МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
в г.Геленджике

УТВЕРЖДАЮ:
Директор филиала КубГУ
в г. Геленджике
_____________ Р.С.Маслова
«31» ___08___ 2016г.

РАБОЧАЯ УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Специальность 09.02.03 Программирование в компьютерных системах
среднего профессионального образования

2 курс	3,4 семестр
лекции	90 ч
практические занятия	68 ч
самостоятельные занятия	84 ч
форма итогового контроля	зачет, экзамен

2016

Рабочая программа учебной дисциплины разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом (далее – ФГОС) по специальности среднего профессионального образования (далее СПО) 09.02.03 Программирование в компьютерных системах

Организация-разработчик: филиал ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет» в г.Геленджике

Составитель ______________________Михайлова С.Б.

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании цикловой комиссии математических и естественно-научных дисциплин филиала ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет» в г.Геленджике

Протокол № ____ от ________________ 2015 г.

Председатель цикловой комиссии математических и естественно-научных дисциплин _____________ Каламзина В.П.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПАСПОРТ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Элементы высшей математики

название учебной дисциплины

1.1. Область применения программы

Рабочая программы учебной дисциплины является частью основной профессиональной образовательной программы в соответствии с ФГОС третьего поколения по специальности СПО:

09.02.3 Программирование в компьютерных системах

код *наименование специальности*

Рабочая программа составляется для очной формы обучения.

1.2 Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы:

ЕН.01. Дисциплина входит в состав дисциплин математического и общего естественнонаучного цикла

1.3. Цели и задачи дисциплины – требования к результатам освоения дисциплины

В результате освоения обязательной части дисциплины обучающийся должен уметь:

- выполнять операции над матрицами;
- решать системы линейных уравнений;
- решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения;
- пользоваться понятиями теории комплексных чисел;

В результате освоения обязательной части дисциплины обучающийся должен знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основы дифференциального и интегрального исчисления;
- основы теории комплексных чисел.

Содержание дисциплины должно быть ориентировано на подготовку обучающихся по базовой и углубленной подготовке к освоению профессиональных модулей ОПОП по специальности Программирование в компьютерных системах и овладению профессиональными компетенциями (ПК):

ПК 1.1. Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент.

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

ПК 2.4. Реализовывать методы и технологии защиты информации в базах данных.

ПК 3.4. Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев.

В результате освоения дисциплины у обучающихся по базовой подготовке формируются общие компетенции (ОК):

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ОК 10. Исполнять воинскую обязанность, в том числе с применением полученных профессиональных знаний (для юношей).

В результате освоения дисциплины у обучающихся по углубленной подготовке формируются общие компетенции (ОК):

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Решать проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, обеспечивать ее сплочение, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Ставить цели, мотивировать деятельность подчиненных, организовывать и контролировать их работу с принятием на себя ответственности за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Быть готовым к смене технологий в профессиональной деятельности.

ОК 10. Исполнять воинскую обязанность, в том числе с применением полученных профессиональных знаний (для юношей).

1.4. Рекомендуемое количество часов на освоение программы дисциплины

максимальной учебной нагрузки обучающегося **242** часов, в том числе: обязательной аудиторной учебной нагрузки обучающегося **90/68** часов; самостоятельной работы обучающегося **84** часов.

2. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной деятельности	**Объем часов**
Максимальная учебная нагрузка (всего)	242
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего)	158
в том числе:	
лекции	90
практические занятия	68
курсовая работа (проект)	не предусмотрено
Самостоятельная работа обучающего	84
в том числе:	
- самостоятельная работа над курсовой работой (проектом)	не предусмотрено
- подготовка сообщений; - решение задач; - работа с учебником; - составление конспекта	84
Итоговая аттестация в форме экзамена.	

2.2. Тематический план и содержание учебной дисциплины
«ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»

Наименование разделов и тем		Содержание учебного материала , лабораторные работы и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся, курсовая работа (проект)	Объем часов	Уровень освоения
1		2	3	4
III семестр				
Раздел 1. Основы линейной алгебры			**32**	
Тема 1.1 Матрицы и операции над ними		**Содержание учебного материала**	**14**	
	1	Матрица, основные понятия.	2	2
	2	Операции над матрицами.	2	2
	3	Определитель матрицы и его свойства.	2	2
	4	Обратная матрица.	2	2
		Практические занятия:	2	
	1	Действия над матрицами. Вычисление определителей		
		Самостоятельная работа обучающихся:	4	
Тема 1.2 Системы линейных уравнений и методы их решения		**Содержание учебного материала**	**18**	
	1	Системы линейных уравнений и методы их решения: метод обратной матрицы	2	2
	2	Метод Крамера	2	2
	3	Метод исключения переменных (метод Гаусса)	2	2
		Практические занятия:	6	
	1	Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы		
	2	Решение систем линейных уравнений методом Крамера		
	3	Решение систем линейных уравнений методом Гаусса		
		Самостоятельная работа обучающихся:	6	
Раздел 2. Основы аналитической геометрии			**34**	
Тема 2.1 Уравнение прямой на плоскости		**Содержание учебного материала**	**16**	
	1	Параметрическое, канонические уравнения прямой на плоскости. Уравнение прямой в отрезках.	2	2
	2	Нормальное, общее уравнение прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.	2	2
	3	Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой.	2	2
		Практические занятия:	6	
	1	Составление уравнений прямых на плоскости.		
	2	Расстояние от точки до прямой		

	3 Угол между прямыми. Определение взаимного расположения прямых		
	Самостоятельная работа обучающихся:	4	
Тема 2.2 Кривые второго порядка	**Содержание учебного материала**	**18**	
	1 Каноническое уравнение окружности	2	2
	2 Каноническое уравнение эллипса	2	
	3 Каноническое уравнение гиперболы	2	2
	4 Каноническое уравнение параболы	2	2
	Практические занятия:	4	
	1 Решение задач на кривые второго порядка		
	2 Решение задач на кривые второго порядка		
	Самостоятельная работа обучающихся:	6	
Раздел 3 Основы дифференциального исчисления		**38**	
Тема 3.1 Пределы и непрерывность	**Содержание учебного материала**	**17**	
	1 Числовая последовательность. Предел последовательности и его свойства.	2	2
	2 Предел функции в точке и на бесконечности. Свойства пределов. Замечательные пределы.	2	2
	3 Односторонние пределы. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация	2	2
	Практические занятия	4	
	1 Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей		
	2 Вычисление односторонних пределов. Исследование функций на непрерывность. Классификация точек разрыва		
	Самостоятельная работа:	7	
Тема 3.2 Производная функции. Правила дифференцирования. Приложение производной	**Содержание учебного материала**	**22**	
	1 Понятие производной функции. Правила дифференцирования. Таблица производных.	2	2
	2 Дифференцирование сложной и обратной функции. Геометрический и физический смысл производной	2	2
	3 Возрастание и убывание функций. Экстремумы функций. Правила нахождения интервалов монотонности и экстремумов функции. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции	2	2
	4 Полное исследование функции. Построение графиков	2	2
	5 Дифференциал функции. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям	2	2
	Практические занятия	6	
	1 Дифференцирование сложной и обратной функции		
	2 Нахождение экстремумов функции. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функций на отрезке		
	3 Полное исследование функции. Построение графиков		
	4 Вычисление дифференциалов функций		
	Самостоятельная работа обучающихся:	6	

Раздел 4 **Функции нескольких переменных**			**16**	
Тема 4.1 Функции нескольких переменных	**Содержание учебного материала**		**16**	
	1	Функции нескольких переменных. Основные понятия.	2	2
	2	Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных	2	2
	Практические занятия		2	
	1	Вычисление пределов, частных производных и дифференциалов функций нескольких действительных переменных		
	Самостоятельная работа обучающихся:		10	
IV семестр				
Раздел 5 **Основы интегрального исчисления**			**42**	
Тема 5.1 Неопределенный интеграл. Методы интегрирования	**Содержание учебного материала**		**14**	
	1	Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов. Метод непосредственного интегрирования.	2	1
	2	Интегрирование методом замены переменной. Метод интегрирования по частям	2	1,2
	3	Интегрирование рациональных функций	2	2
	Практические занятия		6	
	1	Вычисление неопределенных интегралов. Метод непосредственного интегрирования.		
	2	Интегрирование методом замены переменной. Метод интегрирования по частям		
	3	Интегрирование рациональных функций		
	Самостоятельная работа обучающихся:		2	
Тема 5.2 Определенный интеграл и его приложения	**Содержание учебного материала**		**16**	
	1	Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Метод непосредственного интегрирования в определенном интеграле.	2	2
	2	Интегрирование методом замены переменной. Метод интегрирования по частям. Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление объемов тел вращения	2	1,2
	3	Несобственные интегралы	2	1
	Практические занятия		6	
	1	Вычисление определенных интегралов		
	2	Интегрирование методом замены переменной. Метод интегрирования по частям.		
	3	Вычисление площадей и объемов фигур		
	Самостоятельная работа обучающихся:		4	
Тема 5.3 Двойные интегралы и их приложения	**Содержание учебного материала**		**12**	
	1	Двойные интегралы и их свойства. Повторные интегралы	2	2
	2	Приложение двойных интегралов	2	2
	Практические занятия		4	2
	1	Вычисление двойных интегралов в случае областей 1 и 2 типа.		

	2	Решение задач на приложение двойных интегралов		
	Самостоятельная работа обучающихся:		4	
аздел 6 **Основы теории комплексных чисел**			**20**	
Тема 6.1 Основы теории комплексных чисел	**Содержание учебного материала**		**20**	
	1	Алгебраическая форма комплексных чисел	2	2
	2	Тригонометрическая форма комплексных чисел.	2	2
	3	Формула Эйлера. Показательная форма комплексных чисел	2	2
	Практические занятия		6	
	1	Действия над комплексными числами в алгебраической форме		
	2	Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме		
	3	Переход от алгебраической формы комплексных чисел к тригонометрической и показательной и обратно		
	Самостоятельная работа обучающихся:		8	
Раздел 7 **Дифференциальные уравнения, их виды и методы решения**			**28**	
Тема 7.1 Дифференциальные уравнения первого порядка	**Содержание учебного материала**		**14**	
	1	Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решение. Уравнение с разделяющимися переменными.	2	2
	2	Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.	2	2
	3	Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка	2	2
	Практические занятия		4	
	1	Решение дифференциальных уравнений первого порядка		
	2	Решение линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка		
	Самостоятельная работа обучающихся:		4	
Тема 7.2 Дифференциальные уравнения второго порядка	**Содержание учебного материала**		**14**	
	1	**Дифференциальные уравнения второго порядка.**	2	2
	2	**Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**	2	2
	Практические занятия		2	
	1	Решение дифференциальных уравнений второго порядка		
	2	Решение линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами		
	Самостоятельная работа обучающихся:		8	
Раздел 8 **Теория рядов**			**24**	
Тема 8.1 Числовые ряды, исследование их на	**Содержание учебного материала**		**12**	
	1	Определение числового ряда. Признаки сходимости рядов с положительными членами.	2	2

сходимость	2	Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.	2	2
	Практические занятия		4	
	1	Исследование на сходимость положительных и знакочередующихся рядов		
	2	Знакочередующиеся ряды.		
	Самостоятельная работа обучающихся:		5	
Тема 8.2 Степенные ряды. Разложение функций в ряд Тейлора	**Содержание учебного материала**		**16**	
	1	Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости. Область сходимости степенного ряда.	2	2
	2	Разложение элементарных функций в ряд Тейлора-Маклорена	4	2
	Практические занятия		4	
	1	Нахождение области сходимости степенного ряда. Разложение в ряд Тейлора-Маклорена элементарных функций		
	Самостоятельная работа обучающихся:		6	
		Всего:	**242**	

Для характеристики уровня освоения учебного материала используются следующие обозначения:
1. – ознакомительный (узнавание ранее изученных объектов, свойств);
2. – репродуктивный (выполнение деятельности по образцу, инструкции или под руководством)
3. – продуктивный (планирование и самостоятельное выполнение деятельности, решение проблемных задач)

3. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Требования к минимальному материально-техническому обеспечению

Реализация программы дисциплины требует наличия учебного кабинета математики; Оборудование учебного кабинета:

- посадочные места по количеству обучающихся
- рабочее место преподавателя
- учебно-наглядные пособия по дисциплине «Математика»: плакаты по темам «Степени и их свойства», «Логарифмы и их свойства», «Тригонометрия», «Основные формулы дифференцирования», «Основные формулы интегрирования», «Правила дифференцирования», «Многогранники», «Тела вращения», «Векторы»

Технические средства обучения:

- компьютер
- мультимедийный проектор, экран

3.2. Информационное обеспечение обучения. Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники

1. Григорьев, В.П. Элементы высшей математики: учебник для СПО / В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский-М.: Академия, 2013.-320с.
2. Григорьев, В.П. Элементы высшей математики: учебник для СПО / В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский-М.: Академия, 2011.-320с.
3. Математика: учебник для СПО/ Н.В. Богомолов,П.И. Самойленко.-М.:Издательство Юрайт , 2016 -396с.-[Электронный ресурс]-URL : http://www.biblio-online.ru/thematic/?3&id=urait.content.F7C570BC-85B6-4E2D-9B5A-4CB297E61C8E&type=c_pub
4. Татарников, О.В. Элементы линейной алгебры: учебник и практикум для СПО / О.В. Татарников и др.- М.: Юрайт, 2016.- 334 с. - [Электронный ресурс]-URL: http://www.biblio-online.ru/thematic/?3&id=urait.content.067047A5-3AC0-48DE-AD94-D99496C1BBBC&type=c_pub

Дополнительные источники

1. Высшая математика: учебное пособие/ Н.И.Лобкова, Ю.Д. Максимов,Ю.А. Хватов .- М.: Проспект ,2014.- 472с.[Электронный ресурс] - URL: http://www.book.ru/book/916096

2. . Крицков, Л.В. Высшая математика в вопросах и ответах: учебное пособие / Л..В. Крицков.- М.: Проспект, 2013.- 176 с.

3. Шипачѐв, В.И. Высшая математика: практикум/ В.И. Шипачев.-М.: Издательство Юрайт , 2015.- 447с.-[Электронный ресурс]-URL : http://www.biblio-online.ru/thematic/?4&id=urait.content.28820072-7151-45B1-8C70-BA0F2B4A0061&type=c_pub

4. Кузнецов, Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчѐты: учебное пособие/ Л.А. Кузнецов.- М.: Лань, 2015.- 240с. -[Электронный ресурс]-URL: *http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4549*

5. Осипов А.В. Лекции по высшей математике: учебное пособие/ А.В. Осипов.- М.: Лань, 2014.- 320с.-[Электронный ресурс] -URL: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=50157

Периодические издания

1. Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки- URL: http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2351
2. Квант -URL: http://e.lanbook.com/journal/element.php?pl10_id=2372
3. Математические труды - Научная электронная библиотека «eLIBRARY.RU URL:http://elibrary.ru/title_about.asp?id=7875
4. Наука Кубани
5. Среднее профессиональное образование

Интернет-ресурсы

1. ЭБС «Университетская библиотека ONLINE» URL: http://biblioclub.ru
2. ЭБС Издательства «Лань» URL: http://e.lanbook.com
3. ЭБС «BOOK.ru» - http://www.book.ru/
4. ЭБС «Юрайт»- http://www.biblio-online.ru

4. КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Контроль и оценка результатов освоения дисциплины осуществляется преподавателем в процессе проведения практических занятий, тестирования, выполнения обучающимися индивидуальных заданий в виде текущего контроля.

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	Формы и методы контроля и оценки результатов обучения
Умения:	
выполнять операции над матрицами;	Наблюдение и оценка результата выполнения практических работ
-решать системы линейных уравнений;	Наблюдение и оценка результата выполнения практических работ
-решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;	Наблюдение и оценка результата выполнения практических работ

-применять методы дифференциального и интегрального исчисления;	Наблюдение и оценка результата выполнения практических работ
-решать дифференциальные уравнения;	Наблюдение и оценка результата выполнения практических работ
-пользоваться понятиями теории комплексных чисел;	Наблюдение и оценка результата выполнения практических работ
Знания:	
-основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;	Оценка выполнения тестовых заданий по темам Матрицы и операции над ними. Системы линейных уравнений и методы их решения Основы алгебры векторов Уравнение прямой на плоскости Кривые второго порядка Оценка выполнения контрольных работ
- основы дифференциального и интегрального исчисления;	Оценка выполнения тестовых заданий по темам Пределы и непрерывность Производная функции. Правила дифференцирования. Приложение производной Неопределенный интеграл. Методы интегрирования Определенный интеграл и его приложения Функции нескольких переменных Двойные интегралы и их приложения Основы теории комплексных чисел Дифференциальные уравнения первого порядка Дифференциальные уравнения второго порядка
- основы теории комплексных чисел.	Алгебраическая форма комплексных чисел Тригонометрическая форма комплексных чисел. Формула Эйлера. Показательная форма комплексных чисел

4. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

4.1. Формы контроля

итоговый: 3 семестр- зачѐт, 4 семестр – экзамен.

текущий: экспресс-опрос (письменный), тестирование по темам, решение задач, реферат.

ТЕМАТИКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

№1. Матрицы и операции над ними.
№2. Основы аналитической геометрии.
№3. Исследование функций на непрерывность.

№4. Исследование функций с помощью производной и построение графиков.

№5. Геометрический смысл определенного интеграла. Приложение интеграла к решению прикладных задач.

№6. Нахождение экстремумов функции многих переменных.

№7. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

№8. Дифференциальные уравнения в науке и технике.

№9. Практическое применение степенных рядов.

№10. Комплексные числа. Операции над комплексными числами. Формула Муавра. Решение уравнений.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по подготовке презентационного проекта.

Презентационный проект по темам изучаемой дисциплины проводится с использованием презентации, выполненной средствами *PowerPoint,* интерактивной среды *Stratum 2000*, в которой отражается весь ход исследовательской работы. Название слайдов и информация, представленная на них, соответствует схеме представления доклада. Однако не следует помещать на слайды сплошной текст, скопированный из доклада. В презентации вы размещаете структурированную информацию, выбирая самое главное и важное. Кроме того, на слайдах размещаются различные схемы, диаграммы, графики, таблицы и рисунки, поясняющие полученные результаты и сделанные вами выводы. Иллюстрации можно выполнять при помощи различных графических редакторов или средствами самой программы PowerPoint. Вы можете подготовить иллюстрации вручную, после чего отсканировать изображение и поместить на слайды.

Кроме того, целесообразно использование виртуальных лабораторий:

- *Графер,* модуль которого позволяет строить графики произвольных функций в различных системах координат, строить параметрические кривые, осуществлять преобразования графиков (растяжение, сдвиг, отражение), показывать результат алгебраических операций над функциями (сложение, умножение, деление, суперпозиция), строить касательные и нормали, подписывать на графиках точки, проверять построенные графики.

- *Чертеж,* модуль которого позволяет строить в режиме графического редактора геометрические чертежи при помощи стандартных инструментов (циркуль и линейка).

- *Трехмерный чертеж* - средство для построения трехмерных объектов и их сечений в стереометрии.

Также считается перспективным использование виртуальных лабораторий в комплексе с другими средствами обучения. Типичным примером такого объединения являются лабораторные работы. Учащийся проводит "эксперимент" на созданной разработчиками курса или сделанной им самим виртуальной установке, измеряет требуемые величины, после чего осуществляется компьютерная проверка ответа.

Подготовить текст выступления

Для того чтобы лучше и полнее донести свои идеи до тех, кто будет рассматривать результаты работы, надо подготовить текст доклада. Он должен быть кратким, и его лучше всего составить по такой схеме:

1)почему избрана эта тема;
2) какой была цель проекта;
3) какие ставились задачи;
4) какие гипотезы проверялись;
5) какие использовались методы и средства проекта;
6) каким был план проекта;
7) какие результаты были получены;
9) что можно исследовать в дальнейшем в этом направлении.

На защите работы вы можете представить макеты или модели устройств, являющихся предметом вашего исследования.

Делая наглядные материалы — макеты, схемы, чертежи, рисунки надо понимать, что они могут не только показать сильные стороны проделанной работы, но и открыть слабые места в вашем исследовании.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К НАПИСАНИЮ РЕФЕРАТА

Как написать реферат

Написание и защита реферата — одна из форм аттестации знаний.

Несколько НЕ

Реферат НЕ копирует дословно книги и статьи и НЕ является конспектом. Реферат НЕ пишется по одному источнику и Не является докладом. Реферат НЕ может быть обзором литературы, т.е. не рассказывает о книгах.

В реферате собранный по теме материал систематизируется и обобщается.

Реферат состоит из нескольких частей:

- титульный лист (оформляется по требованиям учебного заведения);
- оглавление (содержание) требует наличие номеров страниц на каждый раздел реферата;

- введение; основная часть,
- состоящая из глав; заключение;
-
- список использованной литературы.

Во введении объясняется:

- почему выбрана такая тема, чем она важна (личное отношение к теме (проблеме), чем она актуальна (отношение современного общества к этой теме (проблеме), какую культурную или научную ценность представляет (с точки зрения исследователей, ученых);
- какая литература использована: исследования, научно-популярная литература, учебная, кто авторы… (Клише: «Материалом для написания реферата послужили …»)
- из чего состоит реферат (введение, кол-во глав, заключение, приложения. Клише: «Во введении показана идея (цель) реферата. Глава 1 посвящена.., во 2 главе …В заключении сформулированы основные выводы…»)

Методические указания по выполнению самостоятельных работ

Существенное значение при изучении математического анализа имеет самостоятельная работа студентов. В рамках самостоятельной работы, в обязательном порядке, студенты очной формы обучения выполняют типовые расчѐты согласно графику, содержащемуся в рабочей программе по дисциплине. Правильное и своевременное выполнение типовых расчѐтов является необходимым условием для допуска студента к экзамену.

Самостоятельная работа способствует укреплению связи учебного процесса с научно-исследовательской деятельностью, является необходимым средством целенаправленности профессиональной подготовки студента. Самостоятельная работа способствует систематизации, закреплению и расширению теоретических знаний, формирует у студента умения и навыки самостоятельного анализа.

В процессе изучения данной дисциплины студенты должны сначала изучить теоретический материал и выработать навыки решения типовых задач, используя рекомендованную литературу, а затем выполнить задания своего варианта.

При выполнении работы необходимо придерживаться указанных ниже правил:

1. Самостоятельная работа должна быть выполнена студентом в отдельной ученической тетради с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя.

2. На обложке тетради указываются: название дисциплины; номер варианта и номера решаемых задач; Ф.И.О. студента, выполнившего работу, его номер группы; Ф.И.О. преподавателя, проверяющего работу.
3. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы или указывается преподавателем.
4. Условия задач переписываются полностью, без сокращения слов, после чего приводится их подробное решение. В конце решения приводится ответ.
5. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по порядку номеров. Работы, содержащие не все задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.
6. Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.
7. Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления.
8. Работа может быть выполнена заново в случае выявления серьёзных замечаний и ошибок.
9. В конце тетради рекомендуется оставлять несколько чистых страниц для дополнений и исправлений.

После проверки самостоятельная работа предъявляется к защите. На защите студент должен показать свое умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

Оценки **«отлично»** заслуживает студент, который всесторонне и глубоко раскрыл содержание поставленных задач, показал взаимосвязь теории с практикой, продемонстрировал умение работать с литературой, делать теоретические и практические выводы. При этом должны быть полностью освещены теоретические вопросы и верно решены практические задания.

Оценки **«хорошо»** заслуживает студент, который обстоятельно владеет материалом, однако не на все вопросы дает глубокие исчерпывающие и аргументированные ответы. При этом должен быть полностью и верно решены практические задания.

Оценки **«удовлетворительно»** заслуживает студент, который в основном владеет материалом, однако поверхностно отвечает на вопросы, допускает существенные неточности. Ответы не отличаются ясностью и глубиной. При этом должен быть полностью и верно решено практическое задание.

Оценки **«неудовлетворительно»** заслуживает студент в том случае, когда не может ответить на вопросы рецензента, не владеет материалом работы, не в состоянии дать объяснения решению задач, работа оформлена крайне неряшливо. При этом, независимо от правильности ответа на теоретические вопросы, если не решены практические задания, студенту также выставляется оценка **«неудовлетворительно»**. В этом случае студенту предстоит повторная защита.

Защита и оценка работы - это подведение итогов самостоятельной работы студента и получение права допуска к экзамену.

Общие методические указания

по организации деятельности обучающихся

в период подготовки к зачету (экзамену)

Дифференцированный зачет(экзамен) осуществляется после успешного прохождения обучающимися полного комплекса текущего и промежуточного контроля. Дифференцированный зачет(экзамен) проводится в виде выполнения контрольной работы или теста.

Успешность сдачи зачетной работы(экзамена) зависит от нескольких факторов. Основной из них – активность, системность и целенаправленность учебной деятельности в течение семестра. Это относится ко всем без исключения обучающимся. Следующий по важности фактор – выбор правильной методики подготовки.

Рекомендации для подготовки к зачетной работе(экзамену):

- Обеспечьте дома удобное место для занятий.
- Распределите материал для подготовки по количеству времени, оставшемуся до сдачи экзамена.
- Определите для себя наиболее сложные вопросы и выделите время для возврата к ним в ходе подготовки.
- Соблюдайте технику безопасности за персональным компьютером.
- Приучайте себя контролировать режим подготовки, не допускайте перегрузок.
- Делайте короткие перерывы, проводите гимнастику для глаз.

Выполнение тестовых заданий

Инструкция для обучающегося

Выполните задания. Решение должно быть полным, записывайте ход решения задачи и все необходимые математические выкладки. Полученный ответ следует округлять до двух значащих цифр. Во время выполнения заданий можно использовать калькулятор, ПК без выхода в Интернет.

Время выполнения зачетной работы(экзамена) – два часа (120 минут).

4.2. Материалы текущего контроля знаний студентов

Контрольная работа по теме «Элементы линейной алгебры»

1 вариант

1. Найдите произведение матриц AB

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определитель $\begin{vmatrix}3 & 3 & 2\\ 5 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}$.

3. Найдите матрицу, обратную к данной: $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}$.

Контрольная работа по теме

«Элементы линейной алгебры»

2 вариант

1. Найдите произведение матриц AB

$$A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определитель $\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 8 & 7 & -1\end{vmatrix}$.

3. Найдите матрицу, обратную к данной: $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

Контрольная работа по теме «Элементы линейной алгебры»

3 вариант

1. Найдите произведение матриц AB

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определитель $\begin{vmatrix}3 & 2 & 3\\ 5 & -2 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}$.

3. Найдите матрицу, обратную к данной: $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & -5 & 4\end{pmatrix}$.

Контрольная работа по теме
«Элементы линейной алгебры»

4 вариант

1. Найдите произведение матриц AB

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 8 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

3. Найдите матрицу, обратную к данной: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа по теме
«Элементы линейной алгебры»

ОТВЕТЫ

№ задания	***1вариант***	***2 вариант***	***3 вариант***	***4 вариант***
1	$\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 25 & 23 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 19 & 11 \\ 37 & 23 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 37 & 23 \\ 19 & 11 \end{pmatrix}$
2	-50	33	50	-33

3	$\begin{pmatrix} -\frac{}{9} & \frac{11}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{19}{27} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{27} \\ \frac{14}{27} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{27} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{19}{39} & -\frac{8}{39} & -\frac{7}{39} \\ \frac{14}{39} & -\frac{10}{39} & \frac{1}{39} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{}{9} & \frac{11}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{14}{27} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{27} \\ \frac{19}{27} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{27} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{14}{39} & -\frac{10}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{19}{39} & -\frac{8}{39} & -\frac{7}{39} \end{pmatrix}$

Контрольная работа по теме «Системы линейных уравнений»

1 вариант

1. Решите систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 5x + y - 3z = -2; \\ 4x + 3y + 2z = 16; \\ 2x - 3y + z = 17. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -3; \\ x + 2y - z = 4; \\ 3x + y + 3z = 3. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений матричным способом

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5; \\ 2x - y - z = 1; \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$$

Контрольная работа по теме «Системы линейных уравнений»

2 вариант

1. *Решите систему уравнений по формулам Крамера*

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 10; \\ x + 5y - 2z = -15; \\ 2x - 2y - z = 3. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -3; \\ x + 5y - z = -1; \\ 3x + y + 4z = 11. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений матричным способом

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2; \\ 3x + 2y + 2z = -2; \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

Контрольная работа по теме «Системы линейных уравнений»

ОТВЕТЫ

№	*1 вариант*	*2 вариант*
1	*(3; -2; 5)*	*(1; -2; 3)*
2	*(-1; 3; 1)*	*(-2; 1; 4)*
3	*(1; -1; 2)*	*(2; -1; -3)*

Контрольная работа по теме «Основы дифференциального исчисления»

Вариант 1

1. Найти пределы функций

а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-x}{3-\sqrt{x+6}}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{3x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 20x}$.

2. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{\ln(x-15)}.$$

3. Найдите производную функции $y = e^{x^2 - \frac{3}{4}} \cdot \arccos x$

в точке $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sin^2 4x$

в точке $x_0 = \frac{\pi}{16}$.

5. Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости графика функции

$$y = \frac{x^4}{6} - 3x^2 .$$

Контрольная работа по теме «Основы дифференциального исчисления»

Вариант 2

1. Найти пределы функций

а) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{4-x}{4-\sqrt{x+12}}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 18x}$.

2. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 25} \frac{\sqrt{x}-5}{\ln(x-24)} .$$

3. Найдите производную функции $y = e^{x^2 - \frac{1}{2}} \cdot \arcsin x$

в точке $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \cos^2 6x$

в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{24}$.

5. Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости графика функции

$y = \dfrac{x^4}{3} - 6x^2$.

Контрольная работа по теме «Основы дифференциального исчисления»

ОТВЕТЫ

№ задания	**1 вариант**	**2 вариант**
1 а)	6	8
1 б)	e^{12}	e^{12}
1 в)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$
3	$\frac{\sqrt{3}\pi}{6} - 2$	$\frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 2\sqrt{}$

4	$y = 4x + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$	$y = -6x + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$
5	$\left(-\sqrt{3};-7,5\right)$ и $\left(\sqrt{3};-7,5\right)$ координаты точек перегиба $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ и $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ промежутки выпуклости вниз $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ промежуток выпуклости вверх	$\left(-\sqrt{3};-15\right)$ и $\left(\sqrt{3};-15\right)$ координаты точек перегиба $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ и $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ промежутки выпуклости вниз $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ промежуток выпуклости вверх

Аналитическая геометрия (прямая)

1вариант

1) Даны три вершины параллелограмма A(3;7) B(-1;3) C(2;-1) вычислить длину высоты, проведѐнной из вершины C.
2) Определить угол между двумя прямыми: 5x-y+7=0, 3x+2y=0
3) Даны две противоположные вершины квадрата A(-1;3) и C(6;2). Составить уравнения его сторон.
4) Установить какие из следующих пар прямых перпендикулярны: 3x-y+5=0 и x+3y-1=0; 6x-15y+7=0 и 10x+4y-3=0; 7x-2y=0 и 4x+6y+17=0
5) Составить уравнение прямой, которая проходит через точку C(1;1) и отсекает от координатного угла треугольник с площадью равной 2.

2 вариант

1) Площадь параллелограмма равна 17; две его вершины A(2;1) и B(5;-3). Найти две другие вершины, если точка пересечения диагоналей лежит на оси ординат.
2) Определить угол между двумя прямыми: 3x-2y+7=0, 2x+3y-3=0

3)Точка E(1;-1) является центром квадрата, одна мз сторон лежит на прямой x-2y+12=0. Составить уравнения его сторон.

4)Установить какие из следующих пар прямых перпендикулярны: 3x-4y+1=0 и 4x-3y+7=0; 9x-12y+5=0 и 8x+6y-13=0; 5x-7y+3=0 и 3x+2y-5=0

5) Составить уравнение прямой, которая проходит через точку C(5;-5) и отсекает от координатного угла треугольник с площадью равной 50.

Окружность, эллипс.

1 вариант.

Какие из нижеприводимых уравнений определяют окружности? Найти центр C и радиус R каждой из них:

1) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + x = 0$,

2. Вычислить кратчайшее расстояние от точки до окружности а) $A(6; -8)$, $x^2 + y^2 = 9$;

3. Составить уравнение хорды окружности

$(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 169$, делящейся в точке $M(8,5; 3,5)$ пополам.

4. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) его полуоси равны 5 и 2;

2) его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

5. Определить точки эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, расстояние которых до правого фокуса равно 14.

2 вариант.

1.Какие из нижеприводимых уравнений определяют окружности? Найти центр C и радиус R каждой из них:

1) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + y = 0$

2. Вычислить кратчайшее расстояние от точки до окружности

б) $B(3; 9)$, $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$;

3. Определить длину хорды окружности $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$, делящейся в точке $A(1; 2)$ пополам.

4. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

2) расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами 2с = 4;

5. Определить точки эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$, расстояние которых до левого фокуса равно 2,5.

Гипербола, парабола.

1вариант.

1. Дана точка $M_1(10; -\sqrt{5})$ на гиперболе

$$\frac{x^2}{80}-\frac{y^2}{20}=1.$$

Составить уравнения прямых, на которых лежат фокальные радиусы точки M_1.

2. Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, расстояние которых до левого фокуса равно 7.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:

1) точки $M_1(6; -1)$ и $M_2(-8; 2\sqrt{2})$ гиперболы;

2) точка $M_1(-5; 3)$ гиперболы и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$;

4. Составить уравнение гиперболы, если известны её эксцентриситет $\varepsilon = \frac{13}{12}$, фокус $F(0; 13)$ и уравнение соответствующей директрисы $13y-144 = 0$.

6. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = -2\sqrt{x}$, 2) $x = +\sqrt{5y}$, 3) $x = -5\sqrt{-y}$,

Изобразить эти линии на чертеже.

7. Составить уравнение параболы, если даны её фокус $F(7; 2)$ и директриса $x - 5 = 0$.

$y + 1 = 0$.

8. Определить точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1$ параболы $y^2 = 24x$.

2 вариант.

1. Убедившись, что точка $M_1(-5; \frac{9}{4})$ лежит на гиперболе

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1,$$

определить фокальные радиусы точки M_1.

2. Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$, расстояние которых до правого фокуса равно 4,5.

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:

1) точка $M_1(\frac{9}{2}; -1)$ гиперболы и уравнения асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$;

2) точка $M_1(-3; \frac{5}{2})$ гиперболы и уравнения директрис $y = \pm\frac{4}{3}$;

4. Составить уравнение гиперболы, если известны её эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$,

фокус F (5; 0) и уравнение соответствующей директрисы 5х — 16 = 0.
Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = +2\sqrt{x}$, 2) $y = +\sqrt{-x}$, 3) $y = -3\sqrt{-2x}$,

Изобразить эти линии на чертеже.

7. Составить уравнение параболы, если даны её фокус *F(4;* 3) и директриса

8. Определить точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$

и параболы $y^2 = 3x$.

ВОПРОСЫ К ЗАЧЁТУ

по дисциплине: «Высшая математика»

090803

III СЕМЕСТР

Раздел 1. Линейная алгебра.

1. Что называется матрицей?
2. Что называется матрицей-строкой, матрицей столбцом?
3. Какие матрицы называются прямоугольными, квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Какая матрица называется единичной?
8. Какая матрица называется треугольной?
9. Что значит транспонировать матрицу?
10. Что называется суммой матриц?
11. Что называется произведением матрицы на число?
12. Как найти произведение двух матриц?
13. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?
14. Что называется определителем матрицы?

15. Как вычислить определитель третьего порядка по схеме треугольников? **16.** Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя? **17.** Как разложить определитель по элементам столбца или строки? **18.** Перечислите свойства определителя.

19. Какая матрица называется обратной по отношению к данной? **20.** Каков алгоритм нахождения обратной матрицы?

Раздел 2. Элементы аналитической геометрии

1. Что называется уравнением прямой?
2. Каким уравнением описывается прямая на плоскости?
3. Как записывается каноническое уравнение прямой?
4. Запишите уравнения осей координат.
5. Запишите уравнения прямых, параллельных осям координат.
6. Сформулируйте правило составления уравнения прямой на плоскости.

7. Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
8. Сформулируйте условие параллельности прямых.
9. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых.
10. Как найти угол между прямыми?
11. Каким уравнением описывается кривая на плоскости?
12. Запишите каноническое уравнение эллипса.
13. Что называется эксцентриситетом эллипса? Какова его величина?
14. Чему равен эксцентриситет окружности?
15. Запишите каноническое уравнение гиперболы.
16. Запишите уравнение равносторонней гиперболы.
17. Запишите каноническое уравнение параболы, директрисы параболы.

РАЗДЕЛ 3.
Основы дифференциального исчисления.

1. Дайте определение предела в точке.
2. Объясните раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$.
3. Дайте определение предела функции на бесконечности. Объясните основной метод раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.
4. Сформулируйте теоремы о пределах.
5. Сформулируйте и напишите первый и второй замечательные пределы.
6. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?
7. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает?
8. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной.
9. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируйте зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
10. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции? Как вычислить частное значение производной?
11. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
12. Выпишите в таблицу основные правила и формулы дифференцирования функций.
13. Повторите определение сложной функции. Как найти ее производную?
14. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
15. В чем заключается механический смысл производной?
16. Что называется производной второго порядка и, каков ее механический смысл?

17. Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл?
18. Повторите определения возрастающей и убывающей функций. В чем заключается признак возрастания и убывания функций?
19. В чем заключаются необходимый и достаточный признаки существования экстремума? Перечислите порядок операций для отыскания максимума и минимума функции с помощью первой производной.
20. В чем различие между нахождением максимума и минимума функции и нахождением ее наибольшего и наименьшего значений?
21. Как пишется наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке?
22. Как определяются геометрически и по знаку второй производной выпуклость и вогнутость кривой?
23. Что называется точкой перегиба и каковы необходимый и достаточный признаки ее существования? Сформулируйте правило нахождения точки перегиба.
24. Какой схемой рекомендуется пользоваться при построении графика функции?

РАЗДЕЛ 4.
Функции нескольких переменных.

1.Функции нескольких переменных. Основные понятия.

2. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ
по дисциплине: «Высшая математика»
090803

IV семестр

РАЗДЕЛ 5.
Основы интегрального исчисления.

1. Что является основной задачей интегрального исчисления?
2. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
3. Почему при интегрировании функций появляется произвольная постоянная?
4. Почему одна функция имеет целую совокупность первообразных?
5. Как записать всю совокупность первообразных функций?
6. Что называется неопределенным интегралом?
7. Почему интеграл называется неопределенным?
8. Что означает постоянная С в определении неопределенного интеграла?
9. В чем заключается правило интегрирования выражения, содержащего постоянный множитель?
10. В чем заключается правило интегрирования алгебраической суммы функций?
11. Чему равен интеграл от дифференциала некоторой функции?
12. Напишите основные формулы интегрирования.
13. Как проверить результата интегрирования?
14. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?
15. Что такое интегральные кривые? Как они расположены друг относительно друга? Могут ли они пересекаться?
16. Что такое определенный интеграл?
17. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
18. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
19. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю и почему?
20. Какие интегралы называются несобственными?

Раздел 6.
Основы теории комплексных чисел.

1. Дайте определение мнимой единицы.
2. Как вычисляют степени мнимой единицы?
3. Какое число называется комплексным?

4. Какие комплексные числа называются чисто мнимыми? Приведите примеры комплексных чисел, чисто мнимых чисел.

5. Какие комплексные числа называются равными?

6. Какие комплексные числа называются сопряженными?

7. Как выполняются сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме?

8. Как выполняется деление комплексных чисел в алгебраической форме?

9. Как геометрически изображаются комплексные числа?

10. Что называется модулем и аргументом комплексного числа? **11.** Напишите формулы для модуля и аргумента комплексного числа.

12. Какие корни и сколько корней имеет квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом?

13. Как решить квадратное уравнение, если дискриминант его отрицателен?

14. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?

Как записывается комплексное число в показательной форме? Формула Эйлера.

15. Сформулируйте правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и обратно.

16. Сформулируйте правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к показательной и обратно.

17. Как перейти от тригонометрической формы комплексного числа к показательной и обратно.

18. Как умножаются комплексные числа, записанные в тригонометрической форме.

19. Как умножаются комплексные числа, записанные в показательной форме?

20. Сформулируйте правило деления комплексных чисел в тригонометрической форме.

Раздел 7.
Дифференциальные уравнения, их виды и методы решения.

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Какая функция называется решением дифференциального уравнения?
3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим и какое называется частным?
4. Каков геометрический смысл общего и частного решений дифференциального уравнения?
5. Может ли дифференциальное уравнение иметь конечное число решений?
6. Что такое порядок дифференциального уравнения и как его определить?

7. Сколько постоянных интегрирования имеет общее решение дифференциального уравнения первого, третьего порядка?
8. Как проверить, правильно ли найдено решение дифференциального уравнения?
9. Чем отличается дифференциальное уравнение от алгебраического уравнения?
10. Назовите известные вам типы дифференциальных уравнений.
11. Каков общий вид дифференциальных уравнений первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными?
12. Как решается уравнение с с разделенными переменными?
13. Чем отличается уравнение с разделяющимися переменными от уравнения с разделенными переменными? Как разделяют переменные?
14. Каков алгоритм решения уравнения с разделяющимися переменными?
15. В чем заключается задача Коши? Каков его геометрический смысл? 16. Каков общий вид линейных дифференциальных уравнений первого порядка?
17. Какими величинами являются и от чего зависят коэффициенты p и q в линейном дифференциальном уравнении первого порядка?
18. С помощью какой подстановки решается линейное дифференциальное уравнение первого порядка и к какому уравнению сводится его решение?
19. Какой вид имеет простейшее дифференциальное уравнение второго порядка? Как оно решается?
20. Как определяется и как записывается в общем виде линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами?
21. Что такое характеристическое уравнение?

Раздел 8.
Теория рядов.

1. Дайте определение числового ряда.
2. Что является суммой ряда?
3. Какой ряд называется сходящимся (расходящимся)?
4. Назовите свойства сходящихся рядов.
5. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
6. Назовите достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.
7. В чем заключается признак сравнения?
8. Сформулируйте признак сходимости Даламбера.
9. В чем заключается признак Коши и интегральный признак?
10. В чем отличие знакопеременного ряда от знакочередующегося?
11. Дайте определение абсолютно сходящегося ряда и условно сходящегося ряда

12. Сформулируйте признак Лейбница о сходимости знакопеременного ряда.
13. Понятие степенного ряда.
14. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена.

Зачѐт по дисциплине «Элементы высшей математики» 2 курс, специальность 09.08.03

1 вариант

1. Найти произведение матриц АВС, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 23 \\ 59 \end{pmatrix}$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 3x-8y+6z=5, \\ -5x+4y+3z=12, \\ 7x+2y-5z=-4. \end{cases}$$

4. Найдите матрицу, обратную к данной: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

5. Составить уравнения двух прямых, проходящих через точку А(3; 2), параллельно и перпендикулярно прямой 4x – 3y + 1 = 0.

6. Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, расстояние которых до левого фокуса равно 7.

7. Найти предел функции

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{3x}$,

8. Найдите производную функции $y=e^{x^2-\frac{3}{4}}\cdot\arccos x$

в точке $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2 вариант

1. Найти произведение матриц ABC, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 59 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 12, \\ -7x + 9y + 3z = -6, \\ 3x + 4y - 2z = 9. \end{cases}$$

4. Найдите матрицу, обратную к данной: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

5.Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:
1) точки $M_1(6; —1)$ и $M_2(—8; 2\sqrt{2})$ гиперболы;

6. Составить уравнения двух прямых, проходящих через точку A(5; 1), параллельно и перпендикулярно прямой 2x – 5y + 3 = 0.

7. Найти предел функции

a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3 - x}{3 - \sqrt{x + 6}}$,

8. Найдите производную функции $y = e^{x^2 - \frac{1}{2}} \cdot \arcsin x$

в точке $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3 вариант

1. Найти произведение матриц АВС, если

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 39 \\ 83 \end{pmatrix}$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 2x-5y+6z=11, \\ -9x+2y+3z=9, \\ 5x+y-4z=-8. \end{cases}$$

4. Найдите матрицу, обратную к данной: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Составить уравнения двух прямых, проходящих через точку А(2; 3), параллельно и перпендикулярно прямой 5x – 2y + 4 = 0.

6. Определить точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=-1$ и параболы $y^2=3x$.

7. Найти предел функции

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 20x}$.

8. Найдите производную функции $y=e^{x^2-\frac{3}{4}}\cdot \arccos x$ в точке $x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 4

1. Найти произведение матриц АВС, если

$$A=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 6 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

2. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}5 & 6\\ 3 & 4\end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix}83\\ 53\end{pmatrix}$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 3x-8y+z=7,\\ -5x+4y+2z=-10,\\ 2x+7y-3z=6.\end{cases}$$

4. Найдите матрицу, обратную к данной: $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}$.

5. Составить уравнения двух прямых, проходящих через точку А(4; 1), параллельно и перпендикулярно прямой 3х – 4у + 2 = 0

6. Составить уравнение параболы, если даны её фокус *F(4;* 3) и директриса

7. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-x}{4-\sqrt{x+12}}$,

8. Найдите производную функции $y=e^{x^2-\frac{1}{2}}\cdot\arcsin x$

в точке $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Материалы для работы в IV семестре.

Текущий контроль.

Задачи 1.

Найти производные : sin2a, (cosα)3, tgα, ctgα

При каких значениях x определитель > 0 : А= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ X & 2 \end{pmatrix}$

Найти производную функции: y=x3+2x-5 при x= -1

Найти производную функции : y= (sin x) 2 в точке x=0,5 П

Является ли число 289 членом числовой последовательности, an= n2 + 2n + 1.

Вычислить первые 5 членов последовательности an = 2n – 1 и изобразить их точками на числовой оси.

Доказать: Lim 7n – 1 = 7
n→∞ n

Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3y \cdot 2x+1 = 36 \\ \mathrm{Log}\sqrt{3}(x + y) = 2 \end{cases}$

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + 5y=13 \\ 20y – x = 12. \end{cases}$

Найти : Lim n + 3 = 1.
n→∞ n

Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x + y=5. \\ X- 2y= 0 \end{cases}$

Вычислить интеграл: x2 + 1/x4

Проинтегрировать: 5x4 – 8 cos x+3

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + y+z=6 \\ x - y+z =2 \\ x + y-z = 0 \end{cases}$

Найти главный определитель: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

Найти перемещение тела за 3сек. движущегося по закону V=(3t2 +4t + 1).

Доказать, что последовательность (x_n) – сходящиеся $x_n = \frac{9n - 3}{3n}$

Найти одну из первообразных функцию: $f(x) = 3x^5 - 2x^2$

Найти промежутки возрастания и убывания функции; найти точки экстремума функции: $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Найти промежутки возрастания и убывания функции; найти точки экстремума функции: $f(x) = 4x^3 + 10x + 1$

Вычислить значение производной функции: $f(x) = \frac{3x^2 - x + 7}{2x + 5}$, при $x=1$

Найти: $\lim\limits_{x \to -1} (2x^2 + 3x - 2)$

Найти производную функции: $y = \frac{x^2 - x - 2}{x}$

Найти производную функции: $y = \sin x \cdot e^x$

Найти предел функции: $y = \frac{x^3 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 3}$ при $x \to 3$

Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ X - 2y - 5z = -9 \\ 4x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$

Решить уравнение: $x + A = B$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Доказать непрерывность функции: $y = (3x)^2 - 1$.

Найти общий вид первообразных для функции $f(x) = 3 \cos 2x$

Тесты.

ВАРИАНТ 1

1.Числовой последовательностью называется:

a) ряд чисел, заданных формулой; b) ряд векторов; c) ряд стульев.

2. Последовательность задана формулой общего элемента $x_n = n^2$. Найдите первые три члена этой последовательности:

a) 1;4;9 b) 2;6;8 c) 1;1;1.

Ответ:____________________________

3. Последовательность задана числами 1,4,7,10,… Задайте ее формулой xn+1 =?

Ответ:____________________________

4.Что называется функцией?

a) число;

b) правило, по которому каждому значению аргумента x в соответствует одно и только одно значение функции y;

c) вектор.

Ответ:____________________________

5. Функция называется непрерывной на отрезке [a;b], если:

a) функция не существует на этом отрезке;

b) функция непрерывна в каждой точке этого отрезка;

c) функция зависла на этом отрезке;

Ответ:____________________________

6.Точками разрыва функции называются точки, в которых

a) нарушается непрерывность функции;

b) нарушаются правила дорожного движения;

c) нарушается последовательность чисел.

Ответ:____________________________

7. Что называется точкой перегиба функции?

a) вектор; b) число; c) точку с координатами (x0;y0) на кривой.

Ответ:____________________________

8.Точку перегиба функции находят:

a) с помощью транспортира; b) с помощью производной; c) с помощью МЧС.

Ответ:____________________________

9.Чтобы кривая имела перегиб при x=x0,необходимо:

a) чтобы вторая производная в точке x0 либо обращалась в нуль, либо не существо-
вала;

b) чтобы функция не существовала; c) чтобы число не существовало.

Ответ:____________________________

10.Исследуйте функцию на точку перегиба с помощью производной: f(x)= x3 – 3x2+1

Ответ:____________________________

11. Матрицей называется:

a) треугольник; b) вектор; c) прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Ответ:____________________________

12. У квадратной матрицы можно вычислить:

a) определитель; b) ускоритель; c) удлинитель.

Ответ:____________________________

13.Вычислите определитель матрицы: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

Ответ:____________________________

14. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ x-2y=3. \end{cases}$$

Ответ:_______________________

15. Всякая непрерывная на промежутке (a; b) функция имеет на этом промежутке первообразную, а следовательно и:

a) неопределенный интеграл; b) неопределенную личность;
c) неопределенный объект.

Ответ:____________________________

16.Решите неопределенный интеграл:

$\int x3dx$ Ответ:_______________________

17. Определенный интеграл отличается от неопределенного тем, что это:
a) число; b) фигура; c) промежуток времени.

Ответ:____________________________

18. Определенный интеграл существует, если функция:
a) не существует; b) непрерывна на отрезке [a;b]; c) имеет точку разрыва.

Ответ:____________________________

19. Вычислите интеграл:

$\int_0^1 3x2dx$ Ответ:_______________________

ВАРИАНТ 2.

1. Ряд чисел, заданных формулой называется:
a) числовой последовательностью; b) ряд стульев; c) ряд векторов.

Ответ:____________________________

2. Последовательность задана формулой общего элемента xn=n3.
Найдите первые три члена этой последовательности:
a) 1;4;9 b) 2;6;8 c) 1;8;27.

Ответ:____________________________

3. Последовательность задана числами 2,5,8,11,… Задайте ее формулой xn+1 =?

Ответ:____________________________

4.Функция это?
a) правило, по которому каждому значению аргумента x соответствует одно и только одно значение функции y;
b) число;

c) вектор.

Ответ:____________________________

5.Если функция непрерывна в каждой точке отрезке [a;b], то

a) функция не существует на этом отрезке;

b) функция зависла на этом отрезке;

c) она непрерывна на этом отрезке.

Ответ:____________________________

6. В точках разрыва функции происходит следующее:

a) нарушается последовательность чисел.

b) нарушаются правила дорожного движения; c) нарушается непрерывность функции.

Ответ:____________________________

7. Точкой перегиба функции называется

a) точка с координатами (x0;y0) на кривой; b) число; c) вектор.

Ответ:____________________________

8.Чтобы найти точку перегиба функции надо найти:

a) транспортир; b) производную этой функции; c) службу МЧС.

Ответ:____________________________

9.Кривая имеет перегиб при x=x0, если:

a) это не кривая; b) эта функция не существует;

c) вторая производная в точке x0 либо обращалась в нуль, либо не существовала.

10.Найдите точку перегиба функции с помощью производной:

f(x)= x4 – 2x2–1

Ответ:____________________________

11. Прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов – это:

a) треугольник; b) вектор; c) матрица.

Ответ:____________________________

12. Определитель матрицы это:

a) число; b) вектор; c) функция.

Ответ:____________________________

13.Вычислите определитель матрицы: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

Ответ:____________________________

14. По правилу Крамера решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x+2y=-1. \end{cases}$$

Ответ:________________________

15. Если функция непрерывна на отрезке (a; b) и имеет на этом отрезке первообразную, то она имеет:

a) неопределенный объект; b) неопределенную личность;
c) неопределенный интеграл.
Ответ:______________________

16.Решите неопределенный интеграл:
∫ x4dx Ответ: ______________________

17. Определенный интеграл это:
a) число; b) фигура; c) промежуток времени.
Ответ: ______________________

18. Определенный интеграл существует, если функция:
a) не существует; b) непрерывна на отрезке [a;b]; c) имеет точку разрыва.
Ответ:______________________

19. Вычислите интеграл:

$$\int_0^1 4x3dx$$

Ответ:______________________

ВАРИАНТ1.

a
2. a
3. xn+1= xn+3
4. a
5. b
6. a
7. c
8. b
9. a
10.f '(x)=3x2 – 6x
f '' (x)= 6x– 6=0
6x=6
x=1.
11. c
12. a
13. Δ=12 – 10 =2.
14. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$
15. a
16. x4+C
17. a
18. b

ВАРИАНТ 2

1. a
2.c
3. xn+1= xn+3
4. a
5. c
6. c
7. a
8. b
9. c
10. f '(x)=4x3 – 4x
f '' (x)= 12x – 4=0
12x=4
x=1/3.
11. c
12. a
13. Δ=8 – 5 =3.
14. $\begin{cases} x=1 \\ y=–1 \end{cases}$
15. c
16. x5+C
17. a
18. b

19. x3 $\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$ 19. x4 $\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$

Материалы для проведения практических занятий.(IVсеместр)

Тема 1. Исследование функции на непрерывность.

Цель: Овладение практическими навыками определения непрерывности функции в точке и установления характера разрыва функции.

Определения непрерывности функции в точке. Понятие непрерывности справа и слева. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва функции, их классификация. Непрерывность функции на множестве. Основные свойства функций, непрерывных на отрезке.

Пример выполнения задания. Определить точки разрыва функции и исследовать их характер.

а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$; б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, & x \le 1, \\ 2^x, & x > 1. \end{cases}$

Решение. а)

Функция $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ не определена в точке $x = 1$, следовательно, она не является непрерывной в этой точке. Так как

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2,$$

то $x = 1$ - точка устранимого разрыва первого рода. Данную функцию можно доопределить по непрерывности при $x = 1$, взяв за значение функции в этой точке величину односторонних пределов:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{если } x \ne 1 \\ 2, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

б) Функция $y = \dfrac{1}{x+1}$ определена и непрерывна на множестве $(-\infty, -1) \cup (-1, 1]$, так как в точке $x = -1$знаменатель обращается в нуль. Вычислим односторонние пределы в точке $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{1}{x+1} = \left(\frac{1}{-0} \right) = -\infty; \quad \lim_{x \to -1+0} \frac{1}{x+1} = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty.$$

Так как оба односторонних предела в точке $x = -1$бесконечны, то $x = -1$ является точкой разрыва второго рода.

Функция $y = 2^x$ при $x > 1$ определена и непрерывна. Функция $y = f(x)$ определена в точке $x = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$. Вычислим односторонние пределы в точке $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \to 1+0} 2^x = 2.$$

Односторонние пределы функция $y = f(x)$ в точке $x = 1$ конечны, но не равны между собой. Следовательно, точка $x = 1$ является точкой разрыва первого рода.

Скачок функции в этой точке равен $f(1+0) - f(1-0) = 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Задание. Определить точки разрыва функции и исследовать характер точек разрыва:

1.1. а) $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$; б) $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x\le 0;\\ 2x-1, & x>0.\end{cases}$

1.2. а) $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^3}$; б) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0,\\ 1-x, & 0<x\le 1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1\end{cases}$

1.3. а) $f(x)=\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$; б) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 2,\\ \dfrac{1}{2}, & x>2\end{cases}$

1.4. а) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$; б) $f(x)=\begin{cases} -x, & x<0,\\ tgx, & 0\le x<\dfrac{\pi}{4},\\ 2, & x\ge\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

1.5. а) $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$; б) $f(x)=\begin{cases} 2^{x}, & |x|<1;\\ 2, & |x|\ge 1.\end{cases}$

1.6. а) $f(x)=arctg\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0,\\ 1-x, & 0\le x\le 2,\\ 2, & x>2\end{cases}$

1.7. а) $f(x)=\sqrt{x}\,arctg\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x<4,\\ 3, & x\ge 4\end{cases}$

1.8. а) $f(x)=\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$; б) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2\end{cases}$

1.9. а) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$; б) $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{x-1}, & x>0\end{cases}$

1.10. а) $f(x)=\dfrac{3^{\frac{1}{x-2}}}{3^{\frac{1}{x-2}}+1}$; б) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{2}, & x\le 0,\\ \cos x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ x-\dfrac{\pi}{2}, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

1.11. а) $f(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}$; б) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x\le 0,\\ 2, & 0<x\le 2,\\ x, & x>2\end{cases}$

1.12. а) $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$; б) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le \pi,\\ x-2, & x>\pi\end{cases}$

1.13. а) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$; б) $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x\le 1,\\ 2, & x>1\end{cases}$

1.14. а) $f(x)=\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$; б) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\le 1,\\ arctg x, & x>1\end{cases}$

1.15. а) $f(x)=x\cdot\sin\frac{\pi}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+1}, & x\le 4,\\ \sqrt{x-4}, & x>4\end{cases}$

1.16. а) $f(x)=\frac{x\ln(x+1)}{x-1}$; б) $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x-2}, & x\le 4,\\ -\sqrt{x}, & x>4\end{cases}$

1.17. а) $f(x)=arctg\frac{1}{1-x^2}$; б) $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}, & x\le 1,\\ 2^x, & x>1\end{cases}$

1.18. а) $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$; б) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\le \frac{\pi}{2},\\ \sin x, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$

1.19. а) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$; б) $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}, & x\le \frac{\pi}{2},\\ \cos x, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$

.20. а) $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$; б) $f(x)=\begin{cases}3^{-x}, & x\le -1,\\ \frac{1}{x}, & x>-1\end{cases}$

1.21. а) $f(x)=1-x\cdot\sin\frac{1}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\le 1,\\ \log_3 x, & x>1\end{cases}$

1.22. а) $f(x)=3^{\frac{x^2}{4-x}}$; б) $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x-1}, & x\le 10,\\ \log x, & x>10\end{cases}$

1.23. а) $f(x)=\frac{1}{x}\sin x$; б) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<0,\\ x, & 0<x\le 2,\\ 3, & x>2\end{cases}$

1.24. а) $f(x)=\dfrac{e^{-x}-1}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & x<1,\\ 2x-1, & x\ge 1\end{cases}$

1.25. а) $f(x)=(x+1)\cdot arctg\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<1,\\ \dfrac{1}{x}, & x\ge 1\end{cases}$

1.26. а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x-1)}$; б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<1,\\ x^2, & x\ge 1\end{cases}$

1.27. а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$; б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x<1,\\ 2^x, & x\ge 1\end{cases}$

1.28. а) $f(x)=\dfrac{2+x}{4-x^2}$; б) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x\le 0,\\ \sin x, & x>0\end{cases}$

1.29. а) $f(x)=x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\le -1,\\ \dfrac{1}{x+1}, & x>-1\end{cases}$

1.30. а) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$; б) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 1,\\ 2^x+1, & x>1\end{cases}$

Тема 2. Исследование функций с помощью производной и построение графиков.

Цель: Овладение практическими навыками полного исследования функции и построения графиков функции.

Схема проведения полного исследования функции. Возрастание и убывание функции, нахождение участков её монотонности. Стационарные и критические точки функции. Локальные экстремумы функции, условия их существования и нахождение. Глобальные экстремумы функции на отрезке, их нахождение. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба, условия их существования и нахождение. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции, условия их существования и нахождение. Построение графика функции.

Пример выполнения задания. Провести полное исследование функции

$y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}$ и построить её график.

Для построения графика функции $y=f(x)$ нужно:

1) *найти область определения функции;*
2) *найти область непрерывности функции и точки разрыва;*
3) *исследовать функцию на чётность, нечётность и периодичность;*
4) *найти точки пересечения графика с осями координат;*
5) *найти асимптоты графика функции;*
6) *найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции;*

7) найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Решение.

1) Находим область определения функции: $D(y)=\left\{x\in R \mid x^2+2x\neq 0\right\}$ $=(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$.

2) Поскольку данная функция является элементарной, то областью её непрерывности является область определения $D(y)$, а точками разрыва являются точки $x=-2$ и $x=0$, не принадлежащие множеству $D(y)$, но являющиеся предельными точками этого множества (точками в любой окрестности которых содержатся точки данного множества). Исследуем характер разрыва в точках $x=-2$ и $x=0$, вычислив в них односторонние пределы функции:

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-2)\cdot(-0)}=+\infty,\quad \lim_{x\to-2+0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-2)\cdot(+0)}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to0-0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-0)\cdot2}=-\infty,\quad \lim_{x\to0+0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(+0)\cdot2}=+\infty.$$

Так как односторонние пределы функции в точках $x=-2$ и $x=0$ - бесконечные, то данные точки являются точками бесконечного разрыва.

3) Функция не является периодической.

Функция $y=f(x)$, в аналитическое выражение которой входит хотя бы одна непериодическая функция периодической не является.

Проверяем является ли функция чѐтной или нечѐтной. Так как область определения функции $D(y)=(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$ не симметрична относительно точки $x=0$, то данная функция – общего вида.

4) Находим точки пересечения графика с осями координат.

Так как $x=0\notin D(y)$, то точек пересечения графика с осью Oy нет.

Положим $y=0$ и решим уравнение $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}=0$. Его решением является $x=-1$.

Следовательно, точка $(-1,0)$ - точка пересечения графика с осью Ox.

5) Находим вертикальные и наклонные асимптоты графика функции.

Прямая $x=x_0$ является вертикальной асимптотой, тогда и только тогда, когда x_0 является точкой бесконечного разрыва функции $y=f(x)$.

Так как точки $x=-2$ и $x=0$ - точки бесконечного разрыва данной функции, то вертикальными асимптотами графика функции являются прямые $x=-2$ и $x=0$.

Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to\pm\infty$ тогда и только тогда, когда одновременно существуют конечные пределы: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ *и* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$.

Вычисляем сначала пределы при $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{(x^2+2x)x}=0=k_1,\quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=1=b_1.$$

В дальнейшем будем иметь в виду следующий часто встречающийся предел:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_m}=\begin{cases}\infty & \text{если } n>m\\ a_0/b_0 & \text{если } n=m\\ 0 & \text{если } n<m\end{cases}$$

Следовательно $y=k_1x+b_1=0\cdot x+1$, т.е. $y=1$ - наклонная (горизонтальная) асимптота графика функции при $x\to-\infty$.

Аналогично вычисляем пределы при $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{(x^2+2x)x} = 0 = k_2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x} = 1 = b_2$ Следовательно $y = k_2 x + b_2 = 0 \cdot x + 1$, т.е. $y = 1$ - наклонная (горизонтальная) асимптота графика функции при $x \to +\infty$.

6) Определяем интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции. Для этого находим первую производную функции:

$$y' = \left(\frac{(x+1)^2}{x^2+2x} \right)' = \frac{((x+1)^2)' \cdot (x^2+2x) - (x+1)^2 (x^2+2x)'}{(x^2+2x)^2} = \frac{2(x+1)(x^2+2x) - (x+1)^2 (2x+2)}{(x^2+2x)^2} = -\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$$

и определяем критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки $x_i \in D(y)$ в которых $f'(x_i) = 0$ или $f'(x_i)$ не существует:

$$y' = -\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2} = 0 \Rightarrow \quad x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \in D(y);$$

y' не существует при $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D(y)$ и $x = -2 \notin D(y)$.

Таким образом, единственной критической (стационарной) точкой функции $y = f(x)$ является точка $x_1 = -1$.

Исследуем знак производной $y' = f'(x)$ в интервалах, на которые критические точки функции $y = f(x)$ разбивают её область определения $D(y)$, и найдём интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции. Результаты исследования представим следующей таблицей:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
y'	+	+	0	–	–
y	возрастает	возрастает	0	убывает	убывает

Так как при переходе слева направо через точку $x = -1$ производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на « – », то точка $x = -1$ является точкой локального максимума и $y_{\max} = y(-1) = 0$.

7) Определяем интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции. Для этого находим вторую производную функции:

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2} \right)' = -2 \left(\frac{(x+1)'(x^2+2x)^2 - (x+1)((x^2+2x)^2)'}{(x^2+2x)^4} \right) =$$

$$= -2 \left(\frac{(x^2+2x)^2 - (x+1) \cdot 2 \cdot (x^2+2x)(2x+2)}{(x^2+2x)^4} \right) = \frac{2(3x^2+6x+4)}{(x^2+2x)^3}$$

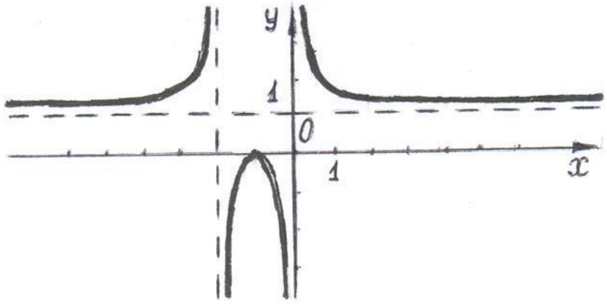
и определяем точки возможного перегиба $y = f(x)$, т.е. точки $x_i \in D(y)$ в которых $f''(x_i) = 0$ или $f''(x_i)$ не существует: $y'' = \frac{2(3x^2+6x+4)}{(x^2+2x)^3} \neq 0$, так как $3x^2 + 6x + 4 \neq 0$ (квадратное уравнение не имеет действительных корней); y'' не существует при $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D(y)$ и $x = -2 \notin D(y)$.

Таким образом, функция $y = f(x)$ не имеет точек возможного перегиба.

Исследуем знак второй производной $y'' = f''(x)$ в интервалах, на которые точки возможного перегиба функции $y = f(x)$ разбивают её область определения $D(y)$, и найдём интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции. Результаты исследования представим таблицей:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
y''	+	–	+
y	график вогнутый	график выпуклый	график вогнутый

Точек перегиба нет.
8) На основании полученных результатов строим график функции



Задание. Провести полное исследование функции $y = f(x)$ **и построить её график.**

2.1. $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 2}$ 2.2. $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$ 2.3. $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$ 2.4. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

2.5. 2.6. $y = \dfrac{x^3}{x^4 - 1}$ 2.7. $y = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$ 2.8. $y = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$

2.9. $y = \dfrac{x}{(1 - x^2)^2}$ **2.10**. $y = \dfrac{8}{x \cdot \sqrt{x^2 - 4}}$ **2.11.** $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **2.12.** $y = x - x^3$

2.13. $y = 2x^2 + 3x - 1$ **2.14.** $y = x + \dfrac{1}{x}$ **2.15.** $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$ **2.16.** $y = \dfrac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$

2.17. $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ **2.18.** $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2}$ **2.19.** $y = \sqrt{4 - 2x^2}$ **2.20.** $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

2.21. $y = x^3 - 3x^2 + 4$ 2.22. $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16$ 2.23. $y = 4 - x - \dfrac{4}{x^2}$ 2.24. $y = 2\sqrt{x} - x$

2.25. $y = x^3 - 3x^2 + 6$ 2.26. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ 2.27. $y = x^3 - 6x^2 + 6$

2.28. $y = x^3 - 3x^2 + 5$ 2.29. $y = \dfrac{10x + 10}{x^2 + 2x + 2}$ 2.30. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

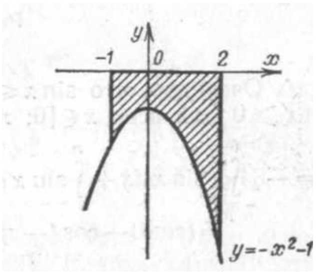
Тема 3. Геометрический смысл определенного интеграла. Приложение интеграла к решению прикладных задач.

Цель: Овладение практическими навыками решения прикладных задач.

Геометрический смысл определенного интеграла. Приложения определенного интеграла: вычисление площадей фигур, объемов, длин дуги, площади поверхности вращения. Решение физических и технических задач: вычисление работы, производимой силой; вычисление пути, пройденного материальной точкой.

<u>Пример выполнения задания.</u>

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 - 1$, $y=0$, $x=-1$, $x = 2$



$$S = -\int_{-1}^{2}(-x^2-1)dx = \int_{-1}^{2}(x^2+1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$\left(\frac{1}{3} * 2^3 + 2\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - 1\right) = 6.$$

Ответ: S = 6 кв.ед.

2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v = (6t^2 + 2t)$ м/с, второе — со скоростью $v = (4t+5)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение: очевидно, что искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 с:

$$s_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)dt = [2t^2 + t^2]_0^5 = 275\ (м), s_2 = \int_0^5 (4t+5)dt = [2t^2 + 5t]_0^5 = 75\ (м),$$
$$s_1 - s_2 = 275 - 75 = 200\ (м).$$

Задание 1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $y = x^3,\ y = 1,\ x = 2$	2) $y = \cos x,\ y = 0,\ x = -\frac{\pi}{4}$
3) $y = \sqrt{x},\ y = 2,\ x = 9$	4) $y = x^3,\ y = \sqrt{x}$
5) $y = \sin x,\ y = 0,\ x = -\frac{\pi}{4},\ x = -\frac{3\pi}{4}$	6) $y = \sqrt{x},\ y = \frac{1}{2}x$
7) $y = \frac{5}{x},\ y = 6 - x$	8) $y = \sin x,\ y = 0,\ x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{3\pi}{4}$
9) $y = x^4,\ y = x$	10) $y = x^2 + 4x + 4,\ x = 1,\ y = 0$
11) $y = (x-2)^2$ и осями координат	12) $y = \sqrt{x},\ y = \frac{1}{3}x$
13) $y = 3x^2,\ y = 0$ и прямой, проходящей через точки (-3; 0) и (-1; 3)	14) $y = 4x - x^2,\ x = 1,\ y = 0,\quad 1 \le x \le 4$
15) $y = x^2 + 1,\ y = 2$	16) $y = x^2 + 6x + 9,\ x = 0,\ y = 0$
17) $y = \cos x,\ y = 0,\ x = \frac{3\pi}{4},\ x = \frac{5\pi}{4}$	18) $y = (x+1)^2,\ y = 0,\ x = 0$ ответ округлить до десятых
19) $y = x^2 - 2x + 3,\ x = -1$ и касательной к графику в точке $x_0 = 2$	20) $y = x^3,\ y = x^2 + 2x$
21) $y = \frac{3}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = e^2$	22) $y = 3 + 2x - x^4,\ x = 0$ и касательной к графику функции в точке $x_0 = 0$
23) $y = \frac{1}{x^2},\ y = 0,\ x = 0{,}5;\ x = 2{,}5$	24) $y = x^2 + 4,\ y = 4x,\ y = -4x$
25) $y = \frac{2}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = e^3$	26) $y = 2x - x^2,\ y = \frac{3}{4}$
27) $y = \frac{1}{x^2},\ y = 0,\ x = 0{,}5;\ x = 2{,}5$	28) $y = x^2 - 4x,\ y = 0,\ x = 1,\quad 1 \le x \le 4$
29) $y = x^2,\ y = 3 - 2x^2$	

Тема 4. Нахождение экстремумов функций многих переменных.

Цель: Формирование практических навыков нахождения экстремумов функции многих независимых переменных.

Частные производные. Дифференциал, его связь с частными производными. Геометрический смысл частных производных и дифференциала. Достаточное условие дифференцируемости. Градиент и производная по направлению. Необходимые и достаточные условия экстремума функции нескольких переменных.

Задание 1

4.1.Найти производную функции $z = 2x^2 + 3xy + y^2$ в точке A(2;1) по направлению вектора $l = (3;-4)$.

4.2. Найти производную функции $z = x^2 - xy + y^2$ в точке M(1;1) в направлении вектора $l = (6;8)$.

4.3.Найти производную функции $z = \arcsin\frac{x^2}{y}$ в точке A(1;2) в направлении вектора $\boldsymbol{l} = (5;-12)$.

4.4. Найти величину и направление градиента функции $z = x^3 - 3xy + y^3$ в точке M(2;1).

4.5. Найти производную функции $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$ в точке M(1;2) в направлении вектора $\boldsymbol{MN}$, где N (5,5).

4.6. Найти производную функции $z = x^2 - xy - 2y^2$ в точке P(1;2) в направлении, составляющем с осью Ox угол 60°.

4.7. Найти производную функции $z = \left(x^2 + y\right)\sqrt{e^y}$ в точке M(2;0) в направлении вектора $\boldsymbol{MN}$, где N (5,4).

4.8. Найти величину и направление градиента функции $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ в точке M(5;3).

4.9. Найти производную функции $z = xy^2 z^2$ в точке M(3;2;1) в направлении вектора $\boldsymbol{MN}$, где N (5;4;2).

4.10. Найти величину и направление градиента функции $z = xyz$ в точке M(2;1;1).

Задание 2. Исследуйте на экстремум функции:

4.1. $f = 5x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 4xy - 2yz.$

4.2. $f = 2x^2 + y^2 + 2xy - 10xz + 26z^2$.

4.3. $f = x^2 + 5y^2 - 2xy - 4xz + 2z^2$.

4.4. $f = 2x^2 + 5y^2 + 2xy - 2xz + z^2 - 4yz.$

4.5. $f = 5x^2 + y^2 + 6xt + 13t^2 + 4yt.$

4.6. $f = 2x^2 + y^2 + 2xy + 2t^2 + 2yt.$

4.7. $f = 2x^2 + 13y^2 - 10xy + 2z^2 + 2yz.$

4.8. $f = 5x^2 + 2y^2 - 4xy - 2xt + 2t^2 + 2yt.$

4.9. $f = 10x^2 + 9y^2 - 10xy.$

4.10. $f = 5x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 4xy - 2yz.$

Задание 3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:

4.1. $z = x^2 + 3y^2 + x - 12y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 4;\ y = 3;\ x + y = 4.$

4.2. $z = x^2 + 3y^2 + x - 14y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = -2;\ y = 5,\ x + y = 6.$

4.3. $z = x^2 + 3y^2 + x - 15y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = -2;\ y = 6;\ x + y = 7.$

4.4 $z = x^2 + 3y^2 + x - 16y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = -2;\ y = 7;\ x + y = 8.$

4.5. $z = -2x^2 - y^2 - xy + 3$ в области D: $x \le 1;\ y \ge 0;\ y \le x$.

4.6 $z = x^2 + 3y^2 + x - 18y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = -2;\ y = 9,\ \ x + y = 10$.

4.7. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ в области D: $x \ge 0;\ \ y \ge 0;\ x + y \le 3$.

4.8 $z = x^2 + 3y^2 + x - 11y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = -1;\ y = 1,\ x + y = 3$.

4.9. Найти экстремум функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в области D, где $x \le 1;\ y \le 1,\ x + y \ge 1$.

4.10 $z = x^2 + 3y^2 + x - 13y,$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = -1;\ y = 3,\ x + y = 5$.

Тема 5. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Цель: Формирование практических навыков решения задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Типы задач, приводящие к дифференциальным уравнениям. Определение общего и частного решений дифференциальных уравнений, их геометрическая интерпретация. Методы решения дифференциальных уравнений.

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$\frac{d^2y}{dx^2}$ + p $\frac{dy}{dx}$ + qy = 0, где p, q – постоянные величины. (1)

Для отыскания общего решения уравнения (1)
составляется характеристическое уравнение $r^2 + pr + q = 0$,
(2)
которое получается из уравнения (1) заменой $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ и у на соответствующие степени r, причем сама функция у заменяется единицей.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (1) строится в зависимости от корней r_1 и r_2 характеристического уравнения(2).
Здесь возможны три случая.

<u>1 случай.</u> Корни r_1 и r_2 - действительные и различные. В этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид: $Y = C_1 e^{x_1} + C_2 e^{x_2}$

<u>2 случай.</u> Корни r_1 и r_2 - действительные и равные: $r_1 = r_2$ = r. В этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид: $Y = (C_1 + C_2x)\, e^{x}$

<u>3 случай.</u> Корни r_1 и r_2 - комплексно-сопряженные: $r_1 = \alpha + \beta i$; $r_2 = \alpha - \beta i$. В этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид: $Y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Тема 6. Дифференциальные уравнения в науке и технике.

Цель: Активизировать познания студентов. Познакомить студентов с широким спектром применения дифференциальных уравнений.

Составление дифференциальных уравнений. Дифференциальное уравнение показательного роста. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

Задания Написать реферат или создать презентацию на тему «Дифференциальные уравнения в науке и технике».

Тема 7. Практическое применение степенных рядов.

Цель: Активизировать познания студентов. Познакомить студентов с широким спектром применения степенных рядов.

Вычисление значений функций. Вычисление определенных интегралов. Решение дифференциальных уравнений.

Задание Написать реферат или создать презентацию на тему «Практическое применение степенных рядов».

Тема 8. Комплексные числа. Операции над комплексными числами. Формула Муавра. Решение уравнений.

Цель: Приобретение практических навыков выполнения различных операций над комплексными числами.

Различные формы записи комплексных чисел. Переход от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и показательной формам, и обратно. Действия над комплексными числами. Многочлены и алгебраические уравнения. Основная теорема алгебры. Теорема Безу. Формула Муавра.

<u>Пример выполнения задания.</u>

1. Даны комплексные числа $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 4 - 3i$.

Найти: а) $z_1 + 2z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\frac{z_1}{z_2}$; г) $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$; д) $\frac{z_1^2 - \bar{z}_2^2}{z_1 \cdot z_2}$.

<u>Решение.</u>

а) $z_1 + 2z_2 = (5 + 2i) + 2(4 - 3i) = 5 + 2i + 8 - 6i = 13 - 4i$.

б) $z_1 \cdot z_2 = (5 + 2i)(4 - 3i) = 20 - 15i + 8i - 6i^2 = 20 - 7i - 6(-1) =$

$= 26 - 7i$, так как $i^2 = -1$.

в) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 + 2i}{4 - 3i} = \frac{(5 + 2i)(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{20 + 15i + 8i - 6}{16 + 9} =$

$= \frac{14 + 23i}{25} = \frac{14}{25} + \frac{23}{25} i = 0{,}56 + 0{,}92i$.

г) $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2} = \frac{(5 + 2i)(4 - 3i)}{(5 + 2i) + (4 - 3i)} = \frac{26 - 7i}{9 - i} = \frac{(26 - 7i)(9 + i)}{(9 - i)(9 + i)} =$

$= \frac{234 + 26i - 63i + 7}{81 + 1} = \frac{241 - 37i}{82} = \frac{241}{82} - \frac{37}{82} i$.

д) Для любого комплексного числа $z = x + iy$ существует сопряженное ему число

$\bar{z} = x - iy$.

$$\frac{z_1^2-\bar{z}_2^2}{z_1\cdot z_2} = \frac{(5+2i)^2-(4+3i)^2}{(5+2i)(4-3i)} = \frac{(25+20i+4i^2)-(16+24i+9i^2)}{26-7i} =$$

$$= \frac{25+20i-4-16-24i+9}{26-7i} = \frac{(14-4i)(26+7i)}{(26-7i)(26+7i)} =$$

$$= \frac{364+98i-104i+28}{676+49} = \frac{392-6i}{725} = \frac{392}{725} - \frac{6}{725}i.$$

<u>Ответ:</u> $z_1+2z_2=13-4i$; $z_1\cdot z_2=26-7i$; $\frac{z_1}{z_2}=0,56+0,92i$;

$\frac{z_1\cdot z_2}{z_1+z_2}=\frac{241}{82}-\frac{37}{82}i$; $\frac{z_1^2-\bar{z}_2^2}{z_1\cdot z_2}=\frac{392}{725}-\frac{6}{725}i$.

2. Применяя формулу Муавра, найти z^n, где $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $n=12$.

<u>Решение.</u> Формула Муавра для любого комплексного числа $z=x+iy$ в тригонометрической форме имеет вид:

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, аргумент φ определяется из формул

$$\cos\varphi=\frac{x}{r},\quad \sin\varphi=\frac{y}{r},\quad tg\varphi=\frac{y}{x}.$$

$$\Rightarrow\varphi=\arg z=\arg\frac{y}{x}.$$

Для комплексного числа $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ имеем:

$$r=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2;\qquad \varphi=arctg\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=arctg1=\frac{\pi}{4}.$$

При $n=12$ имеем:

$$z^{12}=(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{12}=2^{12}\left(\cos 12\cdot\frac{\pi}{4}+i\sin 12\cdot\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$2^{12}(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=2^{12}(-1+i\cdot 0)=-2^{12}=-4096.$$

<u>Ответ:</u> $(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{12}=-4096$.

3. Решить уравнение $z^6+729=0$.

<u>Решение.</u>

Уравнение $z^n=a$, $n\in N$ имеет n различных решений: $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, причем решения определяются формулами:

$$z_k=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad k=0,1,\dots,(n-1),$$

где $\varphi=\arg a$.

Для уравнения $z^6=-729$ имеем

$$z_k=\sqrt[6]{-729}=\sqrt[6]{729}\cdot\sqrt[6]{-1}=3\sqrt[6]{-1},\quad k=0,1,\dots,5.$$

Для числа -1, $\varphi=\arg(-1)=\pi$.

√ √ √ √

8

Тогда

$$z_k = 3\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right), \quad k = 0,1,\dots,5.$$

Подставляем вместо k последовательно значения 0,1,…,5, получим 6 различных решений уравнения:

$$z_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i;$$

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right) = 3(0 + i) = 3i;$$

$$z_3 = 3\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$z_3 = 3\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$z_4 = 3\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = 3(0 - i) = -3i;$$

$$z_5 = 3\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i;$$

<u>Ответ:</u> $z_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$; $z_1 = 3i$; $z_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$; $z_3 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$; $z_4 = -3i$; $z_5 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

Задание 1. Даны комплексные числа Z_1 и Z_2. Найти:

а) $Z_1 + 2Z_2$; **б)** $Z_1 \cdot Z_2$; **в)** $\frac{Z_1}{Z_2}$; **г)** $\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$; **д)** $\frac{Z_1^2 - Z_2^2}{Z_1 \cdot Z_2}$.

8.1. $Z_1 = 1 + i$, $Z_2 = 3 - 2i$; **8.2.** $Z_1 = 1 - i$, $Z_2 = 5 - i$;

8.3. $Z_1 = -1 + i$, $Z_2 = 2 + 3i$; **8.4.** $Z_1 = -1 - i$, $Z_2 = 1 + 4i$;

8.5. $Z_1 = 2 + i$, $Z_2 = 1 - 3i$; **8.6.** $Z_1 = 2 - i$, $Z_2 = 4 + 3i$;

8.7. $Z_1 = -2 + i$, $Z_2 = 5 - 2i$; **8.8.** $Z_1 = -2 - i$, $Z_2 = 3 + 2i$;

8.9. $Z_1 = 2 + 3i$, $Z_2 = 1 - 5i$; **8.10.** $Z_1 = 2 - 3i$, $Z_2 = 3 + 2i$;

8.11. $Z_1 = -2 + 3i$, $Z_2 = 3 - 2i$; **8.12.** $Z_1 = -2 - 3i$, $Z_2 = -3 + 2i$;

8.13. $Z_1 = 3 + i$, $Z_2 = 2 + 5i$; **8.14.** $Z_1 = 3 - i$, $Z_2 = 2 - 5i$;

8.15. $Z_1 = -3 + i$, $Z_2 = -2 + 5i$; **8.16.** $Z_1 = -3 - i$, $Z_2 = -2 + 3i$;

8.17. $Z_1 = 3 + 2i$, $Z_2 = -2 - 5i$; **8.18.** $Z_1 = 3 - 2i$, $Z_2 = 1 + 5i$;

8.19. $Z_1 = -3 + 2i$, $Z_2 = 1 - 3i$; **8.20.** $Z_1 = -3 - 2i$, $Z_2 = 5 - 2i$;

8.21. $Z_1 = 3 + 4i$, $Z_2 = 2 + 3i$; **8.22.** $Z_1 = 3 - 4i$, $Z_2 = -2 + 3i$;

8.23. $Z_1 = -3 + 4i$, $Z_2 = 2 - 3i$; **8.24.** $Z_1 = -3 - 4i$, $Z_2 = 2 + 3i$;

8.25. $Z_1 = 4 + 3i$, $Z_2 = 3 + 5i$; **8.26.** $Z_1 = 3 + 5i$, $Z_1 = 4 - 3i$,

8.27. $Z_1 = 4 - 3i$, $Z_2 = 3 - 5i$, **8.28.** $Z_1 = 3 - 5i$, $Z_2 = 4 + 5i$;

8.29. $Z_1 = -4 + 3i$, $Z_2 = -3 + 5i$; **8.30.** $Z_1 = -4 - 3i$, $Z_2 = 3 + 5i$;

Задание 2. Применяя формулу Муавра, найти Z^n.

8.1. $Z = 1 + i$, $n = 10$ **8.2.** $Z = 1 - i$, $n = 10$

8.3. $Z = -1 + i$, $n = 14$ **8.4.** $Z = -1 - i$, $n = 16$

8.5. $Z=\sqrt{3}+i$, $n=8$ **8.6.** $Z=\sqrt{3}-i$, $n=10$

8.7. $Z=-\sqrt{3}+i$, $n=12$ **8.8.** $Z=-\sqrt{3}-i$, $n=14$

8.9. $Z=1+\sqrt{3}i$, $n=8$ **8.10.** $Z=1-\sqrt{3}i$, $n=12$

8.11. $Z=-1+\sqrt{3}i$, $n=12$ **8.12.** $Z=-1-\sqrt{3}i$, $n=14$

8.13. $Z=3+3i$, $n=16$ **8.14.** $Z=3-3i$, $n=8$

8.15. $Z=3+3i$, $n=10$ **8.16.** $Z=-3+3i$, $n=12$

8.17. $Z=-3-3i$, $n=14$ **8.18.** $Z=2+2i$, $n=16$

8.19. $Z=2-2i$, $n=8$ **8.20.** $Z=-2+2i$, $n=10$

8.21. $Z=-2-2i$, $n=12$ **8.22.** $Z=4+4i$, $n=14$

8.23. $Z=4-4i$, $n=16$ **8.24.** $Z=-4+4i$, $n=18$

8.25. $Z=-4-4i$, $n=20$ **8.26.** $Z=5+5i$, $n=8$

8.27. $Z=5-5i$, $n=10$ **8.28.** $Z=-5+5i$, $n=12$

8.29. $Z=-5-5i$, $n=14$ **8.30.** $Z=-2+2i$, $n=16$

Задание 3. Решить уравнение.

8.1. $Z^4+16=0$ **8.2.** $Z^4-16=0$

8.3. $Z^5+32=0$ **8.4.** $Z^5-32=0$

8.5. $Z^6+1=0$ **8.6.** $Z^6-1=0$

8.7. $Z^5+1=0$ **8.8.** $Z^5-1=0$

8.9. $Z^6+64=0$ **8.10.** $Z^6-64=0$

8.11. $Z^4+81=0$ **8.12.** $Z^4-81=0$

8.13. $243Z^5+32=0$ **8.14.** $243Z^5-32=0$

8.15. $Z^4+4=0$ **8.16.** $Z^4-4=0$

8.17. $16Z^4+1=0$ **8.18.** $16Z^4-1=0$

8.19. $Z^5+243=0$ **8.20.** $Z^5-243=0$

8.21. $32Z^5+1=0$ **8.22.** $32Z^5-1=0$

8.23. $64Z^6+1=0$ **8.24.** $64Z^6-1=0$

8.25. $16Z^4+81=0$ **8.26.** $16Z^4-81=0$

8.27. $81Z^4+1=0$ **8.28.** $81Z^4-16=0$

8.29. $32Z^5-243=0$ **8.30.** $32Z^5+243=0$