

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кубанский государственный университет»
Факультет Математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе,
качеству образования – первый
проректор

_____ Иванов А.Г.
подпись

« _____ » _____ 2017г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б.1.Б15. КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Направление подготовки 01.03.01 Математика
Направленность (профиль) / специализация: общий

Программа подготовки:

Форма обучения очная

Квалификация выпускника - Бакалавр

Краснодар 2017

Рабочая программа дисциплины «Комплексный анализ» разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению подготовки 01.03.01 Математика, профиль: общий

Программу составил

Н.Н. Мавроди, доцент, канд. физ.-мат. наук

Рабочая программа дисциплины «Комплексный анализ» утверждена на заседании кафедры Теории функций

протокол № _____ « ____ » _____ 2017г.

Заведующий кафедрой (выпускающей) В.А. Лазарев

подпись

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры Теории функций протокол № 1. 9 сентября 2017г,

Заведующий кафедрой (выпускающей) В.А. Лазарев

подпись

Утверждена на заседании учебно-методической комиссии факультета математики и компьютерных наук

протокол № 1. 9 сентября 2017г,

Председатель УМК факультета Титов Г.Н.

подпись

Рецензенты:

В.В. Горяйнов, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики Волжского гуманитарного института ФГБОУ ВПО ВолГУ

1. Цели и задачи изучения дисциплины.

1.1. Цель дисциплины

Главная цель курса – освоение методов исследования функций комплексного переменного и приложений этих методов к решению задач комплексного и вещественного анализа.

1.2. Задачи дисциплины

- обобщить и систематизировать знания о свойствах и особенностях голоморфных (аналитических) функций, их аналитическом продолжении, рядах голоморфных функций, теории интеграла Коши, гармонических функций, геометрических принципах конформных отображений и возможностях применений этих знаний;
- сформировать навыки построения конформных отображений с помощью элементарных функций и применения принципа симметрии, определения характера особенностей функции, применения теории вычетов к вычислению некоторых типов определенных интегралов.
- научить применять методы комплексного анализа для решения прикладных задач.

1.3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Комплексный анализ» относится к базовой части профессионального цикла Б1, являющегося структурным элементом ООП ВО. Дисциплина читается в 4 и 5-м семестрах. Знания, полученные в этом курсе, используются в математическом анализе, функциональном анализе, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнениях, уравнениях математической физики, теории чисел, методах оптимизации и др. Слушатели должны владеть математическими знаниями в рамках разделов программы учебного курса по математическому анализу, которые изучаются 1–3 семестрах для направлений подготовки 01.03.01 Математика.

1.4. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у обучающихся следующих общепрофессиональных, профессиональных компетенций (ОПК, ПК): ОПК-1, ОПК-3, ПК-2, ПК-3.

№ п. п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
1.	ОПК-1	Готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной	основные понятия и теоремы комплексного анализа и способы их применения в других областях знаний	• производить арифметические операции над комплексными числами, используя различные формы представления комплексных чисел, их геометрическую интерпретацию; • определять разными способами дифференцируемость в смысле комплексного анализа и голоморфность (аналитичность) комплекснозначных функций двух вещественных переменных;	навыками практического использования методов и результатов комплексного анализа при решении различных задач.

№ п. п.	Индекс компе- тенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
		геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности		• вычислять значения в точке элементарных функций комплексного переменного; • определять конформность в точке отображения, осуществляемого голоморфной функцией, и применять знания о геометрическом смысле модуля и аргумента производной; • решать задачи комплексного анализа, а также применять знания комплексного анализа при решении задач других дисциплин.	
2.	ПК-2	способностью математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики	• Различные формы представления комплексных чисел, определения и свойства операций над ними, их геометрическую интерпретацию, основные понятия топологии комплексной плоскости. • Эквивалентные определения понятия голоморфности функции комплексного переменного. • Понятие конформного отображения, геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции.	• использовать аналитическое представление и геометрические свойства отображений, осуществляемых элементарными функциями комплексного переменного, для построения конформных отображений и отыскания образа области при заданном конформном отображении; • осуществлять элементарные геометрические преобразования на плоскости с использованием дробно-линейных отображений; • вычислять криволинейные интегралы от функций комплексного переменного; • восстанавливать голоморфную функцию по ее вещественной или мнимой части; • находить коэффициенты разложения в ряд	навыками корректной и адекватной постановки задач используя методы комплексного анализа

№ п. п.	Индекс компе- тенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
			• Определения и геометрические свойства элементарных функций комплексного переменного. • Интегральную теорему Коши для односвязной и многосвязной области, интегральную формулу Коши. • Определение и свойства интеграла типа Коши. • Свойства степенных рядов и равномерно сходящихся рядов голоморфных функций. • Внутреннюю теорему единственности и принцип максимума модуля для голоморфных функций. • Разные способы классификации изолированных особых точек голоморфных функций. • Характер поведения функции в окрестности существенно особой точки (теорему Сохоцкого – Вейерштрасса). • Понятие вычета и способы применения вычетов для вычисления криволинейных и несобственных интегралов. • Принцип аргу-	Тэйлора голоморфных функций и ради-ус сходимости степенного ряда; • находить коэффициенты разложения в ряд Лорана функций, голоморфных в кольце, и, в частности, в окрестности изолированной особой точки (м.б. бесконечно удаленной); • использовать приемы разложения в ряд Лорана голоморфных функций для разложения в ряд Фурье функций вещественного переменного; • определять разными способами характер изолированной особой точки голоморфной функции, определять порядок нуля и порядок полюса; • разными методами вычислять вычеты голоморфных функций в изолированных особых точках; • находить значения криволинейных интегралов с помощью вычетов; • вычислять некоторые типы определенных (в том числе несобственных) интегралов с помощью вычетов; • применять принцип аргумента и теорему Руше для определения соотношения между нулями и полюсами функции в области; • применять принцип симметрии для построения конформных отображений; • определять однозначные ветви многозначной функции и строить риманову поверхность многозначной функции. • применять конформные	

№ п. п.	Индекс компе- тенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
			мента и теорему Руше. • Понятие аналитического продолжения по цепи областей и вдоль кривой, понятие полной аналитической функции и ветви аналитической функции, понятие римановой поверхности полной аналитической функции. • Теорема о монодромии. • Принцип симметрии Римана – Шварца. • Геометрические принципы конформных отображений (принцип сохранения области, принцип взаимно-однозначного соответствия, теорема Римана, принцип граничного соответствия). • Понятие гармонической функции, свойства гармонических функций, интегралы Пуассона и Шварца, применение конформных отображений для решения задачи Дирихле.	отображения для решения задачи Дирихле.	

№ п. п.	Индекс компе- тенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	уметь	владеть
3.	ПК-3	способность строго доказы- вать утвер- ждение, сформулиро- вать резуль- тат, увидеть следствия по- лученного ре- зультата	формулировки и доказательства утверждений, ме- тоды их доказа- тельства	доказывать утверждения комплексного анализа; формулировать следствия этих утверждений; решать задачи математического анализа	методами доказа- тельства утвер- ждений
4.	ОПК-3	способность к самостоятель- ной научно- исследова- тельской ра- боте	формулировки и доказательства утверждений, ме- тоды их доказа- тельства	доказывать утверждения комплексного анализа; формулировать следствия этих утверждений; решать задачи математического анализа	методами доказа- тельства утвер- ждений

2. Структура и содержание дисциплины

2.1 Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 7 зач.ед. (252 часа), их распределение по видам работ представлено в таблице
(для студентов ОФО).

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры (часы)	
		4	5
Контактная работа, в том числе:	128,5	72,2	56,3
Аудиторные занятия (всего):	118	64	54
Занятия лекционного типа	50	32	18
Лабораторные занятия	68	32	36
Занятия семинарского типа (семинары, практи- ческие занятия)	-	-	-
Иная контактная работа:	10,5	8,2	2,3
Контроль самостоятельной работы (КСР)	10	8	2
Промежуточная аттестация (ИКР)	0,5	0,2	0,3
Самостоятельная работа, в том числе:	87,8	71,8	16
Контроль:	35,7	-	35,7
Подготовка к экзамену	35,7	-	35,7
Общая трудо- е- м- к- о- с- т- ь	час.	252	144
	в том числе кон- тактная работа	128,5	72,2
	зач. ед	7	4

2.2 Структура дисциплины:

Распределение видов учебной работы и их трудоемкости по разделам дисциплины.

Разделы дисциплины, изучаемые в IV семестре:

№ раз-дела	Наименование разделов	Количество часов			
		Всего	Аудиторная ра-бота		СР
			Л	Лаб	
1	2	3	4	5	6
1	Комплексные числа и действия над ними. Геометрия и топология комплексной плоскости.	34	6	10	18
2	Комплексная дифференцируемость. Голоморфные функции и конформные отображения	31	8	8	15
3	Теория интеграла Коши	47	10	12	25
4	Степенные ряды и ряды голоморфных функций	23,8	8	2	13,8
	Итого:	135,8	32	32	71,8

Разделы дисциплины, изучаемые в V семестре:

№ раз-дела	Наименование разделов	Количество часов			
		Всего	Аудиторная ра-бота		СР
			Л	Лаб	
1	2	3	4	5	6
1	Ряды Лорана. Изолированные особые точки голоморфных функций.	12	4	8	-
2	Теория вычетов	38	6	18	14
3	Аналитическое продолжение	6	4	2	-
4	Геометрические принципы конформных отображений	14	4	8	2
	Итого:	70	18	36	16

2.3 Содержание разделов дисциплины:

2.3.1 Занятия лекционного типа

№ п/п	Наименование раз-дела	Содержание раздела	Форма те-кущего кон-троля
1	Комплексные числа и действия над ними. Геометрия и топология комплексной плоскости.	Введение. Поле комплексных чисел, операции над комплексными числами (к.ч.). Тригонометрическая форма представления к.ч.. Извлечение корня n-степени из к.ч. Геометрия и топология комплексной плоскости. Стереографическая проекция и ее свойства; сфера Римана, расширенная комплексная плоскость. Открытые, замкнутые, компакт-	Опрос

		ные множества на C и C , лемма Гейне-Бореля-Лебега. Понятие связного и линейного связного множества, односвязные и многосвязные области. Кривые на комплексной плоскости.	
2	Комплексная дифференцируемость. Голоморфные функции и конформные отображения.	Предел последовательности к.ч., сходимость числовых рядов. Функции комплексного переменного: предел, непрерывность, однолистность. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. R-дифференцируемые и C-дифференцируемые функции. Сопряженные гармонические функции. Достаточное условие локальной однолистности голоморфной функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции. Понятие конформного отображения. Критерий конформности отображения. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Степенные функции. Функция $\sqrt[n]{z}$ и ее риманова поверхность. Отображения двуугольников. Функция Жуковского. Показательная функция. Функция $\ln Z$ и ее риманова поверхность. Общая степенная функция. Выделение однозначной ветви многозначной функции. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Дробно-линейные отображения. Непрерывность, однолистность и конформность дробно-линейных отображений. Круговое свойство. Понятие инверсии, свойство сохранения симметричных точек, свойство сохранения сложного (ангармонического) отношения. Дробно-линейные изоморфизмы и автоморфизмы (общий вид дробно-линейного отображения круга на себя и верхней полуплоскости на круг). Гидродинамический смысл комплексной дифференцируемости, гидродинамическое истолкование гармонических и аналитических функций. Примеры приложений.	Коллоквиум
3	Теория интеграла Коши	Определение и свойства криволинейного интеграла от функций комплексного переменного. Лемма Гурса. Интегральная теорема Коши для односвязных и многосвязных областей. Первообразная функция, формула Ньютона-Лейбница, другое определение логарифмической функции. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем значении. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций, фор-	Коллоквиум

		мулы Коши для производных. Теорема Морера. Принцип максимума модуля.	
4	Степенные ряды и ряды голоморфных функций	Последовательности и ряды голоморфных функций в области, 1-я и 2-я теоремы Вейерштрасса. Степенные ряды, теорема Абеля, радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Ряды Тейлора. Теорема Тейлора, единственность разложения голоморфной функции в степенной ряд. Неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда и теорема Лиувилля. Нули голоморфной функции. Внутренняя теорема единственности для голоморфных функций. Ряд Лорана, область его сходимости. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана (теорема Лорана), единственность разложения). Формулы и неравенства Коши для коэффициентов. Изолированные особые точки однозначного характера; классификация изолированных особых точек однозначного характера по поведению функции и ряду Лорана; полюс, порядок полюса; существенная особая точка, теорема Сохоцкого-Вейерштрасса, понятие о теореме Пикара; бесконечно удаленная точка как особая. Целые функции, их порядок и тип; мероморфные функции, функции, мероморфные в расширенной плоскости. Понятие о теореме Миттаг-Лефлера.	Коллоквиум
5	Теория вычетов	Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Приемы вычисления вычетов. Теорема о полной сумме вычетов. Применение вычетов к вычислению определенных и несобственных интегралов. Лемма Жордана. Интегралы в смысле главного значения. Логарифмические вычеты в нулях и полюсах. Принцип аргумента. Теорема Руше и основная теорема алгебры. Теорема Гурвица. Коллоквиум.	Коллоквиум
6	Аналитическое продолжение	Аналитический элемент, аналитическое продолжение по цепи областей. Канонический аналитический элемент, аналитическое продолжение по кривой. Понятие полной аналитической функции, ветвь полной аналитической функции, теорема о монодромии (формулировка). Риманова поверхность полной аналитической функции и ее особые точки. Принцип непрерывности. Принцип симметрии Римана – Шварца. Построение конформных отображений с применением принципа симметрии.	Рефераты по теме, обсуждение на практических занятиях.
7	Геометрические принципы конформ-	Отображения посредством голоморфных функций: принцип открытости и принцип	Опрос

	ных отображений	области; теорема о локальном обращении; однолистные функции, критерий локальной однолистности и критерий конформности в точке, достаточное условие однолистности (принцип взаимнооднозначного соответствия). Конформно эквивалентные области на плоскости. Теорема Римана (формулировка). Понятие о соответствии границ при конформном отображении. Отображение верхней полуплоскости на многоугольник. Формула Кристоффеля-Шварца. Свойства гармонических функций: бесконечная дифференцируемость, теорема о среднем, теорема единственности и принцип максимума-минимума; инвариантность гармоничности при голоморфной замене переменных; теорема Лиувилля и теорема Харнака об устранимой особой точке; интегралы Пуассона и Шварца; разложение гармонических функций в ряды, связь с тригонометрическими рядами; задача Дирихле, применение конформных отображений для ее решения.	
--	-----------------	--	--

2.3.2 Занятия семинарского типа.

Занятия семинарского типа – не предусмотрены.

2.3.3 Лабораторные занятия

№	Наименование раздела	Наименование лабораторных работ	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1.	Комплексные числа и действия над ними. Геометрия и топология комплексной плоскости.	Операции над комплексными числами. Геометрия комплексной плоскости. Кривые на комплексной плоскости. Неравенства	Решение задач на практических занятиях. Проверка домашних заданий, контрольная работа
2.	Комплексная дифференцируемость. Голоморфные функции и конформные отображения.	Элементарные функции комплексного переменного и их свойства. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции. Восстановление голоморфной функции по ее вещественной (или мнимой) части. Дробно-линейные функции. Построение конформных отображений.	Решение задач на практических занятиях. Проверка домашних заданий, контрольная работа
3.	Теория интеграла Коши	Интегрирование функций комплексного переменного. Применение интегральной теоремы Коши и формулы Коши.	Решение задач на практических занятиях. Про-

			верка домашних заданий,
4.	Степенные ряды и ряды голоморфных функций	Разложение функций в ряды Тэйлора и Лорана. Классификация изолированных особых точек голоморфных функций	Решение задач на практических занятиях. Проверка домашних заданий,
5.	Теория вычетов	Вычисление вычетов. Применение теоремы Коши о вычетах и теоремы о полной сумме вычетов. Применение вычетов к вычислению определенных и несобственных интегралов	Решение задач на практических занятиях. Проверка домашних заданий, контрольная работа
6.	Аналитическое продолжение	Построение римановой поверхности полной аналитической функции	Рефераты по теме, обсуждение на практических занятиях.
7.	Геометрические принципы конформных отображений	Применение принципа аргумента. Теорема Рунге. Применение принципа симметрии Римана – Шварца.	

2.3.4 Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Курсовые работы – не предусмотрены.

2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

№	Наименование раздела	Перечень учебно-методического обеспечения дисциплины по выполнению самостоятельной работы
1	2	3
	Комплексные числа и действия над ними. Геометрия и топология комплексной плоскости.	1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. (http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=322) 2. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1, Лань, 2004. - 336 с.
	Комплексная дифференцируемость. Голоморфные функции и конформные отображения.	Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1, Лань, 2004. - 336 с.
	Теория интеграла Коши	Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1, Лань, 2004. - 336 с.
	Степенные ряды и ряды голоморфных функций	Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1, Лань, 2004. - 336 с.
	Теория вычетов	1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с.

		(http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=322) 2. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1, Лань, 2004. - 336 с.
	Аналитическое продолжение	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. (http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=322)
	Геометрические принципы конформных отображений	Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с. (http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=322)

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

3. Образовательные технологии:

Активные и интерактивные формы, лекции, практические занятия, контрольные работы, коллоквиумы, зачеты и экзамены, компьютеры. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому лабораторному занятию. В каждом семестре проводятся контрольные работы (на лабораторных занятиях). По теме «Аналитическое продолжение» студентам предлагаются несколько тем для подготовки рефератов по разделам, выделенным для самостоятельного изучения. Зачет выставляется после решения всех задач контрольных работ и выполнения самостоятельной работы.

4. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Текущий контроль осуществляется преподавателем, ведущим практические занятия на основе выполнения студентами домашних заданий и лабораторного практикума. В течение каждого семестра проводятся контрольные работы и теоретический коллоквиум.

4.1 Фонд оценочных средств для проведения текущей аттестации

Типовые задачи для контрольных работ

Контрольная работа №1

1. Найти действительную и мнимую часть комплексного числа $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$.
2. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота касательной α для отображения $f(z) = \frac{e^{iz} - i}{e^{iz} + i}$ в точке $z_0 = \pi$.
3. Найти образ области $D = \{z : |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении дробно-линейной

функцией $w=f(z)$, удовлетворяющей условиям $f(0)=\infty, f(1+i)=1, f(2i)=0$.

Или:

Найти функцию $w=f(z)$, конформно отображающую область $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0; i]$ на верхнюю полуплоскость.

Контрольная работа №2

1. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию по известной действительной части $U(x,y)$ и значению $f(z_0)$:

$$U(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 1, f(0) = 1.$$

2. Вычислить интеграл $\int_L (iz^2 - 2z) dz$, где кривая L – отрезок, соединяющий точки

$$z_1 = 0 \text{ и } z_2 = \frac{\pi i}{2}.$$

3. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$ функцию:

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+4z-5}$$

и найти радиус сходимости ряда.

Контрольная работа №3

1. Разложить по степеням $z-a$ в кольце $D = \{z : |z-2| > 0\}$ функцию

$$f(z) = z^4(z-2)^{-2}, a = 2.$$

2. Вычислить интеграл, считая, что обход замкнутого контура происходит в положительном направлении:

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}.$$

3. Вычислить с помощью теории вычетов несобственный интеграл вида:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)},$$

или несобственный интеграл вида $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx.$

4. Вычислить с помощью теории вычетов следующий определенный интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3 \cos \varphi}.$$

Перечень типовых контрольных вопросов и задач для самостоятельной работы.

Типовые задачи для самостоятельной работы

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа:

$$z = (1+i)^9 - (1-i)^2 + i.$$

2. Найти модуль и главное значение ($0 \leq \arg z < 2\pi$) аргумента комплексного числа:

$$z = -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}.$$

3. Найти модуль и главное значение аргумента ($0 \leq \arg z < 2\pi$) комплексного числа:

$$z = (1 - i\sqrt{3})^3$$

4. Найти все значения корней и построить их на комплексной плоскости: $\sqrt[5]{32}$

5. Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству:

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1.$$

6. Изобразить множество всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству:

$$\operatorname{Re}((1+i)z^2) > 0.$$

7. Представить в алгебраической форме значение функции комплексного переменного:

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + 2i \right).$$

8. Представить в алгебраической форме значение функции комплексного переменного:

$$\operatorname{Ln}(1 + \sqrt{3}i).$$

9. Представить в алгебраической форме значение функции комплексного переменного:

$$(1+i)^i.$$

10. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота α для отображения $f(z)$ в точке

$$z_0 = 1-i, \quad f(z) = \frac{(z-2i)^2}{z+i}.$$

11. Найти образ области

$$D = \left\{ z : |z| < 1; \operatorname{Im} z < 0; \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2} \right\}$$

при отображении дробно-линейной функцией $W = f(z)$, удовлетворяющей условиям: $f(0) = -i$; $f(-1) = \infty$; $f(\infty) = i$.

12. Найти функцию, конформно отображающую область

$$D = \left\{ |z-1| < 1; \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2} \right\}$$

на верхнюю полуплоскость..

13. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по кривой:

$$\int_{AB} (3z^2 + 2z) dz; AB = \{ z = x + iy : y = x^2 : 0 \leq x \leq 1 \}$$

где $A=0, B=1+i$.

14. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по кривой:

$$\int_{ABC} (z^2 + \cos z) dz, \text{ где}$$

ABC – ломаная, соединяющая точки $A(0)$, $B(i)$, $C(1)$;

15. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$ функцию $f(z) = \frac{z+1}{z^2+4z-5}$ и найти радиус сходимости ряда.
16. Определить радиус сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k^2 (z+i)^{3^k}.$$

17. Найти разложение функции

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(2-z)}$$

в ряд Лорана в кольце $K = \{z: 1 < |z| < 2\}$.

18. Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)^2}$$

в расширенной комплексной плоскости и выяснить их характер.

19. Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{1}{\frac{1}{e^z} + 1}$$

в расширенной комплексной плоскости и выяснить их характер.

20. Разложить по степеням $z-a$ в кольце $D = \{z: |z-2| > 0\}$ функцию $f(z) = z^4(z-2)^{-2}, a = 2$.

21. Вычислить интеграл, считая, что обход замкнутого контура происходит в положительном направлении:

1) $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}.$

2) $\int_{|z|=3} \frac{z-1}{z^2+4} dz$

3) $\int_{|z-i|=1} \frac{e^{\frac{\pi}{2}z}}{(z^2+1)^2} dz$

4) $\int_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z^4-1)(z+2)}.$

22. Вычислить с помощью теории вычетов несобственный интеграл:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)},$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2-2x+10} dx.$

23. Вычислить с помощью теории вычетов следующий определенный интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5+3\cos\varphi}.$$

Вопросы к коллоквиуму

I. Определения и формулировки теорем.

1. Функция, дифференцируемая в смысле комплексного анализа, и функция, голоморфная в точке.
2. Условия Коши-Римана
3. Геометрический смысл модуля и аргумента производной
4. Понятие конформного отображения, достаточное условие конформности.
5. Теорема Коши для односвязной области.
6. Теорема Коши для многосвязной области.
7. Интегральная формула Коши.
8. Интеграл типа Коши.
9. Определение гармонической функции.
10. Определение инверсии.
11. Теорема о среднем
12. Теорема Морера.
13. Принцип максимума модуля.
14. Первая теорема Вейерштрасса.
15. Вторая теорема Вейерштрасса
16. Теорема Абеля
17. Формула Коши Адамара
18. Внутренняя теорема единственности
19. Классификация изолированных особых точек
20. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса
21. Определение вычета в конечной изолированной особой точке и в ∞ .

II. Доказательства утверждений

1. Круговое свойство дробно-линейных отображений.
2. Свойство сохранения симметричных точек для дробно-линейных отображений.
3. Теорема Коши для односвязной области (доказательство Э.Гурса).
4. Теорема о существовании первообразной.
5. Интегральная формула Коши.
6. Теорема о среднем.
7. Дифференцируемость интеграла типа Коши.
8. Теорема Морера.
9. Принцип максимума модуля.
10. Теорема Абеля.
11. Теорема Тейлора.
12. Внутренняя теорема единственности
13. Неравенства Коши и теорема Лиувилля.
14. Теорема Лорана.
15. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса
16. Выражение вычета через коэффициент разложения в ряд Лоран в конечной точке и в бесконечности.
17. Теорема Коши о вычетах.
18. Теорема о полной сумме вычетов.
19. Лемма Жордана.

4.2 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Итоговый контроль осуществляется в форме экзамена.

Контрольные проводятся в письменной форме, либо в форме тестирования, коллоквиумы – в письменной и устной форме. Контрольные и коллоквиумы оцениваются по

пятибалльной системе. Экзамены оцениваются по системе: неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично. На лабораторных занятиях контроль осуществляется при ответе у доски и при проверке домашних заданий.

Вопросы к экзамену

1. Комплексные числа и действия над ними. Тригонометрическая и показательная форма представления комплексных чисел. Формула Муавра. Извлечение $\sqrt[n]{Z}$.
2. Расширенная комплексная плоскость. Стереографическая проекция и ее свойства.
3. Топология комплексной плоскости. Понятие открытого, замкнутого, связного множества. Область, порядок связности.
4. Пути и кривые. Предел и непрерывность функций комплексного переменного.
5. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.
6. Функции, дифференцируемые в смысле вещественного и комплексного анализа. Формальные производные. Понятие голоморфной функции.
7. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.
8. Понятие конформного отображения. Достаточный признак конформности отображения.
9. Гармонические функции, восстановление голоморфной функции по ее вещественной части.
10. Дробно-линейные отображения, их конформность в $\mathbb{C}$ и круговое свойство.
11. Понятие инверсии, ее свойства. Свойство сохранения симметричных точек при дробно-линейных отображениях.
12. Построение дробно-линейного отображения по заданному соответствию трех пар точек, свойство сохранения сложного (ангармонического) отношения.
13. Дробно-линейные изоморфизмы верхней полуплоскости на единичный круг и автоморфизмы единичного круга.
14. Свойства функции Z^n .
15. Функция Жуковского.
16. Показательная функция.
17. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства.
18. Интегральная теорема Коши для односвязной области (доказательство с помощью формулы Грина).
19. Лемма Гурса.
20. Интегральная теорема Коши для односвязной области (доказательство Э. Гурса).
21. Интегральная теорема Коши для многосвязной области.
22. Теорема о существовании первообразной.
23. Интегральная формула Коши и теорема о среднем.
24. Интеграл типа Коши.
25. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций, интегральная формула Коши для производных, теорема Морера.
26. Принцип максимума модуля.
27. Сходимость и равномерная сходимость функциональных рядов. Свойства равномерно сходящихся рядов, признак Вейерштрасса.
28. Первая теорема Вейерштрасса.
29. Вторая теорема Вейерштрасса.
30. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда.
31. Признак Коши сходимости числового ряда. Формула Коши – Адамара.
32. Теорема Тэйлора.
33. Неравенства Коши и теорема Лиувилля.
34. Внутренняя теорема единственности для голоморфных функций.
35. Нули голоморфной функции.

36. Ряд Лорана. Теорема Лорана.
37. Теорема об единственности разложения в ряд Лорана, неравенства Коши для коэффициентов.
38. Классификация изолированных особых точек, критерий устранимости особой точки.
39. Полюсы голоморфной функции, порядок полюса, связь между нулями и полюсами.
40. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса.
41. Целые и мероморфные функции. Представление мероморфной функции, имеющей конечное число полюсов.
42. Вычеты. Выражение вычета через коэффициент разложения в ряд Лорана. Вычисление вычета в случае полюсов разной кратности.
43. Теорема Коши о вычетах.
44. Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов.
45. Лемма Жордана и ее применение.
46. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов.
47. Несобственный интеграл в смысле главного значения. Вычисления в случае простых полюсов. Пример.
48. Логарифмический вычет в нулях и полюсах. Теорема о полной сумме логарифмических вычетов функции, мероморфной в области.
49. Принцип аргумента.
50. Теорема Руше и основная теорема алгебры.
51. Принцип сохранения области.
52. Достаточное условие локальной однолиственности и необходимое условие однолиственности голоморфной функции.
53. Аналитический элемент, аналитическое продолжение по цепи областей. Канонический аналитический элемент, аналитическое продолжение по кривой.
54. Понятие полной аналитической функции, ветвь полной аналитической функции, теорема о монодромии (формулировка). Риманова поверхность полной аналитической функции.
55. Принцип непрерывности.
56. Принцип симметрии Римана-Шварца.
57. Конформно эквивалентные области на плоскости. Теорема Римана (формулировка). Соответствие границ при конформном отображении.
58. Принцип взаимно-однозначного соответствия.
59. Отображение верхней полуплоскости на многоугольник. Формула Кристоффеля-Шварца.

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

5.1 Основная литература:

1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Лань, стереотипное издание, 2009, 432с.
(см. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=322)
2. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1, Лань, 2008. - 336 с.
3. Волковыцкий И.М., Лунц, Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 312 с.
(см. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=2763).

5.2 Дополнительная литература:

1. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного, ТГУ, 2002, 510 с.
2. Бицадзе А.В. Основы теории аналитической функции комплексного переменного, М., Наука, 1972, 263 с.
3. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного, т.1, т.2, ИЛ, Москва, 1962.
4. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций, «Наука», Москва, 1968, 618с.

5. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного, М., «Наука», 1989, - 480 с.
6. Сборник задач по теории аналитических функций под редакцией Евграфова М.А., М., «Наука», 1972, - 416 с.
7. Сборник задач по теории аналитических функций и операционному исчислению. Учебное пособие/ под редакцией Мавроди Н.Н.; Кубан. гос. ун-т. Краснодар, 1997, 156 с. ISBN 5-230-21802-9.

5.3. Периодические издания:

- 1) Вестник МГУ. Серия: Математика. Механика;
- 2) Вестник СПбГУ. Серия: Математика. Механика. Астрономия;
- 3) Известия ВУЗов. Серия: Математика;
- 4) Известия РАН (до 1993 г. Известия АН СССР). Серия: Математическая;
- 5) Математика. Реферативный журнал. ВИНТИ;
- 6) Математические заметки;
- 7) Математический сборник.

(перечисленные издания хранятся в фонде библиотеки КубГУ)

6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. ЭБС "Университетская библиотека ONLINE" – <http://biblioclub.ru/>
2. Электронная библиотечная система издательства "Лань" – <http://e.lanbook.com/>
3. Электронная библиотечная система "Юрайт" – <http://www.biblio-online.ru/>
4. Scopus – база данных рефератов и цитирования – <http://www.scopus.com/>
5. Web of Science (WoS) – http://apps.webofknowledge.com/WOS_GeneralSearch_input.do?product=WOS&search_mode=GeneralSearch&SID=V2yRRW6FP9RssAaul78&preferencesSaved
6. Научная электронная библиотека (НЭБ) – <http://www.elibrary.ru/>
7. Архив научных журналов – <http://archive.neicon.ru/>
8. Электронная Библиотека Диссертаций – <https://dvs.rsl.ru/>
9. Национальная электронная библиотека – <http://нэб.рф/>
10. База учебных планов, учебно-методических комплексов, публикаций и конференций – <http://infoneeds.kubsu.ru/>

7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

По курсу предусмотрено проведение лекционных занятий, на которых дается основной систематизированный материал и поднимаются проблемные вопросы; практических занятий, на которых широко используются активные и интерактивные образовательные технологии; лабораторных, в процессе проведения которых обучающиеся отрабатывают навыки решения конкретных научных задач.

Важнейшими составляющими курса являются такие виды занятий, как самостоятельная работа студентов, такая как разбор лекций, работа с литературой, отработка навыков решения практических задач, подготовка реферата. В процессе самостоятельной работы обучающимися активно используются информационные справочные системы.

Текущий контроль осуществляется преподавателем, ведущим практические занятия на основе дискуссии с студентами, дающей представление о динамике роста знаний студентов и их научном потенциале; учета активности студента на занятиях и оценке выступления обучающегося при изложении реферата. Контроль также осуществляется путем

проведения контрольных работ.

Итоговый контроль осуществляется в форме зачета в 4 семестре и экзамена – в 5.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю)

8.1 Перечень информационных технологий

- Сбор, хранение, систематизация и выдача учебной и научной информации;
- Обработка текстовой, графической и эмпирической информации;
- Подготовка, конструирование и презентация итогов исследовательской и аналитической деятельности;
- Использование электронных презентаций при проведении практических занятий;
- Работа с информационными справочными системами;
- Использование электронной почты преподавателей и обучающихся для рассылки, переписки и обсуждения возникших учебных проблем.

8.2 Перечень необходимого программного обеспечения

- Офисный пакет приложений Microsoft Office.

8.3 Перечень необходимых информационных справочных систем

- Электронные ресурсы библиотеки КубГУ – <https://kubsu.ru/node/1145> (см. п. 6)
- Могут использоваться иные информационно-поисковые системы сети Интернет.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

№	Вид работ	Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) и оснащенность
1.	Лекционные занятия	Лекционная аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) и соответствующим программным обеспечением (ПО).
2.	Лабораторные занятия	Аудитория оснащенная компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченная доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.
3.	Групповые (индивидуальные) консультации	Аудитория оснащенная компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченная доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.
4.	Текущий контроль, промежуточная аттестация	Аудитория оснащенная компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченная доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.
5.	Самостоятельная работа	Кабинет для самостоятельной работы, оснащенный компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», программой экранного увеличения и обеспеченный доступом в электронную информационно-образовательную среду университета.