МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Кубанский государственный университет»
(ФГБОУ ВО "КубГУ")

Факультет компьютерных технологий и прикладной математики
Кафедра прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе,
качеству образования – первый
проректор
______________Иванов А.Г.
«___» мая ______ 2015г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.02.01 «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика
Профиль "Математическое моделирование и вычислительная математика"
(Математическое моделирование)

Квалификация (степень) выпускника – бакалавр
Форма обучения: очная

Краснодар 2015

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика профиль Математическое моделирование и вычислительная математика (Математическое моделирование)

Программу составил(и):

К.В. Малыхин, к.ф.-м.н, доцент ____________________
подпись

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» утверждена на заседании кафедры прикладной математики протокол № 10 «7» апреля 2015г.

Заведующий кафедрой Уртенов М.Х. ____________________
подпись

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры математического моделирования протокол № 8 «10» апреля 2015г.

Заведующий кафедрой Бабешко В.А. ____________________
подпись

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета компьютерных технологий и прикладной математики
протокол № 5«29» апреля 2015г.

Председатель УМК факультета Малыхин К.В. ____________________
подпись

Рецензенты:

Шапошникова Татьяна Леонидовна.
Доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор. Почетный работник высшего профессионального образования РФ. Директор института фундаментальных наук (ИФН) ФГБОУ ВО «КубГТУ».

Марков Виталий Николаевич.
Доктор технических наук. Профессор кафедры информационных систем и программирования института компьютерных систем и информационной безопасности (ИКСиИБ) ФГБОУ ВО «КубГТУ».

1 Цели и задачи изучения дисциплины .

1.1 Цели изучения дисциплины.

Целью преподавания и изучения дисциплины «Функциональный анализ» является овладение студентами методами функционального анализа непосредственно примыкающими к задачам прикладной математики, которые необходимы с одной стороны для формирования навыков работы с абстрактными математическими понятиями, а с другой стороны для восприятия с общетеоретических позиций идей и методов смежных дисциплин, подготовки выпускника как и к научно-исследовательской деятельности, так и к производственно технологической деятельности в области решения прикладных задач.

1.2 Задачи дисциплины.

Задачей изучения дисциплины “Функциональный анализ”является развитие способностей студента понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат при решении задач, возникающих на практике и в научно-исследовательской деятельности.

1.3 Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы.

Курс «Функциональный анализ» относится к дисциплинам по выбору вариативной части Блока 1. Для освоения курса студентами необходимо наличие у студентов знаний и умений приобретённых в результате изучения ими базовых курсов математического анализа, алгебры и аналитической геометрии, дифференциальных уравнений. Знания, полученные при изучении данного курса , находят применение при изучении «Уравнений математической физики», «Дифференциальных уравнений», «Теории вероятностей», «Численных методов», ряда дисциплин специализации. Методы функционального анализа находят своё приложение в различных сферах современной прикладной математики, например при создании современных систем управления, а также в научно-исследовательской работе.

.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся компетенций

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	**уметь**	**владеть**
1.	ПК-2	Способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	Основные понятия, теоремы методы, алгоритмы и средства функционального анализа	доказывать утверждения, специфичные для функционального анализа, применять методы функционального анализа для решения математических задач	методами функционального анализа для исследования различных прикладных задач. .

2. Структура и содержание дисциплины.

2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ.

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 8 зач.ед. (288 часов), их распределение по видам работ представлено в таблице

Вид работы	Трудоемкость, часов		
	5 семестр	6семестр	Всего
Контактная работа (всего), в том числе:	**74,3**	**68,3**	**142,6**
Аудиторная работа:	**70**	**64**	**138**
В том числе:			
Лекции (Л)	34	32	66
Лабораторные работы (ЛР)	36	32	68
Иная контактная работа			
Контролируемая самостоятельная работа (КСР)	4	4	8
Промежуточная аттестация (ИКР)	0,3	0,3	0,6
Самостоятельная работа:	**69,7**	**75,7**	**145,4**
Самоподготовка	25	31	56
Подготовка и сдача экзамена	44,7	44,7	89,4
Общая трудоемкость	**144**	**144**	**288**
Вид итогового контроля	**экзамен**	**экзамен**	**экзамен**

.

2.2 Структура дисциплины:

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы дисциплины, изучаемые в 5 (табл.2) и 6 (табл. 3) семестрах

Таблица 2. Разделы дисциплины, изучаемые в 5 семестре.

№	Наименование разделов	Количество часов					
		Всего	Аудиторная работа				
			Всего	Л	ЛР	СРС	ЭЗ
1	2	3	4	5	6	7	8
1.	Тригонометрические ряды Фурье	30	14	6	8	6	10
2.	Интеграл Лебега	37	20	8	12	6	11
3.	Пространства Лебега	29	12	6	6	6	11
4	Линейные нормированные пространства	43,7	24	14	10	7	12,7
	Всего по разделам дисциплины	139,7	74	34	36	25	44,7
	Промежуточная аттестация (ИКР)	0,3					
	Контроль самостоятельной работы (КСР)	4					
	Итого	144	74	34	36	25	44,7

Таблица 3. Разделы дисциплины, изучаемые в 6 семестре.

№	Наименование разделов	Количество часов					
		Всего	Аудиторная работа				
			Всего	Л	ЛР	СРС	ЭЗ
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Евклидовы пространства	29	12	6	6	8	9
2	Линейные функционалы	29	10	6	4	9	10
3	Линейные операторы	38	22	10	12	12	14
4	Приложения линейных операторов	43,7	20	10	10	12	11,7
	Всего по разделам дисциплины	139,7	64	32	32	31	44,7
	Промежуточная аттестация (ИКР)	0,3					
	Контроль самостоятельной работы (КСР)	4					
	Итого	144	64	32	32	31	44,7

Примечание: Л – лекции, ЛР – лабораторные занятия, СРС – самостоятельная работа студента, КСР – контролируемая работа студента, ЭЗ- подготовка к сдаче зачета и экзамена.

2.3 Содержание разделов дисциплины:
2.3.1 Занятия лекционного типа.

Разделы дисциплины, изучаемые в 5 (табл.4) и 6 (табл. 5) семестрах

Таблица 4. Разделы дисциплины, изучаемые в 5 семестре.

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Тригонометрические ряды Фурье	Периодические величины. Гармонический анализ. Понятие ряда. Коэффициенты Фурье.Интеграл Дирихле.Лемма Римана. Следствие из неё. Принцип локализции. Признаки Дини и Липшица сходимости ряда Фурье в точке. Разложение в ряд Фурье для произвольного промежутка. Разложение в ряд Фурье непериодической функции. Разложение в ряд Фурье только по синусам и только по косинусам. Равномерная сходимость ряда Фурье.	Опрос по результатам индивидуального задания
1	2	3	4
2.	Интеграл Лебега	Необходимость обобщения понятия интеграла Римана..Множества точек. Понятие меры. Свойства меры. Множество меры ноль. Определения, примеры. Измеримые функции. Теорема об эквивалентных определениях измеримой функции. Свойства измеримых функций. Интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции, понятие. Теорема о существовании интеграла Лебега. Сравнение с интегралом Римана .Интеграл Лебега по произвольному измеримому множеству. Свойства интеграла Лебега .Интеграл Лебега от неограниченной функции.	Опрос по результатам индивидуального задания
3.	Пространства Лебега	Понятие $L_p[a,b]$. Теорема о вложении пространств. Линейность пространств $L_p[a,b]$. Неравенство Гёльдера. Неравенство Минковского. Норма в $L_p[a,b]$. Пространство $L_2[a,b]$. Свойства функций $L_2[a,b]$. Сходимость в $L_2[a,b]$. Теоремы о единственности предела, о непрерывности нормы, фундаментальности и сходимости в $L_2[a,b]$. Теорема о приближении функций из $L_2[a,b]$.	1. Опрос по результатам индивидуального задания 2. Коллоквиум
4.	Линейные	Линейные пространства. Определения. Примеры.	Опрос по

	нормированные пространства.	Изоморфизм..Линейная зависимость. Базис. Размерность. Фактор-пространство. Теорема о размерности фактор-пространства. Линейные нормированные пространства. Определение. Примеры. Предел последовательности в ЛНП. Свойства пределов. Задачи. Открытые и замкнутые пространства в L. Предельная точка. Теорема. Эквивалентные нормы. Теорема об эквивалентных нормах в конечномерном пространстве. Расстояние от точки до подпространства. Лемма Рисса о почти перпендикуляре. Фундаментальность в линейном нормированном пространстве. Понятия. Свойства Банаховые пространства. Понятия. Примеры. Пример неполного нормированного пространства. Ряды в нормированных пространствах: сходимость, критерий Коши, абсолютная сходимость. Принцип вложенных шаров. Теорема Бэра.Компактные множества в нормированных пространствах, ограниченность и замкнутость компактного множества. Предкомпактные множества. Связь с компактными множествами. Критерий Хаусдорфа предкомпактности множества в нормированных пространствах. Компактность и конечномерность. Теорема о конечномерности локально-компактного пространства. Теорема Арцела. Банаховые пространства со счетным базисом. Понятие. Примеры. Определение и примеры сепарабельных нормированных пространств.	результатам индивидуального задания

Таблица 5. Разделы дисциплины, изучаемые в 6 семестре.

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
	Евклидовы пространства	Определение гильбертова пространства. Примеры. Ортогональность в гильбертовом пространстве.Теорема об однозначном представлении вектора в виде суммы его проекций на ортогональные подпространства. Лемма об ортогональных подпространствах. Ортонормированные системы в гильбертовых пространствах. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном H-пространстве. Ряды Фурье в H-пространстве. Экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье. Полнота и замкнутость ортонормированной системы в H-пространстве.	Опрос по результатам индивидуального задания

		Теорема Рисса-Фишера в Н-пространстве. Изоморфизм Н-пространств.	
1	2	3	4
	Линейные функционалы	Линейные функционалы в ЛНП . Определение. Теорема о коразмерности ядра линейного функционала. Теорема Хана-Банаха в линейном пространстве. Линейные непрерывные функционалы в ЛНП. Непрерывность и ограниченность линейного функционала в ЛНП. Теорема Хана-Банаха в ЛНП. Сопряженное пространство L^*.Теорема о полноте L^*. Слабая сходимость в ЛНП. Теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в Н-пространстве.	Опрос по результатам индивидуального задания
	Линейные операторы	Линейный оператор в линейном пространстве. Понятие, примеры. Линейный непрерывный оператор в ЛНП. Непрерывность и ограниченность. Норма линейного ограниченного оператора. Свойства, примеры. Равномерная сходимость линейных операторов. Теоремы о равномерной сходимости в единичном круге. Следствие. Полнота пространства $\mathcal{L}(L, L_1)$. Сильная сходимость в $\mathcal{L}(L, L_1)$.Примеры. Принцип равномерной1 ограниченности. Теорема Банаха-Штейнгауза. Обратный оператор. Определение. Теорема о линейности оператора A^{-1}. Достаточное условие ограниченной обратимости линейного оператора. Теорема о существовании оператора $(I + A)^{-1}$. Теорема об ограниченной обратимости оператора, близкого к ограниченно обратимому. Регулярное множество, спектр и резольвента линейного оператора. Спектральный радиус. Понятие сопряженного оператора. Теорема о его представлении в Н-пространстве. Теорема о линейности и непрерывности сопряженного оператора. Самосопряженные операторы. Свойства. Определение и простейшие свойства компактных операторов. Теорема о структуре компактного оператора.	1. Опрос по результатам индивидуального задания 2. Коллоквиум
	Приложения линейных операторов	Первая теорема Фредгольма. Вторая теорема Фредгольма. Третья теорема Фредгольма. Решение интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром. Исследование интегральных уравнений Фредгольма с помощью альтернативы Фредгольма. Резольвентный метод решения интегральных уравнений. Метод	Опрос по результатам индивидуального задания

		сжимающих отображений. Производные Фреше и Гато.	

2.3.3 Лабораторные занятия.

Таблица 6. Разделы дисциплины, изучаемые в 5 семестре.

№	Наименование раздела/модуля	Наименование лабораторных работ	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1	Тригонометрические ряды Фурье	Тема 1. Тригонометрическое ряды Фурье на (-π,π) Тема 2. Тригонометрическое ряды Фурье на (-l,l) Тема 3. Разложения в ряд Фурье только по синусам или только по косинусам Тема 4. Особенности коэффициентов ряда Фурье. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье	1. Выполнение практических заданий 2. Опрос по результатам практических заданий
2	Интеграл Лебега	Тема 1. Мера Лебега. Тема 2. Множества меры 0 Тема 3. Измеримые множества Тема 4. Измеримые функции Тема 5. Интеграл Лебега от ограниченных функций Тема 6. Интеграл Лебега от неограниченных функций	1. Выполнение практических заданий 2. Опрос по результатам практических заданий

3	Пространства Лебега	Тема 1 Основные свойства пространств Lp Тема 2. Сходимость в пространствах Lp Тема 3. Плотность множеств в пространствах Lp	1. Выполнение практических заданий 2. Опрос по результатам практических заданий
4	Линейные нормированные пространства	Тема 1. Метрика в линейных пространствах. Тема 2. Норма в линейных пространствах. Тема 3. Сходимость в линейных нормированных пространствах. Тема 4 Замкнутость, ограниченность, открытость , компактность в нормированных пространствах Тема 5. Предкомпактность в С[а,в]	1. Выполнение практических заданий 2. Опрос по результатам практических заданий

Таблица 6. Разделы дисциплины, изучаемые в 6 семестре.

№	Наименование раздела/модуля	Наименование лабораторных работ	Форма текущего контроля
1	2	3	4
5	Евклидовы пространства	Тема 1. Евклидовы пространства , общие свойства Тема 2. Проектирование на подпространство евклидова пространства Тема 3. Ортогонализация в гильбертовом пространстве.	1. Выполнение практических заданий 2. Опрос по результатам практических заданий
6	Линейные функционалы	Тема 1. Ограниченные функционалы. Норма функционала в пространствах l_p^n, $l_{p.}$. Тема 2. Норма линейного функционала в $L_p(a,b)$, $C[a,b]$.	1. Выполнение практических заданий 2. Опрос по результатам практических заданий

1	2	3	4
7	Линейные операторы	Тема 1. Линейные операторы Тема 2. Ограниченные операторы. Норма оператора. Тема3. Норма ограниченного оператора Тема4.Обратный оператор. Спектр, резольвента оператора Тема 5. Сопряженные операторы Тема 6. Вполне непрерывные операторы	1. Выполнение практических заданий 2. Опрос по результатам практических заданий
9	Приложения теории операторов	Тема 1. Решение интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром. Тема 2. Исследование интегральных уравнений Фредгольма с использованием альтернативы Фредгольма Тема 3. Решение интегральных уравнений при помощи резольвенты Тема 4. Метод сжимающих отображений Тема 5. Производные Фреше и Гато	1. Выполнение практических заданий 2. Опрос по результатам практических заданий

Защита лабораторной работы (ЛР), выполнение курсового проекта (КП), курсовой работы (КР), расчетно-графического задания (РГЗ), написание реферата (Р), эссе (Э), коллоквиум (К), тестирование (Т) – не предусмотрены.

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

Целью самостоятельной работы студента является углубление знаний, полученных в результате аудиторных занятий. Вырабатываются навыки самостоятельной работы. Закрепляются опыт и знания полученные во время лабораторных занятий.

№	Наименование раздела	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
1.	Тригонометрические ряды Фурье	1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной: Учебник для вузов. 5-е изд., стер. – СПб.: Издательство “Лань”, 2008. – 560 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-0136-9 2.Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие. - Лань, 2017. – 624 с. – ISBN 978-5-8114-2311-8 3. Власова Е.А., Марчевский И.К. Элементы функционального анализа: Учебное пособие. – СПб.: Издательство “Лань”, 2015. – 400 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-1958-6
2.	Интеграл Лебега	1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной: Учебник для вузов. 5-е изд., стер. – СПб.: Издательство “Лань”, 2008. – 560 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-0136-9 2. Власова Е.А., Марчевский И.К. Элементы функционального анализа: Учебное пособие. – СПб.: Издательство “Лань”, 2015. – 400 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-1958-6 3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009. – 572 с. – ISBN 978-5-9221-0266-7
3.	Пространства Лебега	1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной: Учебник для вузов. 5-е изд., стер. – СПб.: Издательство “Лань”, 2008. – 560 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-0136-9 2. Власова Е.А., Марчевский И.К. Элементы функционального анализа: Учебное пособие. – СПб.: Издательство “Лань”, 2015. – 400 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-1958-6 3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009. – 572 с. – ISBN 978-5-9221-0266-7
4.	Линейные нормированные пространства	1. Власова Е.А., Марчевский И.К. Элементы функционального анализа: Учебное пособие. – СПб.: Издательство “Лань”, 2015. – 400 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-1958-6 2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа : Учебное пособие. 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство

		"Лань", 2009. – 272 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-0976-1 3. Гуревич А.П., Корнев В.В., Хромов А.П. Сборник задач по функциональному анализу: Учебное пособие. 2-е изд., испр.. – СПб.: Издательство "Лань", 2012. – 192 с. : ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-1274-7
5.	Евклидовы пространства	1. Власова Е.А., Марчевский И.К. Элементы функционального анализа: Учебное пособие. – СПб.: Издательство "Лань", 2015. – 400 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-1958-6 2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа : Учебное пособие. 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство "Лань", 2009. – 272 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-0976-1 3. Гуревич А.П., Корнев В.В., Хромов А.П. Сборник задач по функциональному анализу: Учебное пособие. 2-е изд., испр.. – СПб.: Издательство "Лань", 2012. – 192 с. : ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-1274-7
6.	Линейные функционалы	1. Власова Е.А., Марчевский И.К. Элементы функционального анализа: Учебное пособие. – СПб.: Издательство "Лань", 2015. – 400 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-1958-6 2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа : Учебное пособие. 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство "Лань", 2009. – 272 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-0976-1 3. Гуревич А.П., Корнев В.В., Хромов А.П. Сборник задач по функциональному анализу: Учебное пособие. 2-е изд., испр.. – СПб.: Издательство "Лань", 2012. – 192 с. : ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-1274-7
7.	Линейные операторы	1. Власова Е.А., Марчевский И.К. Элементы функционального анализа: Учебное пособие. – СПб.: Издательство "Лань", 2015. – 400 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-1958-6 2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа : Учебное пособие. 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство "Лань", 2009. – 272 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-0976-1 3. Гуревич А.П., Корнев В.В., Хромов А.П. Сборник задач по функциональному анализу: Учебное пособие. 2-е изд., испр.. – СПб.: Издательство "Лань", 2012. – 192 с. : ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-1274-7
8.	Приложения теории операторов	1. Власова Е.А., Марчевский И.К. Элементы функционального анализа: Учебное пособие. – СПб.: Издательство "Лань", 2015. – 400 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-1958-6

		2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа : Учебное пособие. 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство “Лань”, 2009. – 272 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-0976-1 3. Гуревич А.П., Корнев В.В., Хромов А.П. Сборник задач по функциональному анализу: Учебное пособие. 2-е изд., испр.. – СПб.: Издательство “Лань”, 2012. – 192 с. : ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-1274-7

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

–в печатной форме увеличенным шрифтом,

– в форме электронного документа,

Для лиц с нарушениями слуха:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа,

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

3. Образовательные технологии.

С точки зрения применяемых методов используются как традиционные информационно-объяснительные лекции, так и интерактивная подача материала с мультимедийной системой. Компьютерные технологии в данном случае обеспечивают возможность разнопланового отображения алгоритмов и демонстрационного материала. Такое сочетание позволяет оптимально использовать отведенное время и раскрывать логику и содержание дисциплины.

Лекции представляют собой систематические обзоры тем функционального анализа. Лабораторное занятие позволяет научить студента применять теоретические знания при решении и исследовании конкретных задач. Лабораторные занятия проводятся в традиционных аудиториях. Подход разбора конкретных ситуаций широко используется как преподавателем, так и студентами при проведении анализа результатов самостоятельной работы. Это обусловлено тем, что в процессе исследования часто встречаются задачи, для которых единых подходов не существует. Каждая конкретная задача при своем исследовании имеет множество подходов, а это требует разбора и оценки целой совокупности конкретных ситуаций.

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья предусмотрена организация консультаций с использованием электронной почты.

4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля.

Текущий контроль знаний студентов представляет собой:

– выполнение домашних заданий;
– выполнение самостоятельной работы;
– проведение контрольных работ.

Образец заданий для текущего контроля успеваемости.
5-й семестр

1.Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, определенную на отрезке $[-\pi, \pi]$.
2.Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$, определенную на отрезке $[-1,1]$.
3.Разложить в ряд Фурье а) по синусам, б) по косинусам функцию $f(x) = \pi - 2x$, определенную на отрезке $[0, \pi]$.
4. Разложить в ряд Фурье а) по синусам , б) по косинусам функцию$f(x) = x^2$, определенную на отрезке $[0,1]$.
5. Как следует продолжить абсолютно интегрируемую на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функцию, на отрезок $[-\pi,\ \pi]$, чтобы ее ряд Фурье имел вид $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1)x$?
6.Может ли множество, имеющее хотя бы одну внутреннюю точку, иметь нулевую меру?
7.Построить для любого $\alpha \in (0,1)$ замкнутое подмножество X отрезка$[0,1]$ без внутренних точек такое, что $m(X) = \alpha$.
8. Пусть X – множество чисел из отрезка $[0,1]$, в десятичной записи которых отсутствует цифра 8. Найти $m(X)$.
9. Являются ли функции $f(x)$ и $f^3(x)$ измеримыми одновременно? А функции $f(x)$ и $f^2(x)$?
10. Вычислить интеграл Лебега $\int_0^1 f(x)dx$, где

a) $f(x) = \begin{cases} x^2\ , \text{для всех иррациональных } x, \text{больших, чем } \frac{1}{3}, \\ x^3, \text{для всех иррациональных } x, \text{меньших, чем } \frac{1}{3}, \\ 0, \text{если } x \in (0,1) \cap Q. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{если } x \in [0,1] \backslash Q, \\ 1, \text{если } x \in Q. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x,\ \text{ если } x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right] \backslash D, \\ \cos \pi x, \text{если } x \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right) \backslash D, \\ x^2,\ \text{ если } x \in D, \end{cases}$

где D – канторово множество.
12. Привести пример функции $x(t)$, такой, что $x \in L_1[0,\ 1] \backslash L_2[0,\ 1]$.
13. Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние на множестве $\mathbb{R}$:
1) $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$; 2)$\rho(x,y) = |\sin(x-y)|$; 3) $\rho(x-y) = (x-y)^2$;
4) $\rho(x,y) = |arctgx - arctgy|$; 5) $\rho(x,y) = arctg|x-y|$; 6) $\rho(x,y) = |x^2 - y^2|$;
7) $\rho(x,y) = ln(1+|x-y|)$; 8) $\rho(x,y) = e^{|x-y|} - 1$; 9) $\rho(x,y) = |x^3 - y^3|$;
10) $\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$; $\rho(x,y) = cos^2(x-y)$?
14) Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние на множестве $\mathbb{R}^n$:

1) $\rho(x,y) = \max_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|$; 2) $\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$;
3) $\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2$; 4) $\rho(x,y) = \max_{1 \le k \le n-1} |x_k - y_k|$;
5) $\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n} k|x_k - y_k|$; 6) $\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| lnk$?
15) Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние в классе функций, непрерывных на отрезке $[0,\ 1]$:

1) $\rho(x,y)=\max_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|$; 2) $\rho(x,y)=sup\frac{1}{t}\int_0^t|x(\tau)-y(\tau)|\,d\tau,\ \ t\in(0,1]$;

3) $\rho(x,y)=\sqrt{\int_0^1|x(t)-y(t)|\,dt}$; 4) $\rho(x,y)=\max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]}|x(t)-y(t)|+\int_{\frac{1}{2}}^1|x(\tau)-y(\tau)|\,d\tau$?

16) Какие из приводимых ниже функций определяют расстояние в классе функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,\ 1]$:

1) $\rho(x,y)=\max_{t\in[0,1]}|x'(t)-y'(t)|$;
2) $\rho(x,y)=|x(0)-y(0)|+\max_{t\in[0,1]}|x'(t)-y'(t)|$;
3) $\rho(x,y)=\max_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|+\max_{t\in[0,1]}|x'(t)-y'(t)|$;
4) $\rho(x,y)=\max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]}|x(t)-y(t)|+\max_{t\in\left[\frac{1}{2},1\right]}|x'(t)-y'(t)|$?

17) Найти расстояние между функциями $x(t)=\sin 2t$ и$\cos 2t$ в пространстве 1) $C[0,\pi]$; 2) $C^1[0,\pi]$; 3)$L_1[0,\pi]$; 4) $L_2[0,\pi]$.

18) Найти расстояние между функциями $x(t)=t^3$ +t и y(t)= $2t^3+t^2$ в пространстве 1) $C[-1,1]$; 2) $C^1[-1,1]$; 3)$L_1[-1,1]$4) $L_2[-1,1]$.

19) Исследовать на сходимость последовательность $\{x_k\}$ в пространстве 1)l_1^n; 2)l_2^n; 3) l_∞^n:

а) $x_k=\left(\frac{1}{k},\ 0,\dots,0\right)$; б) x_k=$(e^{-2k},1,1,\dots,1)$; в)$x_k=\left(e^{-k},e^{-k^2},\dots,e^{-k^n}\right)$;

г) $x_k=(\cos k,2,2,\dots,2)$; д) $x_k=\left(k^2,\ \frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n}\right)$.

20) Исследовать на сходимость последовательность $\{x_k\}$ в пространстве 1)l_1; 2)$l_{2;}$; 3)l_∞

а) $x_k=\left(0,\dots,0,\widehat{\frac{1}{k}},0,\dots\right)$; б) $x_r=\left(0,\dots,0,\widehat{\frac{1}{k}},\frac{1}{k+1},\frac{1}{k+2},\dots\right)$; в) $x_k=\left(1,1,\dots 1,\widehat{\frac{1}{k}},\frac{1}{k+1},\frac{1}{k+2}\right)$;

г) $x_k=\left(1,\frac{1}{2},\dots,\widehat{\frac{1}{k}},0,0,\dots\right)$; д) $x_k=\left(2,2,\dots,\widehat{2},0,0,\dots\right)$; е) $x_k=\left(0,\dots,0,\widehat{3},0,\dots\right)$;

ж) $x_k=\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k+1},\dots,\widehat{\frac{1}{2k-1},\frac{1}{2k}},\dots\right)$; з)$x_k=(e^{-k},0,0,\dots,0,7,0,0\dots.)$;

и)$x_k=\left(5,0,0,\dots,0,\widehat{\frac{1}{k+1},0},0,\dots\right)$; к) $x_k=\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\dots,\widehat{\frac{1}{\sqrt{k}}},0,0,\dots\right)$.

21) Исследовать на сходимость в пространстве 1) $C[0,1]$; 2) $L_2(0,1)$ последовательность

а) $x_k(t)=t^k$; б) $x_k(t)=\sin t-\sin\frac{t}{k}$; в) $x_k(t)=\frac{kt}{\sqrt{k^2+1}}$; г) $x_k(t)=e^{-\frac{t}{k}}$;

д) $x_k(t)=t^k-t^{k+1}$; е) $x_k(t)=t^k-t^{2k}$; ж) $x_k(t)=te^{kt}$.

22) В каких пространствах $L_p[0,1]$ и к какому пределу сходятся последовательности:

а) $x_k(t)=\begin{cases}\sqrt{k}, & t\in\left[0,\frac{1}{k}\right]\\ 0, & t\in\left(\frac{1}{k},1\right]\end{cases}$; б) $x_k(t)=\begin{cases}\ln(k), t\in\left[0,\frac{1}{k}\right]\\ \quad t\in\left(\frac{1}{k,},1\right]\end{cases}$;

в) $x_k(t)=\begin{cases}e^k, t\in\left[0,\frac{1}{k}\right]\\ 0,\ \ t\in(0,1]\end{cases}$; в)$x_k(t)=\begin{cases}\sqrt[3]{k},\ t\in\left[0,\frac{1}{k}\right]\\ \frac{1}{\sqrt[3]{t}},\ t\in\left(\frac{1}{k},1\right]\end{cases}$.

23) Исследовать на сходимость в пространстве 1) $C[0,1]$; 2) $L_2(0,1)$ ряды

а) $\sum_{k=0}^\infty t^k$; б) $\sum_{k=0}^\infty(1-t)t^k$; в) $\sum_{л=0}^\infty e^{-k(t+1)}$.

24) Является ли открытым множество функций из пространства $C[0,1]$, удовлетворяющих условию:

а) $0<x(t)<1+t^2,\ t\in(0,1)$,

б) $\int_0^1|x(t)|dt<1$;

в)$\int_0^1 x(t)dt<1$;

г) $\left|x(\frac{1}{3})\right|<2$?

25. Является ли замкнутым множество функций из $C[0,1]$, удовлетворяющих условию

а) $sgnx\left(\frac{1}{2}\right)=1$;

б) sgnx(t)=1, $t \in [0,1]$?

26. Являются ли компактными, предкомпактными в $C[0,1]$ следующие семейства функций;

1) $M = \{x(t)|\ |x(0)| \le K_0, |x'(t)| \le K_1, t \in [0,1]\}$;

2) $M = \left\{x(t)||x(0)| \le K_0, \int_0^1 (x'(t))^2 dt \le K_1\right\}$;

3) $M = \{x(t)||x(t)| \le t,\ \ t \in [0;1]\}$;

4) $x_\alpha(t) = t^\alpha$, если а)$0 < \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2 < \infty$; б) $0 < \alpha_1 \le \alpha$;

5) $x_\alpha(t) = e^{(t+\alpha)}$, если а)$\alpha \in \mathbb{R}$; б) $\alpha \ge 0$; в) $\alpha \le 0$;

6) $x_\alpha(t) = \sin(\alpha t)$, если а)$\alpha \in \mathbb{R}_+$; б) $0 \le \alpha \le \alpha_2 < \infty$;

7) $x_\alpha(t) = \sin(\alpha + t)$, если а) $\alpha \in \mathbb{R}$; б)$0 < \alpha_1 < \alpha < \alpha_2 < \infty$?

27. Провести процесс ортогонализации системы функций $\{1, t, t^2, t^3\}$ в пространстве а) $L_2(-1,1)$; б)$L_2(0,1)$.

28. В пространстве l_2 найти множество векторов, ортогональных вектору x_0 , если а) $x_0 = (0,0,\dots,0,\hat{1},0,\dots)$; б) $x_0 = (0,1,0,1,\dots)$; в)$x_0 = (1,1,\dots,\hat{1},0,0,\dots)$.

29. В пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ найти проекции функций

а) $x(t) \equiv 0$; б) $x(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$; в) $x(t) = t$; г) $x(t) = \cos 2t$

на подпространство $X_0 = \{x(t) = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t\}$.

30. В пространстве $L_2[-1,1]$ найти проекции функций

а) $x(t) = t^2$; б) $x(t) = t^3$

на подпространство $X_0 = \{x(t) = c_1 + c_2 t\}$.

6 семестр

1. Какие из приведенных формул задают оператор:

1) $A[x(t)] = \max_{\tau \in \left[0,\frac{1}{2}\right]} |x(\tau)|$; $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
2) $A[x(t)] = x'(t)$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
3) $A[x(t)] = x(t+1)$, A: $C[0,\infty) \to C[0,\infty)$;
4) $A[x(t)] = tx(t)$, A: $C[0,\infty) \to C[0,\infty)$;
5) $A[x(t)] = x(0)$, A: $L_1(0,1) \to L_1(0,1)$;
6) $A[x(t)] = \frac{1}{x(t)}$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
7) $A[x(t)] = x(t-1)$, A: $C[0,\infty) \to C[0,\infty)$;
8) $A[x(t)] = \int_0^t x(t)dt$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
9) $A[x(t)] = \int_0^t x(t)dt$, A: $L[0,\infty) \to L[0,\infty)$;
10) $A[x(t)] = signx(t)$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
11) $A[x(t)] = \int_1^t x(\tau)d\tau$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
12) $A[x(t)] = \int_0^1 e^{t\tau} x(t)dt$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$;
13) $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$, $A :\ l_\infty \to l_2$;
14) $(Ax)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^2} \sin kt$, $A :\ l_\infty \to C[0,1]$;
15) $Ax = \left(x(1), x(\frac{1}{2}), x\left(\frac{1}{3}\right), \dots\right)$, $A :\ C[0,1] \to l_1$;
16) $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{2x_2}{3}, \dots\right)$, $A :\ l_\infty \to l_\infty$;
17) $Ax = (x_1, x_2^2, x_3^3, \dots)$, $A :\ l_2 \to l_2$?

2. Привести примеры нетривиальных операторов в заданных пространствах

1) $C[0,1] \to C[-1,1]$;
2) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$;
3) $l_1 \to l_2$;
4) $l_\infty \to C[0,1]$;
5) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$;
6) $l_\infty \to \mathbb{R}^2$;
7) $l_\infty \to l_1$;
8) $L_1(0,1) \to L_2(0,1)$;
9) $C(0,\ \infty) \to l_1$;
10) $L_1(0,1) \to C[0,1]$;
11) $C[0,1] \to l_\infty$
12) $C[0,1] \to C[1,3]$;
13) $C^1[0,1] \to l_2$.

3. Какие из приведенных ниже операторов являются линейными?

1) $A[x(t)] = 3x(t) + t, \quad A : C[0,1] \to C[0,1]$;
2) $A[x(t)] = \int_0^{\frac{1}{3}}(t^3 + \tau^3)x(\tau)d\tau, A : C[0,1] \to C[0,1]$;
3) $A[x(t)] = \cos 2x(t),\ A : C[0,1] \to C[0,1]$;
4) $A[x(t)] = tx(t^2),\ \ A : C[0,1] \to C[0,1]$;
5) $A[x(t)] = |x(t)|,\ \ A : C[0,1] \to C[0,1]$;
6) $A[x(t)] = \int_0^1 e^{\tau t}\, d\tau,\ \ A : C[0,1] \to C[0,1]$;
7) $(Ax)(t) = \cos(tx_2),\ \ A\ : \mathbb{R}^2 \to C(-\infty,\infty)$;
8) $(Ax)(t) = 4x_1^2 t + 3x_2 t^2,\ \ A\ : \mathbb{R}^2 \to C(-\infty,\infty)$;
9) $(Ax)(t) = x_1 \sin t - 3x_2\sqrt[3]{t},\ \ A\ : \mathbb{R}^2 \to C(-\infty,\infty)$;

4. Проверить линейность и ограниченность функционалов и найти их нормы в l_1, l_2, l_∞:
   1) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}$; 2) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x_k$; 3) f(x)=$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k x_k}{k!}$.

5. Найти норму линейного функционала а) в $C[0,1]$, б) в $L_1[0,1]$, в) в $L_2[0,1]$, заданного выражением $\int_0^1 h(t)x(t)dt$, если функция $h(t)$ равна:
   1) $\begin{cases}-3, & 0 \le t \le 0{,}6,\\ 0{,}2, & 0{,}6 < t \le 1;\end{cases}$
   2) $\ln\,(t + \frac{1}{4})$;
   3) $2t - 1$;
   4) $t^4 - 1$;
   5) $\sin\left(\pi\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)$;
   6) $e^t - 3$;
   7) $t^2 + 3t - 2$;
   8) $\cos 2\pi t$;
   9) $t^3 - \frac{1}{9}$;
   10) $\cos\left(t - \frac{1}{2}\right)$;
   11) $t^3 - t$;
   12) $t^2 - 4t + \frac{1}{3}$;
   13) $\cos \pi t$;
   14) 2-$\sin \pi t$;
   15) $\sqrt{t+4}$;
   16) $\sqrt{t^2 - t + 6}$;
   17) e^{2t} -3;
   18) $ch 2t$.

6. Найти нормы следующих операторов.
   1) $A[x(t)] = \int_1^t x(\tau)d\tau, A \in \mathcal{L}(C[0,1])$;
   2) $A[x(t)] = x'(t),\ \ A \in \mathcal{L}(C^1[0,1], C[0,1])$;
   3) $A[x(t)] = t^2 x(t),\ A \in \mathcal{L}(L_2[0,1])$;
   4) $A[x(t)]$=$e^{t+1}x(t),\ A \in \mathcal{L}(C[0,1])$;
   5) $A[x(t)]$=$\frac{t}{t+1}x(t),\ \ A \in \mathcal{L}(C[0,\infty))$;
   6) $A[x(t)]$=$\int_0^t x(\tau)\sin\tau d\tau, A \in \mathcal{L}(C[0,1])$;

7) $A[x(t)]=t^2x(0)-tx\left(\frac{1}{2}\right)$, $A\in\mathcal{L}(C[0,1])$;
8) $A[x(t)]=\mathrm{x}(t^4)$, $A\in\mathcal{L}(C[0,1])$;
9) $A[x(t)]=(t^2+2)x(0)$, $A\in\mathcal{L}(C[0,1])$;
10) $A[x(t)]=\mathrm{t}\int_0^1 x(t)dt$, $A\in\mathcal{L}(L_2[0,1])$;
11) $A[x(t)]=\int_0^\pi (2t+\tau^2)x(\tau)d\tau$, $A\in\mathcal{L}(L_1[0,\pi])$;
12) $A[x(t)]=\int_0^\pi (t-\tau+1)x(\tau)d\tau$, $A\in\mathcal{L}(L_1[0,\pi],C[0,\pi])$;
13) $A[x(t)]=\int_0^\pi (\sin t+2\cos\tau)x(\tau)d\tau$, $A\in\mathcal{L}(C[0,\pi],L_1[0,\pi])$;
14) $A[x(t)]=\int_0^\pi (2t-\tau)^2x(\tau)d\tau$, $A\in\mathcal{L}(L_2[0,\pi])$;
15) $Ax=\left(-x_1,\frac{x_2}{2},-\frac{x_3}{3},\dots\right)$, $A\in\mathcal{L}(l_1)$;
16) $Ax=\left(\frac{x_2}{2},\frac{2x_3}{3},\frac{3x_4}{4},\dots\right)$, $A\in\mathcal{L}(l_1)$;
17) $Ax=(x_1,x_3,x_2+x_5)$, $A\in\mathcal{L}(l_\infty,\mathbb{R}^3)$.

7. Найти оператор, сопряженный оператору $A\in\mathcal{L}(l_2)$:
1) $Ax=(x_1,\dots,x_n,0,0,\dots)$
2) $Ax=(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\dots,\lambda_nx_n,\dots)$, $\{\lambda_n\}\in l_\infty$;
3) $Ax=(0,x_1,x_2,\dots)$;

4) $Ax=(x_2,x_3,\dots)$;

5) $Ax=(5x_1-2x_2,x_3,\ x_4,\dots)$.

8. Найти оператор, сопряженный оператору $A\in\mathcal{L}(L_2[0,1])$, $A[x(t)]=\int_0^1 K(t,s)x(s)ds$, если функция $K(t,s)$имеет вид:
1) 1;
2) t;
3) s;
4) t-s;
5) t+sin $2s$;
6) $|2\pi-2s|\sin 4t$;
7) $2t$−3s;
8) te^{-s}
9) $t(e^{3s}-\frac{1}{5})$;
10) $\frac{1+s}{1+t}$;
11) $\sin(t-2s)$;
12) $e^{t-s}\cos\left(t^3-\sqrt{s}\right)$;
13) $t\sin s-s^2\cos t$.

9. Исследовать обратимость оператора $A\in\mathcal{L}(l_p)$, заданного бесконечной матрицей (a_n), если:
1) $a_n=1+(-1)^n$; 2) $a_n=\frac{1}{n}$; 3) $\frac{1}{3}\le|a_n|\le 4$.
10. Исследовать обратимость оператора $A\in\mathcal{L}(C[0,1])$, заданного соотношением: $A[x_0(t)]=x_0(t)x(t)$, где

1) $x_0(t)=(t-c)-|t-c|$, $c\in(a,b)$; 2) $x_0(t)=(t-c)$, $c\in(a,b)$;

2) $x_0(t)=1+t^2$.
11. Исследовать обратимость оператора $A\in\mathcal{L}(C[0,1])$:
1) $A[x(t)]=\int_0^t x(s)ds$;
2) $A[x(t)]=\int_0^1 tsx(s)ds$;
3) $A[x(t)]=\mathrm{x(t)}-\int_0^t x(s)ds$;
4) $A[x(t)]=\mathrm{x}(t)-\int_0^1 x(s)ds$;

5) $A[x(t)]=x(t)-\int_0^1 sx(s)ds$.

Если оператор А обратим, то найти его обратный.

12. Какие из операторов $A\in\mathcal{L}(l_2)$ вполне непрерывны:

1) $Ax=(0,x_1,x_2,\dots)$, 2) $Ax=(x_2,x_3,,\dots)$, 3) $Ax=\left(\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\dots\right)$,

13. Какие из операторов $A\in\mathcal{L}(C[0,1])$ вполне непрерывны:

1) $A[x(t)]=\int_0^t x(s)ds$;
2) $A[x(t)]=(t+2)x(t)$;
3) $A[x(t)]=x(0)\cos(2t)-x(1)\sin(2t)$;
4) $A[x(t)]=\int_0^t e^{ts}x(s)ds$;
5) $A[x(t)]=x(t^2)$.

14. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $A\in\mathcal{L}(l_\infty)$:

1) $Ax=(x_1+x_2,x_2,\dots,x_n,\dots)$; 2) $Ax=(x_3,x_1,x_2,\dots,x_{n,\dots})$;
3) $Ax=(-x_1,x_2,\dots,(-1)^n x_n,\dots)$; 4) $Ax=(x_1,x_2,\dots,x_n,0,\dots)$;
5) $Ax=(0,0,\dots,0,x_n,0,,\dots)$; 6) $Ax=\left(\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\dots\right)$;
7) $Ax=(0,x_1,x_2,\dots,x_{n,\dots})$; 8) $Ax=(x_2,x_3,,\dots)$.

15. Найти спектр и спектральный радиус оператора $A\in\mathcal{L}(C[0,1])$:

1) $A[x(t)]=\int_0^t x(s)ds$; 2) $A[x(t)]=(t+2)x(t)$; 3) $A[x(t)]=tx(t)$;
4) $A[x(t)]=\int_0^1 tsx(s)ds$; 5) $A[x(t)]=\int_0^1 (t+s)x(s)ds$.

16. Решить уравнение при заданных значениях свободного члена $f(t)$:

1) $x(t)=\frac{1}{3}\int_0^1 x(s)ds+f(t)$, а) $f(t)=1$, б) $f(t)=t$, в) $f(t)=1-t$;
2) $x(t)=\int_0^1 tsx(s)ds+f(t)$, а) $f(t)=t$, б) $f(t)=t^2$, в) $f(t)=t-t^2$;
3) $x(t)=\int_0^\pi \cos s\, x(s)ds+f(t)$, а) $f(t)=\sin t$, б) $f(t)=\cos t$;
4) $x(t)=\int_0^\pi \sin t\cos s\, x(s)ds+f(t)$, а) $f(t)=\sin t$, б) $f(t)=\cos t$;
5) $x(t)=\int_{-1}^1 (ts+t^2s^2)x(s)ds+f(t)$, а) $f(t)=1$, б) $f(t)=t^2+t$;
6) $x(t)=\int_0^{2\pi}\cos(t-s)\,x(s)ds+f(t)$, а) $f(t)=\sin t$, б) $f(t)=\cos t$.

4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации.

Промежуточный контроль осуществляется в конце каждого семестра в форме экзамена.

Примерный перечень вопросов для подготовки к экзамену.

Примерный перечень вопросов для подготовки к экзамену по Функциональному анализу, 5 семестр.

1.Периодические величины. Гармонический анализ. Понятие ряда. Коэффициенты Фурье.
2.Интеграл Дирихле.
3.Лемма Римана. Следствие из неё.
4.Принцип локализации.
5.Признаки Дини и Липшица сходимости ряда Фурье в точке.
6.Разложение в ряд Фурье для произвольного промежутка.
7. Разложение в ряд Фурье непериодической функции.

8. Разложение в ряд Фурье только по синусам и только по косинусам.
9.Необходимость обобщения понятия интеграла Римана.
10.Множества точек. Понятие меры. Свойства меры.
11.Множество меры ноль. Определения, примеры.
12.Измеримые функции. Теорема об эквивалентных определениях измеримой функции.
13.Свойства измеримых функций.
14.Интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции, понятие. Теорема о существовании интеграла Лебега. Сравнение с интегралом Римана.
15.Интеграл Лебега по произвольному измеримому множеству. Свойства 1-5.
16.Свойства 6-9 интеграла Лебега.
17.Интеграл Лебега от неограниченной функции.
18.Понятие $L_p[a, b]$. Теорема о вложении пространств.
19.Линейность пространств $L_p[a, b]$.
20.Неравенство Гёльдера.
21.Неравенство Минковского.
22.Линейные пространства. Определения. Примеры. Изоморфизм.
23.Линейная зависимость. Базис. Размерность. Фактор-пространство.
24.Теорема о размерности фактор-пространства.
25.Линейные нормированные пространства. Определение. Примеры.
26.Предел последовательности в ЛНП.
27.Свойства пределов. Задачи.
28.Открытые и замкнутые множества в L. Предельная точка. Теорема.
29.Эквивалентные нормы. Теорема об эквивалентных нормах в конечномерном пространстве.
30.Расстояние от точки до подпространства. Лемма Рисса о почти перпендикуляре.
31.Фундаментальность в линейном нормированном пространстве. Понятия. Свойства
32.Банаховые пространства. Понятия. Примеры.
33.Пример неполного нормированного пространства.
34.Ряды в нормированных пространствах: сходимость, критерий Коши, абсолютная сходимость.
35.Принцип вложенных шаров.
36.Теорема Бэра.
37.Компактные множества в нормированных пространствах, ограниченность и замкнутость компактного множества.
38.Предкомпактные множества. Связь с компактными множествами.
39.Критерий Хаусдорфа предкомпактности множества нормированных пространств.
40.Компактность и конечномерность. Теорема о конечномерности локально-компактного пространства.
41.Теорема Арцела.
42.Банаховые пространства со счетным базисом. Понятие. Примеры.
43.Определение и примеры сепарабельных нормированных пространств.

Примерный перечень вопросов для подготовки к экзамену по Функциональному анализу, 6 семестр

1.Определение гильбертова пространства. Примеры.

2. Ортогональность в гильбертовом пространстве.Теорема об однозначном представлении вектора в виде суммы его проекций на ортогональные подпространства.

3. Лемма об ортогональных подпространствах.

4.Ортонормированные системы в гильбертовых пространствах.Существование ортонормированного базиса в сепарабельном H-пространстве.

5.Ряды Фурье в H-пространстве.Экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье.

6. Полнота и замкнутость ортонормированной системы в H-пространстве.

7. Теорема Рисса-Фишера в H-пространстве.

8. Изоморфизм H-пространств.

9.Линейные функционалы в ЛНП . Определение. Теорема о коразмерности ядра линейного функционала.

10. Теорема Хана-Банаха в линейном пространстве.

11. Линейные непрерывные функционалы в ЛНП.Непрерывность и ограниченность линейного функционала в ЛНП.

12. Теорема Хана-Банаха в ЛНП.

13. Сопряженное пространство L^*.Теорема о полноте L^*.

14.Слабая сходимость в ЛНП.

15.Теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в H-пространстве.

16. Линейный оператор в линейном пространстве. Понятие, примеры.

17. Линейный непрерывный оператор в ЛНП. Непрерывность и ограниченность .

18.Норма линейного оператора. Свойства, примеры.

19. Равномерная сходимость линейных операторов. Теоремы о равномерной сходимости в единичном круге. Следствие. Полнота пространства $\mathcal{L}(L, L_1)$.

20.Сильная сходимость в $\mathcal{L}(L, L_1)$.Примеры.

21. Принцип равномерной ограниченности.

22. Теорема Банаха-Штейнгауза.

23. Обратный оператор. Определение. Теорема о линейности оператора A^{-1}.

24. Достаточное условие ограниченной обратимости линейного оператора.

25. Теорема о существовании оператора $(I + A)^{-1}$.

26.Теорема об ограниченной обратимости оператора, близкого к ограниченно обратимому.

27. Регулярное множество, спектр и резольвента линейного оператора. Спектральный радиус.

28.Понятие сопряженного оператора. Теорема о его представлении в H-пространстве.

29. Теорема о линейности и непрерывности сопряженного оператора.

30.Самосопряженные операторы. Свойства.

31.Определение и простейшие свойства компактных операторов.

32. Теорема о структуре компактного оператора.

33. Первая теорема Фредгольма.

34. Вторая теорема Фредгольма.

35. Третья теорема Фредгольма.

36. Решение интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода при малых μ.

37. Применение теорем Фредгольма к решению интегральных уравнений Фредгольма.

38. Принцип сжимающих отображений.

39. Приложения принципа сжимающих отображений к решению систем линейных уравнений.

39. Применение принципа сжимающих отображений к решению интегральных уравнений.

40. Производная по Гато.

41. Производная Фреше.

Критерии выставления оценок.

Оценка «отлично»:

– систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины, а также по основным вопросам, выходящим за пределы учебной программы;

– точное использование научной терминологии систематически грамотное и логически правильное изложение ответа на вопросы;

– безупречное владение инструментарием учебной дисциплины, умение его эффективно использовать в постановке научных и практических задач;

– выраженная способность самостоятельно и творчески решать сложные проблемы и нестандартные ситуации;

– полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной учебной программой по дисциплине;

– умение ориентироваться в теориях, концепциях и направлениях дисциплины и давать им критическую оценку, используя научные достижения других дисциплин;

– творческая самостоятельная работа на практических/семинарских/лабораторных занятиях, активное участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий;

– высокий уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.

Оценка «хорошо»:

– достаточно полные и систематизированные знания по дисциплине;

– умение ориентироваться в основном теориях, концепциях и направлениях дисциплины и давать им критическую оценку;

– использование научной терминологии, лингвистически и логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;

– владение инструментарием по дисциплине, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;

– усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной учебной программой по дисциплине;

– самостоятельная работа на практических занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий;

– средний уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.

Оценка «удовлетворительно»:

– достаточный минимальный объем знаний по дисциплине;

– усвоение основной литературы, рекомендованной учебной программой;

– умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по дисциплине и давать им оценку;

– использование научной терминологии, стилистическое и логическое изложение ответа на вопросы, умение делать выводы без существенных ошибок;

– владение инструментарием учебной дисциплины, умение его использовать в решении типовых задач;

– умение под руководством преподавателя решать стандартные задачи;

– работа под руководством преподавателя на практических занятиях, допустимый уровень культуры исполнения заданий;

– достаточный минимальный уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.

Оценка «неудовлетворительно»:

– фрагментарные знания по дисциплине;

– отказ от ответа (выполнения письменной работы);

– знание отдельных источников, рекомендованных учебной программой по дисциплине;

– неумение использовать научную терминологию;

– наличие грубых ошибок;

– низкий уровень культуры исполнения заданий;

–низкий уровень сформированности заявленных в рабочей программе компетенций.

Оценочные средства для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбираются с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

– при необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене;

– при проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями;

– при необходимости для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

– в печатной форме увеличенным шрифтом,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями слуха:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

– в печатной форме,

– в форме электронного документа.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся

.

5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля).

5.1 Основная литература:

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной: Учебник для вузов. 5-е изд., стер. – СПб.: Издательство “Лань”, 2008. – 560 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-0136-9

2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа : Учебное пособие. 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство “Лань”, 2009. – 272 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-0976-1

3. Власова Е.А., Марчевский И.К. Элементы функционального анализа: Учебное пособие. – СПб.: Издательство “Лань”, 2015. – 400 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-1958-6

4. Гуревич А.П., Корнев В.В., Хромов А.П. Сборник задач по функциональному анализу: Учебное пособие. 2-е изд., испр.. – СПб.: Издательство “Лань”, 2012. – 192 с. : ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-1274-7

Для освоения дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья имеются издания в электронном виде в электронно-библиотечных системах .

5.2 Дополнительная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009. – 572 с. – ISBN 978-5-9221-0266-7

2 Треногин В.А. Функциональный анализ: Учебник. – 4-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с. – ISBN 978-5-9221-0804-1

3.Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие. - Лань, 2017. – 624 с. – ISBN 978-5-8114-2311-8

6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Википедия, свободная энциклопедия. [Электронный ресурс]. – http://ru.wikipedia.org
2. Каталог информационной системы «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». [Электронный ресурс]. – http://window.edu.ru/window/catalog
3. Экспонента, образовательный математический сайт. [Электронный ресурс]. – http://www.exponenta.ru

4. http://allmath.ru (Вся математика в одном месте)

7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной теоретический материал, лабораторных занятий, позволяющих студентам в полной мере ознакомиться с разделами функционального анализа и освоиться в решении практических задач.

Важнейшим этапом курса является самостоятельная работа по дисциплине «Функциональный анализ».

Целью самостоятельной работы бакалавра является углубление знаний, полученных в результате аудиторных занятий. Вырабатываются навыки самостоятельной работы. Закрепляются опыт и знания, полученные во время лабораторных занятий.

Самостоятельная работа студентов в ходе изучения дисциплины состоит в выполнении индивидуальных заданий, задаваемых преподавателем, ведущим лабораторные занятия, подготовки теоретического материала к лабораторным занятиям, на основе конспектов лекций и учебной литературы, согласно календарному плану и подготовки теоретического материала к тестовому опросу, зачету и экзамену, согласно вопросам к экзамену.

Указания по оформлению работ:

- работа на лабораторных занятиях и конспекты лекций могут выполняться на отдельных листах либо непосредственно в рабочей тетради;
- оформление индивидуальных заданий желательно на отдельных листах.

Проверка индивидуальных заданий по темам, разобранным на лабораторных занятиях, осуществляется через неделю на текущем лабораторном занятии, либо в течение недели после этого занятия на консультации.

Для разъяснения непонятных вопросов лектором и ассистентом еженедельно проводятся консультации, о времени которых группы извещаются заранее.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

8.1 Перечень информационных технологий.

Информационные технологии – не предусмотрены.

8.2 Перечень необходимого программного обеспечения.

Программное обеспечение - не предусмотрено.

8.3 Перечень информационных справочных систем:

1. Справочно-правовая система «Консультант Плюс» (http://www.consultant.ru)
2. Электронная библиотечная система eLIBRARY.RU (http://www.elibrary.ru)
3. Электронная библиотечная система «Университетская библиотека ONLINE» (http://www.biblioclub.ru)

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины и оснащенность
1.	Лекционные занятия	Лекционная аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, ноутбук) и соответствующим программным обеспечением (ПО): А305.
2.	Лабораторные занятия	Аудитория, оснащенная учебной мебелью (столы, стулья), соответствующей количеству студентов: 133.
3.	Групповые (индивидуальные) консультации	Аудитория А305.
4.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Аудитория А305.
5.	Самостоятельная	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный

	работа	компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета: 105.

.