные меры Бореля.
7. Меры Радона
8. Измеримые функции.
9. Теоремы Егорова и Лузина. Интегралы.
10. Теорема Фубини
11. Дифференцирование мер Радона
12. Мера Хаусдорфа
13. Липшецевы функции и спрямляемые множества
14. Формулы площади и коплощади.
15. Формулы первой и второй вариаций.
16. BV-функции и множества конечного периметра
17. Теория варифолдов

5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

5.1 Основная литература:

- 1) Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. Том 1 [Электронный ресурс] : учебник / Г.М. Фихтенгольц. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 448 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/65055> . — Загл. с экрана.
- 2) Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. том 2-й [Электронный ресурс] : учебник / Г.М. Фихтенгольц. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. — 464 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/411> . — Загл. с экрана.
- 3) Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной [Электронный ресурс] : учебник / И.П. Натансон. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. — 560 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/284> . — Загл. с экрана.
- 4) Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 272 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/245> . — Загл. с экрана.

5.2 Дополнительная литература:

- 1) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1977. - Т. 1. А - Г. - 576 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454588>
- 2) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1979. - Т. 2. Д - Коо. - 552 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454589> .
- 3) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1982. - Т. 3. Коо - Од. - 592 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454590>.
- 4) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1984. - Т. 4. Ок - Сло. - 608 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454591>
- 5) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва : Советская энциклопедия, 1985. - Т. 5. Слу - Я. - 624 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454592>

5.3. Периодические издания:

- 1) Вестник МГУ. Серия: Математика. Механика; <http://vestnik.math.msu.ru/>
- 2) Вестник СПбГУ. Серия: Математика. Механика. Астрономия; <http://vestnik.spbu.ru/>

- 3) Известия ВУЗов.Серия: Математика; <https://kpfu.ru/>
- 4) Известия РАН (до 1993 г. Известия АН СССР).Серия: Математическая; <http://www.mathnet.ru/>

6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

1. ЭБС "Университетская библиотека ONLINE" – <http://biblioclub.ru/>
2. Электронная библиотечная система издательства "Лань" – <http://e.lanbook.com/>
3. Электронная библиотечная система "Юрайт" – <http://www.biblio-online.ru/>
4. Scopus – база данных рефератов и цитирования – <http://www.scopus.com/>
5. Web of Science (WoS) – http://apps.webofknowledge.com/WOS_GeneralSearch_input.do?product=WOS&search_mode=GeneralSearch&SID=V2yRRW6FP9RssAaul78&preferencesSaved
6. Научная электронная библиотека (НЭБ) – <http://www.elibrary.ru/>
7. Архив научных журналов – <http://archive.neicon.ru/>
8. Электронная Библиотека Диссертаций – <https://dvs.rsl.ru/>
9. Национальная электронная библиотека – <http://нэб.рф/>
10. База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций – <http://infoneeds.kubsu.ru/>

7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной систематизированный материал и поднимаются проблемные вопросы; практических занятий, на которых широко используются активные и интерактивные образовательные технологии; лабораторных, в процессе проведения которых обучающиеся отрабатывают навыки решения конкретных научных задач.

Важнейшими составляющими курса являются такие виды занятий, как мозговой штурм и занятие – конференция, на которых по максимуму осуществляется активизация творческой деятельности обучающихся; а также самостоятельная работа аспирантов. В процессе самостоятельной работы обучающимися активно используются информационные справочные системы.

Текущий контроль осуществляется преподавателем, ведущим лекционные, практические и лабораторные занятия на основе устного опроса, дающей представление о динамике роста знаний аспирантов и их научном потенциале, на основе докладов-сообщений. Итоговый контроль осуществляется в форме зачета.

Для аспиранта большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала, проводимая научным руководителем.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

8.1 Перечень информационных технологий

- Использование электронных презентаций при проведении лекционных и практических занятий.
- Использование электронной почты преподавателей и обучающихся для рассылки,

переписки и обсуждения возникших учебных проблем.

8.2 Перечень необходимого программного обеспечения

- MicrosoftWindows
- Офисный пакет приложений Microsoft Office Professional Plus

8.3 Перечень необходимых информационных справочных систем

1. Научная электронная библиотека (<http://www.elibrary.ru>).
2. Электронная библиотечная система издательства «Лань» (<http://e.lanbook.com>).
3. Электронная библиотечная система «Юрайт» (<http://www.biblio-online.ru>).
4. Научная электронная библиотека «КиберЛенинка» (<http://cyberleninka.ru>).
5. Электронная библиотечная система «Университетская библиотека ONLINE» (www.biblioclub.ru).
6. Реферативная база данных (<https://www.scopus.com>)

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) и оснащённость
1.	Лекционные занятия	Комплект учебной мебели, меловая (маркерная) доска, компьютерная техника с подключением к сети Интернет, переносное мультимедийное оборудование (проектор).
2.	Семинарские занятия	Комплект учебной мебели, меловая (маркерная) доска, компьютерная техника с подключением к сети Интернет, переносное мультимедийное оборудование (проектор).
3.	Лабораторные занятия	Комплект учебной мебели, меловая (маркерная) доска, компьютерная техника с подключением к сети Интернет, переносное мультимедийное оборудование (проектор).
4.	Групповые (индивидуальные) консультации	Комплект учебной мебели, меловая (маркерная) доска, компьютерная техника с подключением к сети Интернет, переносное мультимедийное оборудование (проектор).
5.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Комплект учебной мебели, меловая (маркерная) доска.
6.	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.